SCHAUM'S outlines

全美经典 学习指导系列

2000离散数学习题精解

〔美〕S. 利普舒茨 M. L. 利普森 著

林成森 译

- 大量精选习题帮助掌握离散数学
- 教授解答难题的技巧
- 有助于缩短学习时间
- 学习和考试的优秀读物

科学出版社

麦格劳-希尔教育出版集团

(O-1569.0101)
责任编辑：毕 颖

SCHAUM'S ouTlines

全球销量
超越3000万的
"全美经典学习指导系列"
是您的最佳
学习伴侣！

40年来最畅销的教辅系列
全美著名高校资深教授倾力之作
国内重点高校任课教师全力推荐并担当翻译
省时高效的学习辅导，全面详细的习题解答
迄今为止国内最全面的教辅系列
覆盖大学理工科专业

全美经典 学习指导系列

- 概率与统计
- 统计学
- 离散数学
- Mathematica使用指南
- 数理金融引论
- 机械振动
- 微分方程
- 统计学原理（上）
- 统计学原理（下）
- 微积分
- 静力学与材料力学
- 有限元分析
- 传热学
- 近代物理学
- 2000工程热力学习题精解
- 工程力学
- 3000物理习题精解
- 流体动力学
- 物理学基础
- 材料力学
- 2000离散数学习题精解
- 工程热力学
- 数值分析
- 量子力学
- 有机化学习题精解
- 3000化学习题精解
- 大学化学习题精解
- 电路
- 电气工程基础
- 工程电磁场基础
- 数字信号处理
- 数字系统导论
- 数字原理
- 电机与机电学
- 基本电路分析
- 信号与系统
- 微生物学
- 生物化学
- 生物学
- 分子和细胞生物学
- 人体解剖与生理学

http://www.sciencep.com http://www.mheducation.com

ISBN 7-03-010015-8
9 787030 100153 >

Mc Graw Hill

ISBN 7-03-010015-8/O·1569
定 价：36.00 元

全美经典学习指导系列

2000 离散数学习题精解

〔美〕S. 利普舒茨　M. L. 利普森　著

林成森　译

科学出版社

麦格劳-希尔教育出版集团

2002

内 容 简 介

本书是《全美经典学习指导系列》丛书中的一本.书中精选了离散数学2000多道习题,并给予详细解答.这将有助于读者迅速了解离散数学的基本知识和解题技巧,是读者复习和备考离散数学的一本好书.

本书可供理工科高年级学生和教师参考.

Seymour Lipschutz, Marc Lars Lipson, 2000 Solved Problems in Discrete Mathematics.

ISBN:0-07-038031-7

图字:01-2001-2121号

图书在版编目(CIP)数据

2000离散数学习题精解/〔美〕利普舒茨,〔美〕利普森著;林成森译.—北京:科学出版社,2002.

(全美经典学习指导系列)

ISBN 7-03-010015-8

Ⅰ.2… Ⅱ.①利… ②利… ③林… Ⅲ.离散数学-解题 Ⅳ.O158-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第005043号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

[illegible]印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年3月第 一 版 开本:A4(890×1240)

2002年3月第一次印刷 印张:26

印数:1—5 000 字数:749 000

定价: 36.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

致 学 生

这本习题解集包括离散数学课程中的 2000 多道习题及其解答，其中既有计算题又有理论题(包括其证明).

本书的每一节都是从基本的习题开始，逐渐增加难度.多数学生对证明都感到困难，所以把理论题及其证明安排在预习所述理论的计算题之后.

通常，学生学习离散数学课程都是被指定使用一本教科书.本书的章节是按多数教科书的顺序安排的(或许有些差异).但是，我们尽可能把各章节写成既便于改变其阅读顺序又不失其连贯性.

每道习题的解答紧接在习题之后.你可在阅读习题解答之前自己试着解一下.你也可以在阅读题解之后，不看本书，自己再做一遍.

本书可以作为离散数学课程的辅导书，亦可作为独立复习离散数学的读物.

著者

目　录

第一章　集合论 …… (1)
1.1　集合、元素、集合相等 …… (1)
1.2　子集 …… (3)
1.3　集合运算 …… (8)
1.4　文图和集合运算、基本积 …… (14)
1.5　集合代数、对偶性 …… (20)
1.6　有限集(合)、计数原理 …… (24)
1.7　集合类、幂集 …… (30)
1.8　数学归纳法 …… (32)
1.9　论证和文图 …… (35)
1.10　对称差 …… (42)
1.11　实数系统 **R**、数集 …… (45)
第二章　关系 …… (52)
2.1　积集 …… (52)
2.2　关系 …… (56)
2.3　关系的表示法 …… (60)
2.4　复合关系 …… (69)
2.5　关系的类型 …… (73)
2.6　划分 …… (77)
2.7　等价关系 …… (80)
2.8　三元和 n - 元关系 …… (83)
第三章　函数 …… (84)
3.1　函数、映射 …… (84)
3.2　实值函数 …… (88)
3.3　函数的复合 …… (94)
3.4　一对一、映成和可逆函数 …… (98)
3.5　数学函数和计算机科学 …… (104)
3.6　递归定义的函数 …… (109)
3.7　加标集合类 …… (112)
3.8　基数 …… (114)
第四章　向量和矩阵 …… (119)
4.1　$\mathbf{R}^n$ 中的向量 …… (119)
4.2　矩阵、矩阵加法和数乘 …… (128)
4.3　矩阵乘法 …… (132)
4.4　矩阵的转置 …… (137)
4.5　方阵 …… (140)
4.6　特殊类型的方阵 …… (149)
4.7　行列式 …… (155)
第五章　图论 …… (167)
5.1　图和多重图 …… (167)

5.2 一个顶点的次数 …… (170)
5.3 通路、连通性 …… (172)
5.4 子图、连通分图、割点、桥 …… (176)
5.5 可穿程多重图 …… (180)
5.6 特殊图 …… (184)
5.7 矩阵和图、邻接表示法 …… (188)
5.8 标号图 …… (194)
5.9 同构和同胚图 …… (196)
第六章 平面图和树 …… (199)
6.1 平面图 …… (199)
6.2 地图和区域 …… (201)
6.3 欧拉公式 …… (204)
6.4 非平面图 …… (209)
6.5 着色图 …… (212)
6.6 颜色和地图 …… (216)
6.7 树 …… (220)
第七章 有向图和二元树 …… (227)
7.1 有向图 …… (227)
7.2 基本定义:次数、通路、连通性 …… (231)
7.3 有向图、关系和矩阵 …… (235)
7.4 有根树 …… (237)
7.5 二元树 …… (241)
第八章 组合分析 …… (251)
8.1 计数原理、阶乘记号 …… (251)
8.2 二项式系数 …… (253)
8.3 排列 …… (260)
8.4 组合 …… (267)
8.5 有序和无序划分 …… (274)
8.6 树图 …… (278)
第九章 代数系统 …… (285)
9.1 运算和半群 …… (285)
9.2 群和子群 …… (288)
9.3 正规子群、商群、群同态 …… (293)
9.4 环和理想 …… (296)
9.5 整环、PID、UFD …… (300)
9.6 域 …… (301)
9.7 域上的多项式 …… (303)
第十章 语言、文法和自动机 …… (310)
10.1 单词 …… (310)
10.2 语言 …… (311)
10.3 正则式和正规语言 …… (312)
10.4 有限状态自动机 …… (313)
10.5 文法和语言 …… (318)
第十一章 有序集和格 …… (323)
11.1 有序集 …… (323)

11.2 偏序集的图 …… (327)
11.3 上确界和下确界 …… (331)
11.4 相似集合和良序集合 …… (333)
11.5 格 …… (335)
11.6 格和有序集 …… (336)
11.7 有界格 …… (339)
11.8 分配格和分解 …… (340)
11.9 有补格 …… (345)
第十二章 命题演算 …… (347)
12.1 语句和基本运算 …… (347)
12.2 复合语句的真值 …… (349)
12.3 命题和真值表 …… (351)
12.4 重言式和矛盾 …… (353)
12.5 逻辑等价性 …… (354)
12.6 否定和德·摩根律 …… (357)
12.7 命题代数 …… (359)
12.8 条件语句 $p \to q$ …… (360)
12.9 双条件语句 $p \leftrightarrow q$ …… (363)
12.10 论证 …… (367)
12.11 逻辑蕴涵 …… (372)
12.12 量词 …… (374)
第十三章 布尔代数和逻辑门 …… (378)
13.1 基本定义和定理 …… (378)
13.2 次序和布尔代数 …… (382)
13.3 布尔表达式以及积和形式 …… (384)
13.4 逻辑门 …… (387)
13.5 逻辑电路 …… (390)
13.6 极小布尔表达式和素蕴涵 …… (396)
13.7 卡诺(Karnaugh)图 …… (399)
13.8 极小与或电路 …… (404)

第一章　集　合　论

在这一章中，大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，小写字母 $a,b,c,p,\cdots$ 表示集合中的元素或成员．我们也用集合记号：

$p\in A$ 表示 p 是 A 的一个元素或 p 属于 A；

$A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$ 表示 A 是 B 的一个子集或 B 包含 A；

$A\subset B$ 或 $B\supset A$ 表示 A 是 B 的一个真子集；

$\varnothing$ 表示空集；

U 表示全集．

下列集合将用特殊符号：

N＝正整数集合：$1,2,3,\cdots$；

Z＝整数集合：$\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$；

Q＝有理数集合；

R＝实数集合．

1.1　集合、元素、集合相等

1.1　用集合记号重写下列陈述：

(a)元素 1 不是集合 A 的一个成员；

(b)元素 5 是集合 B 的一个成员；

(c)A 是 C 的一个子集；

(d)A 不是 D 的一个子集；

(e)F 含有 G 的所有元素；

(f)E 和 F 所含元素都相同．

解　☞ 应用上述集合记号以及通过一符号加上一竖表示对该符号之否定：(a)$1\notin A$，(b)$5\in B$，(c)$A\subseteq C$，(d)$A\nsubseteq D$，(e)$G\subseteq F$，或等价地，$F\supseteq G$，(f)$E=F$．

1.2　举一个例子，叙述表示一个特殊集合的两个基本方法．

解　☞ 若有可能的话，一种方法是列出集合的成员．例如

$$A=\{a,e,i,o,u\}$$

表示集合 A，它的元素是字母 a,e,i,o,u．注意，用逗号隔开元素，且用大括号｛　｝括起来．第二种方法是指出集合中的元素所具有的特征性质．例如

$$B=\{x:x\text{ 是整数},x>0\},$$

读作"B 是 x 的集合，使得 x 是整数且 x 大于 0"，它表示集合 B 的元素是正整数．通常，一个字母 x 用来表示集合的一典型成员，冒号读作"使得"，逗号读作"且"．

1.3　叙述(a)扩张原则(形式上叙述一个集合完全为其成员所确定)，(b)抽象原则(形式上叙述一个集合能用一个性质来描述)．

解　☞ (a)扩张原则：两个集合 A 和 B 相等当且仅当它们有相同的元素．

(b)抽象原则：任给一个集合 U 和一个性质 P，存在一个集合 A 使得 A 的各元素恰好是 U 的具有性质 P 的那些成员．

1.4　列出下列集合的元素(此处 $\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots\}$)：

(a)$A=\{x:x\in\mathbf{N},3<x<12\}$；

(b)$B=\{x:x\in\mathbf{N},x\text{ 是偶数},x<15\}$；

(c)$C=\{x:x\in\mathbf{N},4+x=3\}$.

解 ☞ (a) A 由3和12之间的正整数组成,因此 $A=\{4,5,6,7,8,9,10,11\}$.

(b)B 由小于15的正偶数组成,因此 $B=\{2,4,6,8,10,12,14\}$.

(c)没有正整数满足条件 $4+x=3$,因此 C 不含元素.换句话说,$C=\varnothing$(空集).

1.5 列出下列集合的元素:

(a)$A=\{x:x\in\mathbf{N},3<x<9\}$;

(b)$B=\{x:x\in\mathbf{N},x^2+1=10\}$;

(c)$C=\{x:x\in\mathbf{N},x$ 是奇数,$-5<x<5\}$.

解 ☞ (a)A 由3和9之间的所有正整数组成,因此 $A=\{4,5,6,7,8\}$.

(b)B 含有满足方程 $x^2+1=10$ 的所有正整数,因此 $B=\{3\}$.

(c)C 含有-5和5之间的所有正奇数,因此 $C=\{1,3\}$.

1.6 列出下列集合的元素(此处 $\mathbf{Z}=\{$整数$\}$):

(a)$A=\{x:x\in\mathbf{Z},3<x<9\}$;

(b)$B=\{x:x\in\mathbf{Z},x^2+1=10\}$;

(c)$C=\{x:x\in\mathbf{Z},x$ 是奇数,$-5<x<5\}$.

(与习题1.5比较.)

解 ☞ (a)A 由3和9之间的所有整数组成,因此 $A=\{4,5,6,7,8\}$.

(b)B 由所有满足 $x^2+1=10$ 的整数组成,因此 $B=\{-3,3\}$.

(c)C 由-5和5之间的所有奇数组成,因此 $C=\{-3,-1,1,3\}$.

1.7 列出下列集合的元素:

(a)$\{x:x$ 是一个元音字母,x 不是"a"或"i"$\}$;

(b)$\{x:x$ 是美国一州名,x 以字母 A 开头$\}$.

解 ☞ (a)从元音字母 a,e,i,o,u 中删去"a"和"i"得到$\{e,o,u\}$.

(b)恰好有4个这样的州名:{亚拉巴马,阿拉斯加,亚利桑那,阿肯色}.

1.8 列出下列集合的元素简明这些集合:

(a)$A=\{x:x\in\mathbf{R},-5<x<5\}$;

(b)$B=\{x:x\in\mathbf{N},x$ 是3的倍数$\}$;

(c)$C=\{x:x$ 是一美国公民,x 是一个青少年$\}$.

解 ☞ (a)由于 A 是无限的,我们不能列出它的元素.因此,我们用给定的 A 的性质来表示 A.

(b)由于 B 是无限的,尽管我们常常写成

$$B=\{3,6,9,\cdots\}$$

来表示该集合,此处每个元素比其前面的元素大3,但不能列出它的所有元素.

(c)虽然在任一给定的时间里 C 是有限的集合,但要列出它的元素几乎是不可能的,因此我们用给定的 C 的性质来表示 C.

集合相等

1.9 设 $A=\{x:3x=6\}$. $A=2$?

解 ☞ A 是由单个元素2组成的集合,即 $A=\{2\}$.数2属于 A,它不等于 A,一个元素 p 和单个元素集合$\{p\}$有本质差别.

1.10 集合$\{r,s,t\}$,$\{t,s,r\}$,$\{s,r,t\}$,$\{t,r,s\}$中哪些是相等的呢?

解 ☞ 它们都相等.顺序不改变一个集合.

1.11 考虑下列集合:

$$\{w\},\{y,w,z\},\{w,y,x\},\{y,z,w\},\{w,x,y,z\},\{z,w\}.$$

它们之中哪些等于 $A=\{w,y,z\}$?

解 ☞ 集合$\{y,w,z\}$和$\{y,z,w\}$与A相等，就是说，它们有相同的3个元素.其他集合不等于A，因它们不含A的所有元素或含有其他元素.

1.12 考虑集合：

$$\{4,2\},\{x:x^2-6x+8=0\},\{x:x\in\mathbf{N},x\text{ 是偶数},1<x<5\}.$$

它们之中哪些等于$B=\{2,4\}$?

解 ☞ 由于它们都含元素2和4，且无其他元素，因此它们都等于B.

空集$\varnothing$和全集U

1.13 判定

$$\varnothing,\{0\},\{\varnothing\}$$

3个集合中哪些是相同的？

解 ☞ 它们是互不相同的.集合$\{0\}$含一个元素：数零.集合$\varnothing$不含元素，它是空集.集合$\{\varnothing\}$也含一个元素：空集.(第三个集合是集合的集合.)

习题1.14～1.16参照下列集合：

$$X=\{x:x^2=9,2x=4\},\quad Y=\{x:x\neq x\},\quad Z=\{x:x+8=8\}.$$

1.14 X是空集吗？

解 ☞ 没有数同时满足$x^2=9$和$2x=4$，因此X是空集，即$X=\varnothing$.

1.15 Y是空集吗？

解 ☞ 我们指出"="意即"等于"，因而Y也是空集.实际上，有些教科书定义空集为$\varnothing\equiv\{x:x\neq x\}$.

1.16 Z是空集吗？

解 ☞ 数零满足$x+8=8$，因此$Z=\{0\}$.于是，由于Z含有0，因此它不是空集，即$Z\neq\varnothing$.

1.17 考虑单词(i)empty，(ii)void，(iii)zero，(iv)null.哪个单词不同于其他单词，为什么？

解 ☞ 第一、第二和第四个单词为不含元素的集合.单词zero为一个具体的数.因此zero不同于其他单词.

1.18 结合一个例子，定义全集U.

解 ☞ 在任何集合理论的应用中，通常所研究的全体集合属于某个固定的大集合，该集合称为**全集或论域**.例如，在平面几何中，全集由平面中所有点组成；在人类人口研究中，全集由世界上所有的人组成.

1.19 给定U=N=\{正整数\}，指出下列哪些集合等于\{2,4\}：

$$A=\{\text{小于 6 的偶数}\},\quad B=\{x:x<5\},$$
$$C=\{x:(x-2)(x-4)(x+2)=0\}.$$

解 ☞ 集合A和C等于$\{2,4\}$.集合A不含负偶数或零，因它们不在全集中.集合B同时含有不在指定集合的1和3.集合C不含-2，因-2不是正整数.

1.20 叙述全集U是空集的情形.

解 ☞ 设U是某学院的所有音乐课的集合.可以想象在某一年里没有这样的课程，因此U=$\varnothing$.

1.2 子集

1.21 解释$A\subseteq B$和$A\subset B$之间的差别.

解 ☞ $A\subseteq B$(A是B的一个子集)表示A的每个元素也都属于A，这里有可能$A=B$.$A\subset B$(A是B的一个**真子集**)表示A是B的一个子集，但$A\neq B$，因而B中至少有一个元素不在A中.

1.22 如何用文字叙述下列陈述的证明：

(a)A 等于 B；

(b)A 是 B 的一个子集；

(c)A 是 B 的一个真子集；

(d)A 不是 B 的一个子集.

解 ☞ (a)证明 A 的每个元素都属于 B 且 B 的每个元素也都属于 A.

(b)证明 A 的每个元素都属于 B.

(c)证明 A 的每个元素都属于 B，且 B 至少有一个元素不属于 A. 注意，没有必要证明 B 有多于一个元素不在 A 中.

(d)证明 A 有一个元素不在 B 中.

1.23 证明 $A=\{2,3,4,5\}$ 不是 $B=\{x : x\in \mathbf{N}, x$ 是偶数$\}$的一个子集.

证 ☞ 我们需要证明 A 中至少有一个元素不在 B 中. 现在 $3\in A$. 由于 B 由偶数组成，因而 $3\notin B$. 故 A 不是 B 的一个子集.

1.24 证明 $A=\{2,3,4,5\}$ 是 $C=\{1,2,3,\cdots,8,9\}$ 的一个真子集.

证 ☞ A 的每个元素都属于 C，因此 $A\subseteq C$. 另一方面，$1\in C$ 但 $1\notin A$，因此 $A\neq C$. 故 A 是 C 的一个真子集.

定理 1.1

(i)对任一集合 A，我们有 $\varnothing\subseteq A\subseteq \mathbf{U}$；

(ii)对任一集合 A，我们有 $A\subseteq A$；

(iii)若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$；

(iv)$A=B$ 当且仅当 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.

1.25 证明定理 1.1(i).

证 ☞ 据定义，A 的所有成员都属于全集 $\mathbf{U}$，因此每个集合 A 都是全集 $\mathbf{U}$ 的子集，而且，空集 $\varnothing$ 是 A 的一个子集.

1.26 证明定理 1.1(ii).

证 ☞ 由于 A 的元素属于 A，因此每个集合 A 是其自身的一个子集.

1.27 证明定理 1.1(iii).

证 ☞ 若集合 A 的每个元素都属于集合 B，且 B 的每个元素都属于集合 C，则显然 A 的每个元素都属于 C. 换句话说，若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

1.28 证明定理 1.1(iv).

证 ☞ 若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则 A 和 B 有相同的元素，即 $A=B$. 反之，设 $A=B$. 由于每个集合是其自身的一个子集，因此 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.

1.29 证明 $A=\{a,b,c\}$ 不是 $B=\{a,e,i,o,u\}$ 的一个子集.

证 ☞ 只须证明 A 至少有一个元素不在 B 中. 现在，$b\in A$，但 $b\notin B$，因此 A 不是 B 的一个子集. 另一方面，$c\in A$ 但 $c\notin B$，因此 $A\nsubseteq B$.（没有必要证明 b 和 c 都不属于 B.）

1.30 考虑下列集合：

$$A=\{a\},\quad B=\{a,c,b\},\quad C=\{c,a\},\quad D=\{c,b,a\},\quad E=\{b\},\quad \varnothing.$$

它们之中哪些是 $X=\{a,b,c\}$ 的子集？哪些是 X 的真子集？

解 ☞ 由于每个集合的元素都属于 X（包括没有元素的空集），因此它们都是 X 的子集. 特别地，因 A,C,E 和 $\varnothing$ 不等于 X，因此它们是 X 的真子集.

1.31 考虑下列集合：

$X=\{x : x$ 是一个整数，$x>1\}$，

$Y=\{y : y$ 是可被 2 整除的正整数$\}$，

$Z=\{z:z$ 是一个大于 10 的偶数$\}$.

它们之中哪些是 $W=\{2,4,6,\cdots\}$的子集?

解 ☞ 只有 Y 和 Z 是 W 的子集,因它们的元素都属于 W.(事实上,$Y=W$.)由于 X 有元素不属于 W,例如,$3\in X$,但 $3\notin W$,因此 X 不是 W 的一个子集.

1.32 设 $A=\{x,y,z\}$. A 包含多少个子集,且它们是什么?

解 ☞ 我们列出 A 的所有可能的子集.它们是$\{x,y,z\}$,$\{y,z\}$,$\{x,z\}$,$\{x,y\}$,$\{x\}$,$\{y\}$,$\{z\}$和空集$\varnothing$. A 有 8 个子集.

习题 1.33～1.36 考虑下列集合:

$\varnothing$, $A=\{1\}$, $B=\{1,3\}$, $C=\{1,5,9\}$,

$D=\{1,2,3,4,5\}$, $E=\{1,3,5,7,9\}$,

$\mathbf{U}=\{1,2,\cdots,8,9\}$.

1.33 在(a)$\varnothing$, A;(b)A, B 之间插入正确的符号$\subseteq$或$\nsubseteq$.

解 ☞ (a)$\varnothing\subseteq A$,因$\varnothing$是任一集合的子集.

(b)$A\subseteq B$,因 A 只有一个元素 1 且它也属于 B.

1.34 在(a)B, C;(b)B, E 之间插入正确的符号$\subseteq$或$\nsubseteq$.

解 ☞ (a)$B\nsubseteq C$,因 $3\in B$ 但 $3\notin C$.

(b)$B\subseteq E$,因 B 的元素也属于 E.

1.35 在(a)C, D;(b)C, E 之间插入正确的符号$\subseteq$或$\nsubseteq$.

解 ☞ (a)$C\nsubseteq D$,因 $9\in C$ 但 $9\notin D$.

(b)$C\subseteq E$,因 C 的元素也属于 E.

1.36 在(a)D, E;(b)D, $\mathbf{U}$ 之间插入正确的符号$\subseteq$或$\nsubseteq$.

解 ☞ (a)$D\nsubseteq E$,因 $2\in D$ 但 $2\notin E$.

(b)$D\subseteq\mathbf{U}$,因 D 的元素也属于 $\mathbf{U}$.

习题 1.37～1.40 考虑下列集合:

$$A=\{x,z\},\quad B=\{y,z\},\quad C=\{w,x,y,z\},\quad D=\{v,w,z\},\quad E=\{z,y\}.$$

1.37 在(a)A, C;(b)A, D 之间插入正确的符号$\subset$或$\not\subset$.

解 ☞ (a)$A\subset C$,因 A 是 C 的一个子集,但 $A\neq C$.

(b)$A\not\subset D$,因 $x\in A$ 但 $x\notin D$,即 A 甚至不是D 的一个子集.

1.38 在(a)B, C;(b)B, E 之间插入正确的符号$\subset$或$\not\subset$.

解 ☞ (a)$B\subset C$,因 B 是 C 的一个子集,但 $B\neq C$.

(b)$B\not\subset E$.虽然 B 是E 的一个子集,但我们尚有 $B=E$.

1.39 求包含所有这些集合作为其子集的最小集合 X.

解 ☞ 令 X 是由这些集合的所有元素(不重复)组成,因此 $X=\{v,w,x,y,z\}$.

1.40 求含于所有这些集合之中的最大集合 Y.

解 ☞ 令 Y 是由所有这些集合的公共元素组成,因此 $Y=\{z\}$.

1.41 设 $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{2,3,4\}$, $Z=\{2\}$.求最大集合 W,使所有下列陈述是正确的:

$$W\nsubseteq X,\qquad W\subseteq Y,\qquad Z\nsubseteq W.$$

解 ☞ 由于 $W\subseteq Y$,因此只有 2,3 和 4 可能属于 W.由于 $Z\nsubseteq W$,因此元素 2 不属于 W.因此 $W=\{3,4\}$满足所要求的条件.集合$\{4\}$也满足所要求的条件,但它不是最大的集合.

1.42 指出包含集合:

$$\{狗,猫\},\quad \{鱼,猫,雪貂\},\quad \{狗,雪貂\}$$

的最小集合 X.

解 ☞ 令 X 由这些集合的所有元素组成：

$$X = \{狗,猫,鱼,雪貂\}.$$

1.43 设 $X=\{1,2,3\}$，$Z=\{1,2,3,4,5\}$．求所有可能的集合 Y 使得 $X\subset Y$ 且 $Y\subset Z$，即 X 是 Y 的真子集，Y 是 Z 的真子集．

解 ☞ Y 必须由 X 的元素 1,2,3 以及 Z 的至少一个其他元素 4 或 5 组成．因此 $Y=\{1,2,3,4\}$ 或 $Y=\{1,2,3,5\}$．注意，因 Y 是 Z 的一个真子集，因此 Y 不能同时含有 4 和 5．

1.44 设 A,B,C 是非空集合使得 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，且 $C\subseteq A$．你能对这些集合导出什么结论？

解 ☞ 由于 $B\subseteq C$，$C\subseteq A$，我们有 $B\subseteq A$．再由 $A\subseteq B$ 得到 $A=B$．同理，$B=C$．因此这 3 个集合是相等的．

习题 1.45～1.50 考虑一个未知集合 X 和下列 5 个集合：

$$A=\{1,2,3,4\},\quad B=\{2,3,4,5,6,7\},\quad C=\{3,4\},\quad D=\{4,5,6\},\quad E=\{3\}.$$

1.45 若 $X\subseteq A$ 且 $X\subseteq B$，则这 5 个集合中哪些集合能等于 X？

解 ☞ X 可以等于 C 或 E．注意 B 和 D 不是 A 的子集，以及 A 不是 B 的子集．

1.46 若 $X\not\subseteq D$ 且 $X\subseteq C$，则这 5 个集合中哪些集合能等于 X？

解 ☞ X 能够等于 C 或 E．注意，A,B 和 D 都不是 C 的子集，并且 C 是自身的一个子集．

1.47 若 $X\not\subseteq D$ 且 $X\not\subseteq B$，则这 5 个集合中哪些集合能等于 X？

解 ☞ X 能等于 A．注意 B,C,D 和 E 是 B 的子集．

1.48 若 $X\not\subseteq E$ 且 $X\subseteq B$，则这 5 个集合中哪些能等于 X？

解 ☞ X 能等于 B,C 或 D．A 不是 B 的一个子集，E 是自身的一个子集．

1.49 求包含所有 5 个集合的最小集合 M．

解 ☞ M 由这 5 个集合的所有元素组成，因此 $M=\{1,2,3,4,5,6,7\}$．

1.50 求最大集合 N，使它是这 5 个集合的子集．

解 ☞ N 由这 5 个集合的共同元素组成．不存在这样的元素，因此 $N=\varnothing$，它是空集．

1.51 任何一个集合都有一个真子集吗？

解 ☞ 空集没有一个真子集．其他任何一个集合都有 $\varnothing$ 作为它的一个真子集．有些教科书不称空集是一个真子集，在这种情况下，只含一个元素的集合没有真子集．

1.52 证明：若 A 是空集的一个子集，则 $A=\varnothing$．

证 ☞ 空集是任一集合的一个子集，具体地说，$\varnothing\subseteq A$．据假设，$A\subseteq\varnothing$．这两个条件意味着 $A=\varnothing$．

1.53 设 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，以及 $a\in A$，$b\in B$，$c\in C$．下面的陈述：(1) $a\in C$，(2) $b\in A$，(3) $c\notin A$，哪些是正确的？

解 ☞ (1)据定理 1.1，A 是 C 的一个子集．因此 $a\in A$ 蕴含 $a\in C$，因而这个陈述总是正确的．

(2)由于元素 $b\in B$ 无需是 A 的元素，因此该陈述可能是错的．

(3)元素 $c\in C$ 可能是 A 的元素，因此 $c\notin A$ 未必是对的．

1.54 设 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，以及设 $d\notin A$，$e\notin B$，$f\notin C$．下面的陈述：(1) $d\in B$，(2) $e\notin A$，(3) $f\notin A$，哪些是正确的？

解 ☞ (1)不在 A 中的元素 d 无需在 B 中，因此该陈述可能不对．

(2)由于 $e\notin B$ 且 $A\subseteq B$，因此 $e\notin A$ 总是对的．

(3)由于 $f\notin C$ 且 $A\subseteq C$，因此 $f\notin A$ 总是正确的．

可比较、不可比较和不相交的集合，文图

1.55 定义：(a)可比较和不可比较的集合，(b)不相交(分离)的集合．

解 ☞ (a)设 A 和 B 是两个集合.若 $A\subseteq B$ 或 $B\subseteq A$,则 A 和 B 是可比较的;若 $A\nsubseteq B$ 且 $B\nsubseteq A$,则 A 和 B 是不可比较的.
(b)若集合 A 和集合 B 没有共同的元素,即 A 没有元素属于 B 且 B 没有元素属于 A,则 A 和 B 是不相交(分离)的.

1.56 考虑下列集合:

$$A = \{1,2\}, \quad B = \{1,2,3,4\}, \quad C = \{1,5\}, \quad D = \{3,4,5\}, \quad E = \{4,5\}.$$

上面的集合中哪些是可比较的?

解 ☞ 因 $A\subseteq B$,因此 A 和 B 是可比较的,因 $E\subseteq D$,因而 D 和 E 是可比较的.其他任何一对不同的集合都是不可比较的.

1.57 习题 1.56 中,哪些集合是不相交的?

解 ☞ 集合 A 和 D 以及集合 A 和 E 是不相交的.其他任何一对集合有一个或更多个公共元素.

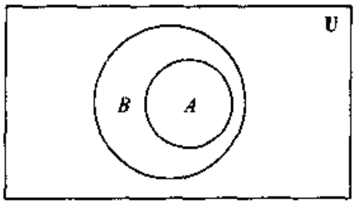
1.58 叙述哪些集合与集合:空集($\varnothing$),全集(**U**)可比较?

解 ☞ 任何一个集合 A 都和 $\varnothing$ 可比较,因为 $\varnothing\subseteq A$;任何一个集合 A 都和 **U** 可比较,因 $A\subseteq$ **U**.

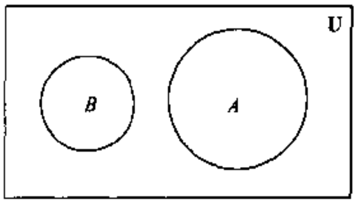
1.59 描述集合的一个文图.

解 ☞ 文(venn)图是用平面上的点集来表示集合的一种图形表示.我们用一个矩形内部表示全集 **U**,用该矩形内的圆盘表示其他的集合.若 $A\subseteq B$,则表示 A 的圆盘将整个在表示 B 的圆盘内,如图 1-1(a).若 A 与 B 是分离的(disjoint),即没有公共元素,则表示 A 的圆盘与表示 B 的圆盘离开,如图 1-1(b).

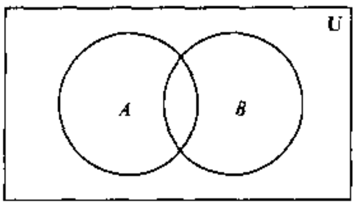
但是,假设 A 和 B 是任意的两个集合,则有可能某些对象在 A 中但不在 B 中,有些在 B 中但不在 A 中,有些同时在 A 和 B 中,有些既不在 A 中又不在 B 中,因此,一般地我们表示 A 和 B 如图 1-1(c).



(a) $A\subseteq B$



(b) A 与 B 是分离的



(c)

图 1-1

1.60 画出集合 A,B,C 的一个文图,此处 A 和 B 有共同元素,B 和 C 有共同元素,但 A 和 C 不相交.

解 ☞ 见图 1-2(a).

1.61 画出集合 A,B,C 的一个文图,此处 $A\subseteq B$,集合 A 和 C 不相交,但 B 和 C 有公共元素.

解 ☞ 见图 1-2(b).

1.62 画出集合 A,B,C 的一个文图,此处 $A\subseteq B$,集合 B 和 C 不相交,但 A 和 C 有公共元

素.

解 ☞ 不存在这样的文图.若 A 和 C 有公共元素,比方说 x,且 $A\subseteq B$,则 x 也必属于 B.这样,B 和 C 也必有公共元素.

1.63　画出集合 A,B,C 的一个文图,此处三个集合互不相交.

解 ☞ 见图 1-2(c).

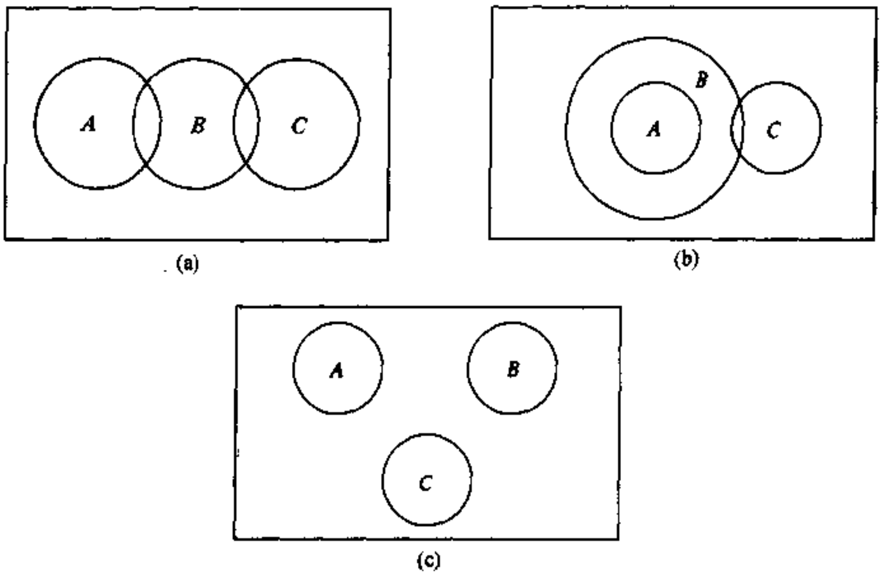


图 1-2

1.64　画出任意的三个集合 A,B,C 的一个文图,使得它们将全集 U 分成 $2^3=8$ 个区域.为什么有 8 个区域?

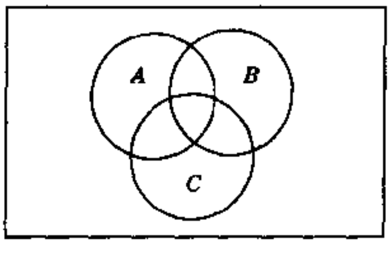


图 1-3

解 ☞ 见图 1-3.由于可能有元素:

(1) 在 A,B 和 C 中;
(2) 在 A 和 B 中,但不在 C 中;
(3) 在 A 和 C 中,但不在 B 中;
(4) 在 B 和 C 中,但不在 A 中;
(5) 仅仅在 A 中;
(6) 仅仅在 B 中;
(7) 仅仅在 C 中;
(8) 不在 A,B,C 中,

因此有 8 个区域.换句话说,对于每个给定的集合 X,U 的每个元素 x 有两种选择,即属于 X 或不属于 X.因此对于 3 个给定的集合有 $2^3=8$ 种可能性.

1.65　考虑 4 个集合 A_1,A_2,A_3,A_4 的一个一般的文图.它可将全集 U 分成多少个区域?

解 ☞ 全集 U 将被分成 $2^4=16$ 个区域.

1.3 集合运算

1.66　定义集合运算:(a)并;(b)交.

解 ☞ (a)两个集合 A 和 B 的并,用 $A\cup B$ 表示,它是由属于 A 或者属于 B 的所有元素构成的集合:

$$A\cup B=\{x : x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

这里"或"的含义是与(或).

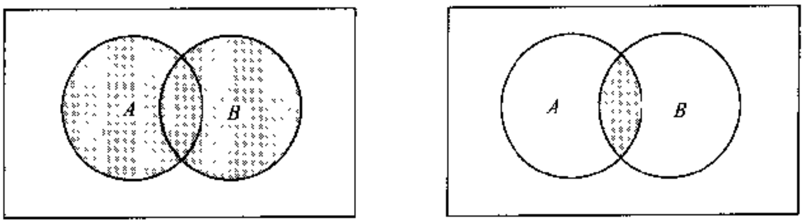
(b)两个集合 A 和 B 的**交**.用 $A\cap B$ 表示,它是既属于 A 又属于 B 的所有元素组成的集合:

$$A\cap B=\{x:x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

(注意,$A\cap B=\varnothing$ 意指 A 和 B 没有任何公共元素,即 A 与 B 是不相交的.)

1.67 应用集合 A 和 B 的文图,使阴影(shaded)区域表示:(a)$A\cup B$;(b)$A\cap B$.

解 ☞ (a)见图 1-4(a). (b)见图 1-4(b).



(a) $A\cup B$ 为阴影部分　　(b) $A\cap B$ 为阴影部分

图 1-4

1.68 定义集合运算:(a)一个集合的绝对补集,或简单地,补集;(b)两个集合的相对补集或差集.

解 ☞ (a)我们知道,在一个特定时刻里,所考虑的所有集合都是一个固定的全集 **U** 的子集.一个集合 A 的**绝对补集**,或简单地,补,用 A^c 表示,它是由属于全集 **U** 但不属于 A 的所有元素构成的集合:

$$A^c=\{x:x\in \mathbf{U},x\notin A\}.$$

有些教科书用 A' 或 $\overline{A}$ 表示 A 的补.

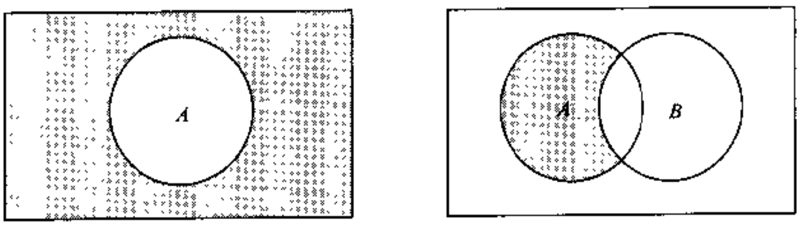
(b)一个集合 B 关于集合 A 的**相对补集**,或简单地,A 和 B 的**差**,用 $A\setminus B$ 表示,它是由属于 A 而不属于 B 的元素构成的集合:

$$A\setminus B=\{x:x\in A,x\notin B\}.$$

集合 $A\setminus B$ 读作"A 减 B".许多教科书用 $A-B$ 或 $A\sim B$ 表示 $A\setminus B$.

1.69 应用文图,使阴影(shaded)区域表示:(a)A^c 和(b)$A\setminus B$.

解 ☞ (a)见图 1-5(a);(b)见图 1-5(b).



(a) A^c 为阴影部分　　(b) $A\setminus B$ 为阴影部分

图 1-5

习题 1.70~1.78 考虑下列集合:

$$\mathbf{U}=\{1,2,3,\cdots,8,9\},\quad A=\{1,2,3,4\},\quad B=\{2,4,6,8\},\quad C=\{3,4,5,6\}.$$

1.70 求(a)$A\cup B$,(b)$A\cup C$,(c)$B\cup C$,(d)$B\cup B$.

解 ☞ 为了形成 A 和 B 的并,我们把 A 和 B 的所有元素放在一起.因此

$$A\cup B=\{1,2,3,4,6,8\}.$$

同理

$$A\cup C=\{1,2,3,4,5,6\},$$
$$B\cup C=\{2,4,6,8,3,5\},$$
$$B\cup B=\{2,4,6,8\}.$$

注意，$B\cup B$ 恰是 B.

1.71 求(a)$(A\cup B)\cup C$ 和(b)$A\cup(B\cup C)$.

解 ☞ (a)我们先求得$(A\cup B)=\{1,2,3,4,6,8\}$.因此$(A\cup B)$和 C 的并是

$$(A\cup B)\cup C=\{1,2,3,4,6,8,5\}.$$

(b)我们先求得$(B\cup C)=\{2,4,6,8,3,5\}$.因此 A 和$(B\cup C)$的并是

$$A\cup(B\cup C)=\{1,2,3,4,6,8,5\},$$

注意到，$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

1.72 求(a)$A\cap B$,(b)$A\cap C$,(c)$B\cap C$,(d)$B\cap B$.

解 ☞ 为了形成 A 和 B 的交，我们列出 A 和 B 的所有公共元素.于是 $A\cap B=\{2,4\}$.类似地，$A\cap C=\{3,4\}$,$B\cap C=\{4,6\}$,$B\cap B=\{2,4,6,8\}$.注意到，$B\cap B$ 其实就是 B.

1.73 求(a)$(A\cap B)\cap C$ 和(b)$A\cap(B\cap C)$.

解 ☞ (a)$A\cap B=\{2,4\}$,因此$\{2,4\}$和 C 的交是

$$(A\cap B)\cap C=\{4\}.$$

(b)$B\cap C=\{4,6\}$.这个集合和 A 的交是

$$A\cap(B\cap C)=\{4\}.$$

注意到，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

1.74 求(a)A^c,(b)B^c,(c)C^c.

解 ☞ 集合 X^c 是由全集 **U** 中不属于 X 的元素组成.因此

(a)$A^c=\{5,6,7,8,9\}$,(b)$B^c=\{1,3,5,7,9\}$,(c)$C^c=\{1,2,7,8,9\}$.

1.75 求(a)$A\setminus B$,(b)$C\setminus A$,(c)$B\setminus C$,(d)$B\setminus A$,(e)$B\setminus B$.

解 ☞ (a) 集合 $A\setminus B$ 是由 A 中不属于 B 的元素组成.由于 $A=\{1,2,3,4\}$,且 $2,4\in B$,因此 $A\setminus B=\{1,3\}$.

(b) C 中只有元素 5 和 6 不在 A 中，因此 $C\setminus A=\{5,6\}$.

(c) $B\setminus C=\{2,8\}$.

(d) $B\setminus A=\{6,8\}$.

(e) $B\setminus B=\varnothing$.

1.76 求(a)$A\cap(B\cup C)$和$(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

解 ☞ (a)首先求得 $B\cup C=\{2,3,4,5,6,8\}$,因此

$$A\cap(B\cup C)=\{2,3,4\}.$$

(b)首先求得 $A\cap B=\{2,4\}$和 $A\cap C=\{3,4\}$,因此

$$(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{2,3,4\}.$$

注意到，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

1.77 求(a)$(A\cup B)^c$ 和(b)$A^c\cap B^c$.

解 ☞ (a)首先求得$(A\cup B)=\{1,2,3,4,6,8\}$,因此

$$(A\cup B)^c=\{5,7,9\}.$$

(b)由于 $A^c=\{5,6,7,8,9\}$,$B^c=\{1,3,5,7,9\}$,因此我们有

$$A^c\cap B^c=\{5,7,9\}.$$

注意到，$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

1.78 求(a)$(A\cap B)\setminus C$ 和(b)$(A\setminus B)^c$.

解 ☞ (a)$A\cap B=\{2,4\}$,注意到 $4\in C$,但 $2\notin C$,因此$(A\cap B)\setminus C=\{2\}$.

(b)$A\setminus B=\{1,3\}$,因此$(A\setminus B)^c=\{2,4,5,6,7,8,9\}$.

1.79 证明：$(A\cap B)\subseteq A\subseteq(A\cup B)$以及$(A\cap B)\subseteq B\subseteq(A\cup B)$.

证 ☞ 由于 $A\cap B$ 的每一个元素同时在 A 和 B 中，从而若 $x\in(A\cap B)$,则 $x\in A$,因此$(A\cap B)\subseteq A$.而且，若 $x\in A$,则 $x\in(A\cup B)$(由 $A\cup B$ 的定义),因此 $A\subseteq(A\cup B)$.合并这两个结果得到

$(A\cap B)\subseteq A\subseteq(A\cup B)$. 同理, $(A\cap B)\subseteq B\subseteq(A\cup B)$.

定理 1.2　下列关系式是等价的:

$$A\subseteq B,\qquad A\cap B=A,\qquad A\cup B=B.$$

1.80　证明定理 1.2.

证　☞ 假设 $A\subseteq B$, 且令 $x\in A$, 则 $x\in B$, 因此 $x\in A\cap B$ 且 $A\subseteq A\cap B$. 根据习题 1.79, $(A\cap B)\subseteq A$, 故 $A\cap B=A$. 另一方面, 假设 $A\cap B=A$, 且令 $x\in A$, 则 $x\in A\cap B$, 因此 $x\in A$ 且 $x\in B$, 故 $A\subseteq B$. 这两个结论表明 $A\subseteq B$ 同 $A\cap B=A$ 等价.

再假设 $A\subseteq B$. 令 $x\in(A\cup B)$, 则 $x\in A$ 或 $x\in B$. 若 $x\in A$, 则因 $A\subseteq B$ 有 $x\in B$. 在另一情况下, $x\in B$. 因此 $A\cup B\subseteq B$. 根据习题 1.79, $B\subseteq A\cup B$, 故 $A\cup B=B$. 现假设 $A\cup B=B$, 且令 $x\in A$, 则由集合并的定义, $x\in A\cup B$. 因此 $x\in B=A\cup B$. 于是 $A\subseteq B$. 这两个结论表明, $A\subseteq B$ 同 $A\cup B=B$ 等价. 这样, $A\subseteq B$, $A\cap B=A$ 和 $A\cup B=B$ 是等价的.

习题 1.81～1.88 考虑下列集合:

$$A=\{M,W,F,S\},\qquad B=\{S,SU\},$$
$$C=\{M,T,W,TH,F\},\qquad D=\{W,TH,F,S\},$$

此处 $\mathbf{U}=\{M$(星期一), T(星期二), W(星期三), TH(星期四), F(星期五), S(星期六), SU(星期天)$\}$.

1.81　用文字叙述集合 B 和 C.

解　☞ 集合 B 由星期六和星期天组成, 集合 C 由除星期六和星期天外的星期一到星期五组成.

1.82　求集合: (a) $A\cup B$, (b) $A\cup C$, (c) $B\cup C$, (d) $B\cup D$.

解　☞ 并集 $X\cup Y$ 由或是在 X, 或是在 Y(或是在二者)中的那些元素组成. 因此

(a) $A\cup B=\{M,W,F,S,SU\}$;

(b) $A\cup C=\{M,T,W,TH,F,S\}$;

(c) $B\cup C=\{M,T,W,TH,F,S,SU\}=\mathbf{U}$;

(d) $B\cup D=\{W,TH,F,S,SU\}$.

1.83　求集合: (a) $A\cap B$, (b) $A\cap C$, (c) $B\cap C$, (d) $B\cap D$.

解　☞ 交集 $X\cap Y$ 是由 X 和 Y 的公共元素组成. 因此

(a) $A\cap B=\{S\}$;

(b) $A\cap C=\{M,W,F\}$;

(c) $B\cap C=\varnothing$;

(d) $B\cap D=\{S\}$.

1.84　求: (a) A^c, (b) B^c, (c) C^c (d) D^c.

解　☞ 补集 X^c 是由 $\mathbf{U}$ 的不在 X 的元素组成. 这样

(a) $A^c=\{T,TH,SU\}$;

(b) $B^c=\{M,T,W,TH,F\}=C$;

(c) $C^c=\{S,SU\}=B$;

(d) $D^c=\{M,T,SU\}$.

1.85　求集合: (a) $\mathbf{U}\setminus A$, (b) $A\setminus C$, (c) $C\setminus B$, (d) $D\setminus A$.

解　☞ 相对补集 $X\setminus Y$ 是由 X 的不属于 Y 的元素组成. 这样

(a) $\mathbf{U}/A=\{T,TH,SU\}=A^c$;

(b) $A\setminus C=\{S\}$;

(c) $C\setminus B=\{M,T,W,TH,F\}=C$;

(d) $D\setminus A=\{TH\}$.

1.86　求 (a) $(A\cup D)^c$, (b) $(A\setminus B)^c$.

解　☞ (a) 先求得 $A\cup D=\{M,W,TH,F,S\}$, 因此

$$(A \cup D)^c = \{T, SU\}.$$

(b)这里 $A \setminus B = \{M, W, F\}$，因此

$$(A \setminus B)^c = \{T, TH, S, SU\}.$$

1.87 求(a)$(A \cup B) \setminus D$，(b)$(A \cap C) \setminus D$.

解 ☞ (a)首先求得 $A \cup B = \{M, W, F, S, SU\}$，然后删去 D 的元素得到

$$(A \cup B) \setminus D = \{M, SU\}.$$

(b)首先求得 $A \cap C = \{M, W, F\}$，因此

$$(A \cap C) \setminus D = \{M\}.$$

1.88 求(a)$(A \setminus B) \cap D$，(b)$(C \cap D) \setminus A$.

解 ☞ (a)首先求得 $A \setminus B = \{M, W, F\}$，因此

$$(A \setminus B) \cap D = \{W, F\}.$$

(b)首先求得 $C \cap D = \{W, TH, F\}$，因此

$$(C \cap D) \setminus A = \{TH\}.$$

1.89 说明：由 $A \cap B = A \cap C$ 未必有 $B = C$.

解 ☞ 设 $A = \{1,2\}$，$B = \{2,3\}$，$C = \{2,4\}$，则 $A \cap B = \{2\}$，$A \cap C = \{2\}$，因此 $A \cap B = A \cap C$，但是 $B \neq C$.

1.90 说明：由 $A \cup B = A \cup C$ 未必有 $B = C$.

解 ☞ 设 $A = \{1,2\}$，$B = \{1,3\}$，$C = \{1,2\}$，则 $A \cup B = A \cup C = \{1,2,3\}$，但 $B \neq C$.

习题 1.91～1.94 考虑下列集合：

A = {上衣，帽子，雨伞}，

B = {长统靴，上衣，手套，领带}，

C = {卫生衣，帽子，手套，领带}，

D = {上衣，长统靴}.

1.91 求(a)$A \cup B$，(b)$B \cap C$.

解 ☞ (a)A 和 B 的元素合在一起，得到

$A \cup B$ = {长统靴，上衣，帽子，手套，领带，雨伞}.

(b)取 B 和 C 的公共元素得

$B \cap C$ = {手套，领带}.

1.92 求(a)$C \setminus B$，(b)A^c.

解 ☞ (a)将 C 中的也属于 B 的元素删除得到

$C \setminus B$ = {卫生衣，帽子}.

(b)由于没有给出全集 U，因此不能指出 A^c，除非说 A^c 是由除"上衣"，"帽子"和"雨伞"外的所有元素组成.

1.93 求$(A \cup C) \cap (B \setminus C)$.

解 ☞ 首先求得

$A \cup C$ = {上衣，帽子，雨伞，卫生衣，手套，领带}

以及

$B \setminus C$ = {长统靴，上衣}.

因此$(A \cup C) \cap (B \setminus C)$ = {上衣}.

1.94 求 $B \setminus (A \cap D)$.

解 ☞ 首先求得 $A \cap D$ = {上衣}，因此

$B \setminus (A \cap D)$ = {长统靴，手套，领带}.

习题 1.95～1.102 考虑下列集合：

X = {红色，蓝色}，

$Y=$ {蓝色,绿色,橙色},

$Z=$ {红色,蓝色,白色},

$\mathbf{U}=$ {红色,黄色,蓝色,绿色,橙色,紫色,黑色,白色}.

1.95 用文字描述全集 $\mathbf{U}$.

解 ☞ $\mathbf{U}$ 由五颜六色以及黑色和白色一起组成.

1.96 求(a)$X\cup Y$,(b)$X\cup Z$.

解 ☞ (a)列出 X 和 Y 的元素得到 $X\cup Y$,因此 $X\cup Y=$ {红色,蓝色,绿色,橙色}.

(b)同理,$X\cup Z=$ {红色,蓝色,白色}.(由 $X\subseteq Z$,我们有 $X\cup Z=Z$(定理 1.2).)

1.97 求(a)$X\cap Y$,(b)$X\cap Z$.

解 ☞ (a)列出 X 和 Y 的共同元素得到 $X\cap Y$,因此 $X\cap Y=$ {蓝色}.

(b)同理,$X\cap Z=$ {红色,蓝色}.(由 $X\subseteq Z$,我们有 $X\cap Z=X$(定理 1.2).)

1.98 求(a)X^c,(b)Y^c,(c)Z^c.

解 ☞ (a)列出 U 中的不属于 X 的元素得到 X^c.因此

$X^c=$ {黄色,绿色,橙色,紫色,黑色,白色}.

(b)同理

$Y^c=$ {红色,黄色,紫色,黑色,白色}.

(c)

$Z^c=$ {黄色,绿色,橙色,紫色,黑色}.

(由 $X\subseteq Z$,我们有 $Z^c\subseteq X^c$.)

1.99 求(a)$X\setminus Y$,(b)$X\setminus Z$.

解 ☞ (a)列出 X 中的不属于 Y 的元素得到 $X\setminus Y$,因此 $X\setminus Y=$ {红色}.

(b)由 $X\subseteq Z$,我们有 $X\setminus Z=\varnothing$.

1.100 求(a)$(X\cup Y)^c$,(b)$Y^c\setminus Z$.

解 ☞ (a)$X\cup Y=$ {红色,蓝色,绿色,橙色},因此

$(X\cup Y)^c=$ {黄色,紫色,黑色,白色}.

(b)列出 Y^c(习题 1.98)中的不属于 Z 的元素得到

$Y^c\setminus Z=$ {黄色,紫色,黑色}.

1.101 求(a)$X\cup Y\cup Z$,(b)$X\cap Y\cap Z$.

解 ☞ (a)列出出现在每一集合的元素得到

$X\cup Y\cup Z=$ {红色,蓝色,绿色,橙色,白色}.

(b)列出属于所有 3 个集合的元素得到

$X\cap Y\cap Z=$ {蓝色}.

(由 $X\subseteq Z$,我们有 $X\cup Y\cup Z=Y\cup Z$ 且 $X\cap Y\cap Z=Y\cap Z$.)

1.102 求(a)$Y\cap Z^c$,(b)$X\cap Z^c$.

解 ☞ (a)列出 Y 和 Z^c(习题 1.98)的共同元素得到 $Y\cap Z^c=$ {绿色,橙色}.

(b)由 $X\subseteq Z$,我们有 $X\cap Z^c=\varnothing$.

1.103 判定下列各个集合是否等于 A,空集$\varnothing$或全集 $\mathbf{U}$:

(a)$A\cup A$; (b)$A\cup\mathbf{U}$; (c)$A\cup\varnothing$; (d)$A\cup A^c$.

解 ☞ (a)$A\cup A=A$,(b)$A\cup\mathbf{U}=\mathbf{U}$,(c)$A\cup\varnothing=A$,(d)$A\cup A^c=\mathbf{U}$.

1.104 判定下列各个集合是否等于 A,空集$\varnothing$或全集 $\mathbf{U}$:

(a)$A\cap A$; (b)$A\cap\mathbf{U}$; (c)$A\cap\varnothing$; (d)$A\cap A^c$.

解 ☞ (a)$A\cap A=A$,(b)$A\cap\mathbf{U}=A$,(c)$A\cap\varnothing=\varnothing$,(d)$A\cap A^c=\varnothing$.

1.105 判定下列各个集合是否等于 A,空集$\varnothing$或全集 $\mathbf{U}$:

(a)$A \setminus A$；　(b)$A \setminus \mathbf{U}$；　(c)$=A \setminus \varnothing$；　(d)$A \setminus A^c$；　(e)$(A^c)^c$.

解 ☞ (a)$A \setminus A=\varnothing$,(b)$A \setminus \mathbf{U}=\varnothing$,(c)$A \setminus \varnothing=A$,(d)$A \setminus A^c=A$,(e)$(A^c)^c=A$.

1.106　证明 $A \setminus B=A \cap B^c$,这里用交和补来定义差运算.

证 ☞ $A \setminus B=\{x:x\in A, x\notin B\}=\{x:x\in A, x\in B^c\}=A\cap B^c$.

1.107　证明:(a)$A \setminus B$ 和 B 是不相交的;(b)$A\cup B=(A \setminus B)\cup B$.

证 ☞ (a)设 $x\in A \setminus B$ 且 $x\in B$,则第一个条件意指 $x\in A$ 且 $x\notin B$.但是 $x\in B$ 且 $x\notin B$ 是不可能的.因此没有这样的 x 存在,就是说$(A \setminus B)\cap B=\varnothing$.这正是我们要证明的结论.

(b)应用表 1-1 中的性质,我们有

$$(A \setminus B)\cup B=(A\cap B^c)\cup B=(A\cup B)\cap(B^c\cup B)$$
$$=(A\cup B)\cap \mathbf{U}=A\cup B.$$

1.108　确定下列哪些关系等价于 $A\subseteq B$:

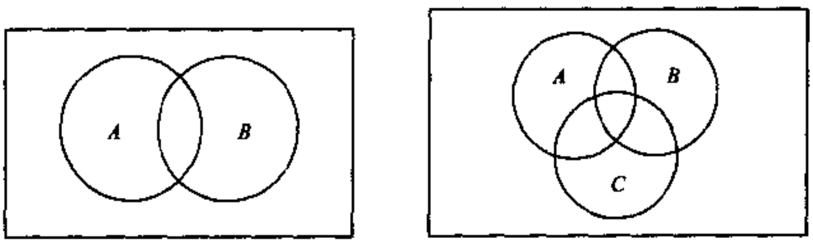
(a)$A\cap B^c=\varnothing$；　(b)$A^c\cup B=\mathbf{U}$；　(c)$B^c\subseteq A^c$；　(d)$A \setminus B=\varnothing$.

(同定理 1.2 比较.)

解 ☞ 它们都等价于 $A\subseteq B$.

1.4　文图和集合运算、基本积

这一节考察集合 A 和 B 的文图以及集合 A,B 和 C 的文图分别如图 1-6(a)和(b)所表示.

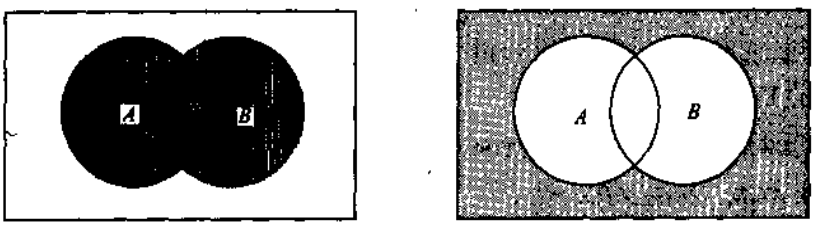


(a) 集合 A 和 B　　(b) 集合 A, B, 和 C

图 1-6

1.109　在图 1-6(a)的文图中,画出表示$(A\cup B)^c$ 的阴影(shaded)区域.

解 ☞ 首先按一个方向一笔一画地将 $A\cup B$ 画成阴影,如图 1-7(a)所示.因此$(A\cup B)^c$ 是 $A\cup B$外面如图 1-7(b)画的阴影区域.



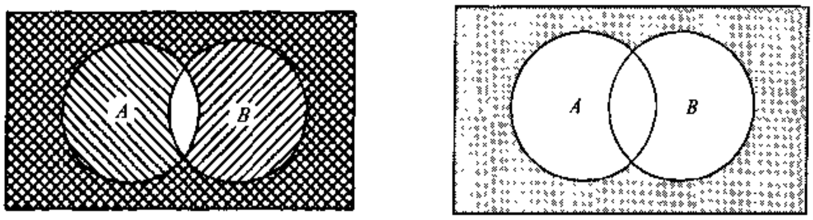
(a) $A\cup B$为阴影部分　　(b) $(A\cup B)^c$为阴影部分

图 1-7

1.110　在图 1-6(a)的文图中,画出表示 $A^c\cap B^c$ 的阴影区域.

解 ☞ 首先一笔一画向上斜画到右边使 A 的外部区域成阴影(///),然后一笔一画向下斜画到右边使 B^c 成阴影(\\\),如图 1-8(a).于是 $A^c\cap B^c$ 是图 1-8(b)中用交叉线画成的阴影区域.(从这个习题和习题 1.109 看到,$A^c\cap B^c$ 和$(A\cup B)^c$ 表示相同区域,因此$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.集合的

这种性质称为德·摩根(De Morgan)定律.)



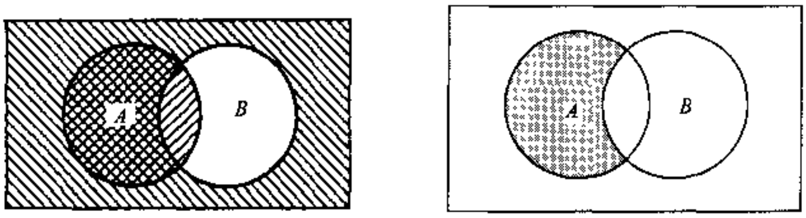
(a) /// 所示阴影部分为 A^c
\\\ 所示阴影部分为 B^c

(b) $A^c\cap B^c$ 为阴影部分

图 1-8

1.111 在图 1-6(a)的文图中,把集合 $A\cap B^c$ 画成阴影.

解 ☞ 首先按一个方向一笔一画地把 A 画成阴影(///),然后按另一个方向一笔一画地把 B 的外部区域 B^c 画成阴影(\\\),如图 1-9(a)所示.图 1-9(b)中交叉线画成的阴影区域是交集 $A\cap B^c$.(我们看到 $A\cap B^c=A\setminus B$.同习题 1.106 比较.)



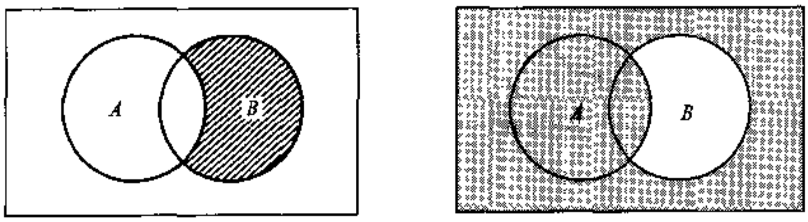
(a) A 和 B^c 为阴影部分

(b) $A\cap B^c$ 为阴影部分

图 1-9

1.112 在图 1-6(a)的文图中,将集合 $(B\setminus A)^c$ 画成阴影.

解 ☞ 将 B 的不在 A 中的区域 $B\setminus A$ 画成阴影,如图 1-10(a)所示.于是 $(B\setminus A)^c$ 是 $B\setminus A$ 的外部区域,如图 1-10(b)所示.



(a) $B\setminus A$ 为阴影部分

(b) $(B\setminus A)^c$ 为阴影部分

图 1-10

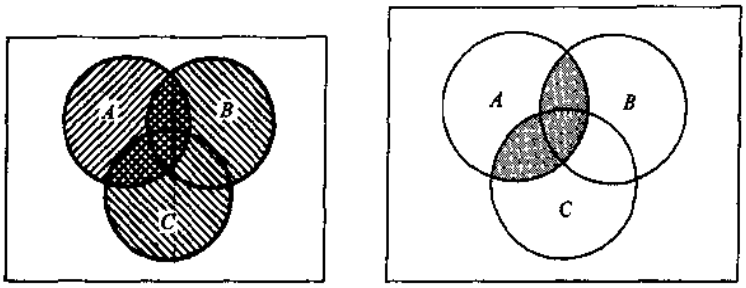
1.113 在图 1-6(b)的文图中,将集合 $A\cap(B\cup C)$ 画成阴影.

解 ☞ 用向上斜线(///)将 A 画成阴影以及向下斜线(\\\)将 $B\cup C$ 画成阴影,如图 1-11(a)所示,于是图 1-11(b)所示的交叉阴影区域是交集 $A\cap(B\cup C)$.

1.114 将集合 $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ 画成阴影.

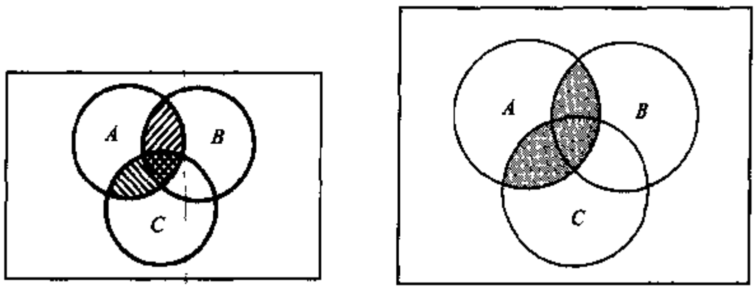
解 ☞ 用向上斜线(///)将 $A\cap B$ 画成阴影以及向下斜线(\\\)将 $B\cap C$ 画成阴影,如图 1-12(a)所示.因此,如图 1-12(b)所示的总阴影区域是并集 $(A\cap B)\cup(A\cap C)$.(从图 1-11(b)和图 1-12(b)看出,$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.这就是说,关于集合的交运算、并运算满足分配律.)

1.115 将集合 $A\cup(B\cap C)$ 画成阴影.



(a) A 和 $B\cup C$ 为阴影部分　　(b) $A\cap(B\cup C)$ 为阴影部分

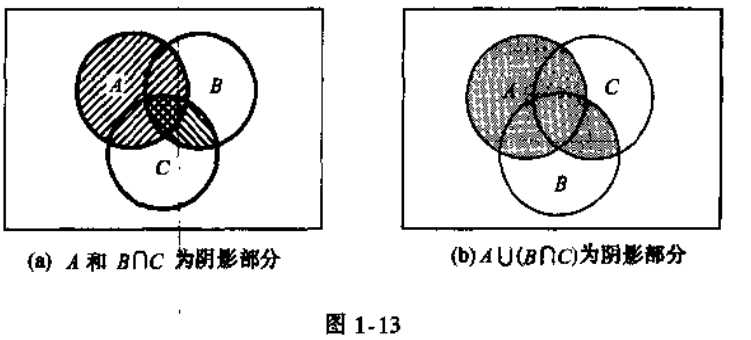
图 1-11



(a) $A\cap B$ 和 $A\cap C$ 为阴影部分　　(b) $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ 为阴影部分

图 1-12

解 ☞ 用向上斜线(///)将 A 画成阴影以及向下斜线(\\\\\\)将 $B\cap C$ 画成阴影，如图 1-13(a)所示．因此，如图 1-13(b)所示的总的阴影区域是并 $A\cup(B\cap C)$．



(a) A 和 $B\cap C$ 为阴影部分　　(b) $A\cup(B\cap C)$ 为阴影部分

图 1-13

1.116　将集合 $(A\cup B)\cap(A\cup C)$ 画成阴影．

解 ☞ 用向上斜线(///)将 $A\cup B$ 画成阴影以及用向下斜线(\\\\\\)将 $A\cup C$ 画成阴影，如图 1-14(a)所示．因此，如图 1-14(b)所示的交叉阴影区域是交 $(A\cup B)\cap(A\cup C)$．(从图 1-13(b)和图 1-14(b)看到，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，就是说，关于集合的并运算、交运算满足分配律．)

1.117　将集合 $A^c\cup B\cup C$ 画成阴影．

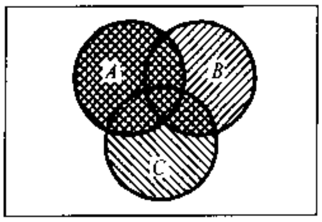
解 ☞ 将 A 的外部区域 A^c 以及 $B\cup C$ 画成阴影．图 1-15(a)中总的阴影区域是并 $A^c\cup B\cup C$．

1.118　将集合 $A^c\cap(B\setminus C)$ 画成阴影．

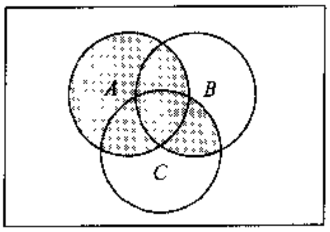
解 ☞ 按一个方向一笔一画地将 A 的外部区域 A^c 画成阴影，以及按另一方向一笔一画地将 $B\setminus C$ 画成阴影．交叉阴影区域是交 $A^c\cap(B\setminus C)$，如图 1-15(b)所表示的阴影．

1.119　将集合 $A\cap B^c\cap C^c$ 画成阴影．

解 ☞ 见图 1-15(c)，在 A 中但在 B 和 C 的外部阴影区域是所要求的结果．

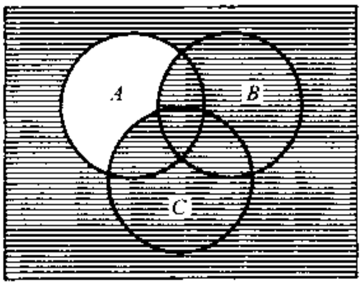


(a) $A\cup B$ 和 $A\cup C$ 为阴影部分

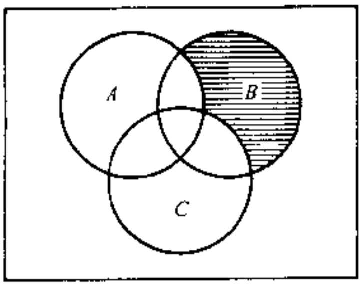


(b) $(A\cup B)\cap(A\cup C)$ 为阴影部分

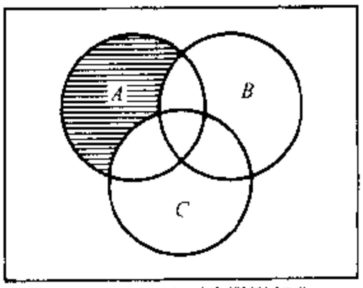
图 1-14



(a) $A^c\cup B\cup C$ 为阴影部分



(b) $A^c\cap(B\setminus C)$ 为阴影部分



(c) $A^c\cap B^c\cap C^c$ 为阴影部分

图 1-15

1.120 将集合 $A\cap B\cap C^c$ 画成阴影.

解 ☞ 画出 A 和 B 中但在 C 之外的阴影区域如图 1-16(a)所示.

1.121 将集合 $A^c\cap(B\cup C)$画成阴影.

解 ☞ 按一个方向一笔一画地将 A 的外部区域 A^c 画成阴影,以及按另一方向将 $B\cup C$ 画成阴影.交叉阴影区域是交 $A^c\cap(B\cup C)$,如图 1-16(b)所示的阴影.

1.122 将集合 $A\cup(B\setminus C)$画成阴影.

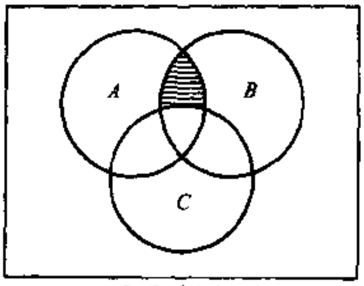
解 ☞ 将 A 画成阴影,以及将在 B 中的而不在 C 中的区域 $B\setminus C$ 画成阴影,总的阴影区域是 $A\cup(B\setminus C)$,如图 1-16(c)所示.

1.123 把同属于 3 个集合 A,B,C 的点,或者不属于这 3 个集合的任一集合的点组成的集合 X 画成阴影.

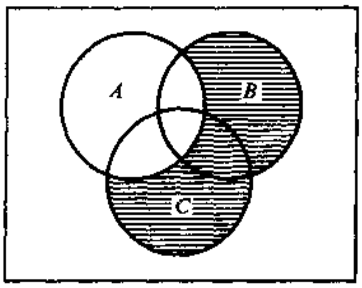
解 ☞ 将所有 3 个集合 A,B,C 的公共区域,即 $A\cap B\cap C$ 画成阴影.然后将所有 3 个集合的外部区域,即 $A^c\cap B^c\cap C^c$ 画成阴影.于是,X 是如图 1-17(a)所表示的总的阴影区域.

1.124 将恰好属于 3 个集合 A,B,C 中之一个的所有点组成的集合 Y 画成阴影.

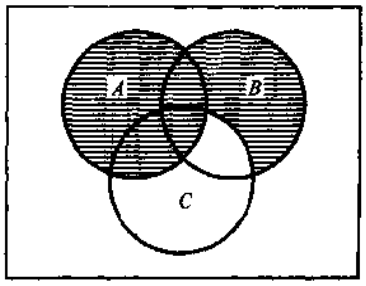
解 ☞ 将 B 和 C 外部的 A 中的区域,即 $A\cap B^c\cap C^c$ 画成阴影.然后将 A 和 C 外部的 B 的区域,即 $A^c\cap B\cap C^c$ 画成阴影.最后将 A 和 B 外部的 C 的区域,即 $A^c\cap B^c\cap C$ 画成阴影.图1-17(b)



(a) $A\cap B\cap C^c$为阴影部分



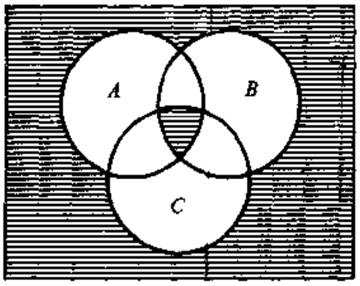
(b) $A^c\cap(B\cup C)$为阴影部分



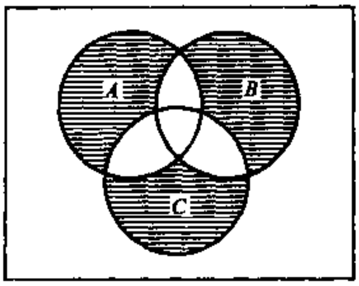
(c) $A\cup(B\setminus C)$为阴影部分

图 1-16

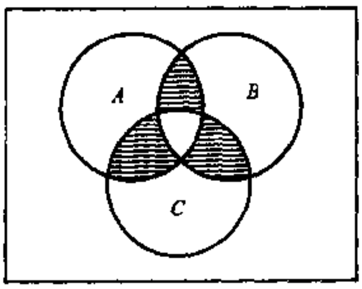
所表示的总的阴影区域是 Y(注意, $Y=(A^c\cap B\cap C)\cup(A\cap B^c\cap C)\cup(A\cap B\cap C^c)$).



(a) X为阴影部分



(b) Y为阴影部分



(c) Z为阴影部分

图 1-17

1.125 设 Z 是由恰好属于 3 个集合中的 2 个集合的那些点组成的集合.试将集合 Z 画成阴影.

解 将 C 外部 A 和 B 的公共区域,即 $A\cap B\cap C^c$ 画成阴影.然后将 B 外部 A 和 C 的公共区域,即 $A\cap B^c\cap C$ 画成阴影.最后将 A 外部 B 和 C 的公共区域,即 $A^c\cap B\cap C$ 画成阴影.图 1-17(c)所表示的总的阴影区域是 Z.

基本积

1.126 集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的一个**基本积**是形为

$$A_1^{\epsilon_1} \cap A_2^{\epsilon_2} \cap \cdots \cap A_n^{\epsilon_n}$$

的表示式,此处 $A_i^{\epsilon_i}$ 或是 A_i 或是 A_i^c. 证明任何两个不同的基本积 P_1 和 P_2 是不相交(分离)的.

证 ☞ 设 P_1 和 P_2 在第 i 个集合不同,例如,P_1 含 A_i 而 P_2 含 A_i^c. 那么 P_1 是 A_i 的一个子集,而 P_2 是 A_i^c 的一个子集. 因此,$P_1 \cap P_2 = \varnothing$,这正是我们要证明的.

1.127 求 n 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的基本积的数目.

解 ☞ 集合 $A_1^{\epsilon_1}$ 可有两种选择方法:A_1 或 A_1^c. 同理,集合 $A_2^{\epsilon_2}$ 也可取为 A_2 或 A_2^c,等等. 因此有 $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$ 种这样的基本积.

1.128 列出集合 A, B 和 C 的所有基本积.

解 ☞ 有如下 $2^3 = 8$ 种这样的积:

$$P_1 = A \cap B \cap C, \quad P_2 = A \cap B \cap C^c, \quad P_3 = A \cap B^c \cap C,$$
$$P_4 = A \cap B^c \cap C^c, \quad P_5 = A^c \cap B \cap C, \quad P_6 = A^c \cap B \cap C^c,$$
$$P_7 = A^c \cap B^c \cap C, \quad P_8 = A^c \cap B^c \cap C^c.$$

1.129 在图 1-6(b)集合 A, B, C 的文图中,8 个区域的每一个都表示一个基本积. 试用出现在习题 1.128 的基本积 P_1 到 P_8 标注这些区域.

解 ☞ 见图 1-18. A, B 和 C 的公共区域标注 $P_1 = A \cap B \cap C$;C 外部 A 和 B 的公共区域标注 $P_2 = A \cap B \cap C^c$;B 的外部 A 和 C 的公共区域标注 $P_3 = A \cap B^c \cap C$,等等.

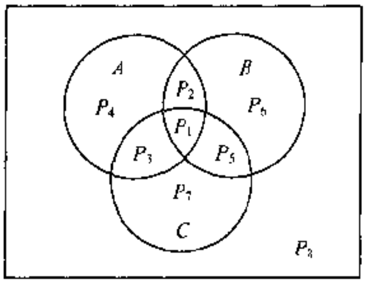


图 1-18

1.130 将 $A \cap (B \cup C)$ 写成(不相交的)基本积的并.

解 ☞ 由图 1-11(b),$A \cap (B \cup C)$ 由文图的 8 个区域中的三个区域组成. 这三个区域对应三个基本积 $A \cap B \cap C$,$A \cap B \cap C^c$ 和 $A \cap B^c \cap C$,因此

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C).$$

1.131 将 $A^c \cap (B \cup C)$ 写成(不相交的)基本积的并.

解 ☞ 由图 1-16(b),$A^c \cap (B \cup C)$ 由文图的对应于基本积 $A^c \cap B \cap C^c$,$A^c \cap B \cap C$ 和 $A^c \cap B^c \cap C$ 的 3 个区域组成. 因此

$$A^c \cap (B \cup C) = (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A^c \cap C^c \cap C).$$

1.132 将 $A \cup (B \cap C)$ 写成基本积的并.

解 ☞ 应用图 1-13(b)中 $A \cup (B \cap C)$ 的文图,我们得到

$$A \cup (B \cap C) = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c).$$

1.133 将 $A \cup (B \setminus C)$ 写成基本积的并.

解 ☞ 应用图 1-16(c)中 $A \cup (B \setminus C)$ 的文图,得到

$$A \cup (B \setminus C) = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C^c).$$

1.134 求集合 A, B, C 和 D 的基本积数目.

解 ☞ 因有 4 个集合,因此有 $2^4 = 16$ 个这样的基本积.

1.135 设 $X = A \cap B \cap C$. X 是一个基本积吗?

解 ☞ 若仅仅涉及集合 A,B 和 C，则 X 是一个基本积．但若涉及更多的集合，比方说，A,B,C 和 D，则 X 不是一个基本积．具体地说，

$$X=(A\cap B\cap C\cap D)\cup(A\cap B\cap C\cap D^c),$$

X 表示成（A,B,C 和 D 的）不相交基本积的并．

1.5 集合代数、对偶性

这一节始终用到下面的定理．（虽然该定理的每一部分来自第十三章讨论的类似的逻辑定律，但定理的某些部分在下面给予证明．）

定理 1.3 集合满足表 1-1 中定律．

表 1-1 集代数定律

幂等律	
1a. $A\cup A=A$	1b. $A\cap A=A$
结合律	
2a. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$	2b. $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
交换律	
3a. $A\cup B=B\cup A$	3b. $A\cap B=B\cap A$
分配律	
4a. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	4b. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
同一律	
5a. $A\cup\varnothing=A$	5b. $A\cap\mathbf{U}=A$
6a. $A\cup\mathbf{U}=\mathbf{U}$	6b. $A\cap\varnothing=\varnothing$
对合律	
7. $(A^c)^c=A$	
补余律	
8a. $A\cup A^c=\mathbf{U}$	8b. $A\cap A^c=\varnothing$
9a. $\mathbf{U}^c=\varnothing$	9b. $\varnothing^c=\mathbf{U}$
德·摩根定律	
10a. $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$	10b. $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

1.136 证明德·摩根定律：(a) $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$，(b) $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$．

证 ☞ (a)用两种方法来证明这个集合等式．第一种方法是用 $X=Y$ 等价于 $X\subseteq Y$ 且 $Y\subseteq X$．第二种方法是用文图．

方法一 我们首先证明 $(A\cup B)^c\subseteq A^c\cap B^c$．若 $x\in(A\cup B)^c$，则 $x\notin A\cup B$．因此 $x\notin A$ 且 $x\notin B$，因而，$x\in A^c$ 且 $x\in B^c$．故 $x\in A^c\cap B^c$．

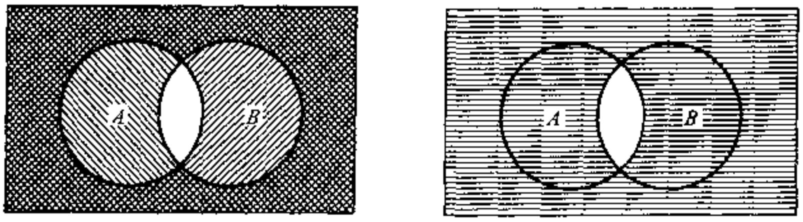
其次，我们证明 $A^c\cap B^c\subseteq(A\cup B)^c$．设 $x\in A^c\cap B^c$，则 $x\in A^c$ 且 $x\in B^c$，因而 $x\notin A$ 且 $x\notin B$．因此 $x\notin A\cup B$，故 $x\in(A\cup B)^c$．

我们证明了 $(A\cup B)^c$ 的每个元素属于 $A^c\cap B^c$，且 $A^c\cap B^c$ 的每个元素属于 $(A\cup B)^c$．这两个结论综合在一起证明了两个集合有相同元素，即有 $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$．

方法二 图 1-7(b)中 $(A\cup B)^c$ 的文图和图 1-8(b)中 $A^c\cap B^c$ 的文图表明 $(A\cup B)^c$ 和 $A^c\cap B^c$ 表示相同区域．故 $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$．

(b)首先，一笔一画地向上斜画到右边使 A 的外部区域 A^c 成阴影(///)，然后一笔一画地向下斜画到右边使 B^c 成阴影(\\\\\\)，如图 1-19(a)所示．因此总的阴影区域为图 1-19(b)所示的 $A^c\cup B^c$．另

一方面,图 1-19(b)中阴影区域是 $A\cap B$ 的外部区域,即$(A\cap B)^c$.故有$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.



(a) ////所示阴影部分为 A^c \\\\\\\\所示阴影部分为 B^c

(b) $A^c\cup B^c$ 为阴影部分

图 1-19

1.137 证明同一律:(a)$A\cup\varnothing=A$;(b)$A\cap \mathbf{U}=A$.

证 ☞ (a)根据习题 1.79,$A\subseteq A\cup\varnothing$.设 $x\in A\cup\varnothing$,则 $x\in A$ 或 $x\in\varnothing$.因$\varnothing$是空集,因此 $x\notin\varnothing$,因而 $x\in A$.于是 $A\cup\varnothing\subseteq A$.故 $A\cup\varnothing=A$.

(b)根据习题 1.79,$A\cap\mathbf{U}\subseteq A$.设 $x\in A$.由于 $\mathbf{U}$ 是全集,因此 $x\in\mathbf{U}$,因而 $x\in A\cap\mathbf{U}$.这样 $A\subseteq A\cap\mathbf{U}$.故 $A\cap\mathbf{U}=A$.

1.138 证明同一律:(a)$A\cup\mathbf{U}=\mathbf{U}$;(b)$A\cap\varnothing=\varnothing$.

证 ☞ (a)根据习题 1.79,$\mathbf{U}\subseteq A\cup\mathbf{U}$.由于 $\mathbf{U}$ 是全集,因此 $A\cup\mathbf{U}\subseteq\mathbf{U}$.故 $A\cup\mathbf{U}=\mathbf{U}$.

(b)根据习题 1.79,$A\cap\varnothing\subseteq\varnothing$.由于$\varnothing$是空集,因此$\varnothing\subseteq A\cap\varnothing$.故 $A\cap\varnothing=\varnothing$.

1.139 证明分配律:(a)$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;(b)$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

证 ☞ (a)由图 1-13(b)和图 1-14(b)中文图可知,$A\cup(B\cap C)$和$(A\cup B)\cap(A\cup C)$表示相同的区域.因此 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(b)由图 1-11(b)和图 1-12(b)中文图可知,$A\cap(B\cup C)$和$(A\cap B)\cup(A\cap C)$表示相同的区域,因此 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

1.140 证明交换律:(a)$A\cup B=B\cup A$;(b)$A\cap B=B\cap A$.

证 ☞ (a)$A\cup B=\{x:x\in A$ 或 $x\in B\}=\{x:x\in B$ 或 $x\in A\}=B\cup A$.

(b)$A\cap B=\{x:x\in A$ 且 $x\in B\}=\{x:x\in B$ 且 $x\in A\}=B\cap A$.

1.141 证明幂等律:(a)$A\cup A=A$;(b)$A\cap A=A$.

证 ☞ (a)$A\cup A=\{x:x\in A$ 或 $x\in A\}=\{x:x\in A\}=A$.

(b)$A\cap A=\{x:x\in A$ 且 $x\in A\}=\{x:x\in A\}=A$.

1.142 证明对合律:$(A^c)^c=A$.

证 ☞ $(A^c)^c=\{x:x\notin A^c\}=\{x:x\in A\}=A$.

今后用到下面的定义.

定义 关于集合方程 E 的**对偶**E^*是交换 E 中的$\cup$和$\cap$以及 $\mathbf{U}$ 和$\varnothing$,即用$\cap$,$\cup$,$\varnothing$和 $\mathbf{U}$ 分别替代 E 中的$\cup$,$\cap$,$\mathbf{U}$ 和$\varnothing$得到的方程.

1.143 写出下列集合方程的对偶:

(a)$(\mathbf{U}\cap A)\cup(B\cap A)=A$; (b)$(A\cap\mathbf{U})\cap(\varnothing\cup A^c)=\varnothing$.

解 ☞ 在每个集合方程中交换$\cup$和$\cap$以及 $\mathbf{U}$ 和$\varnothing$:

(a)$(\varnothing\cup A)\cap(B\cup A)=A$, (b)$(A\cup\varnothing)\cup(\mathbf{U}\cap A^c)=\mathbf{U}$.

1.144 写出下列集合方程的对偶:

(a)$(A\cup B)\cap(A\cup B^c)=A\cup\varnothing$; (b)$(A\cap\mathbf{U})\cup(B\cap A)=A$.

解 ☞ 分别用$\cap$,$\cup$,$\varnothing$和 $\mathbf{U}$ 替代$\cup$,$\cap$,$\mathbf{U}$ 和$\varnothing$:

(a)$(A\cap B)\cup(A\cap B^c)=A\cap\mathbf{U}$, (b)$(A\cup\varnothing)\cap(B\cup A)=A$.

1.145 写出下列每个集合方程的对偶：

(a)$A\cup(A\cap B)=A$；　(b)$(A\cap B)\cup(A^c\cap B)\cup(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B^c)=\mathbf{U}$；

(c)$(A\cup\mathbf{U})\cap(A\cap\varnothing)=\varnothing$；　(d)$(A\cup B)\cap(B\cup C)=(A\cap C)\cup B$.

解 ☞ 分别用$\cap$，$\cup$，$\varnothing$和$\mathbf{U}$替代$\cup$，$\cap$，$\mathbf{U}$和$\varnothing$：

(a)$A\cap(A\cup B)=A$，　(b)$(A\cup B)\cap(A^c\cup B)\cap(A\cup B^c)\cap(A^c\cup B^c)=\varnothing$，

(c)$(A\cap\varnothing)\cup(A\cup\mathbf{U})=\mathbf{U}$，　(d)$(A\cap B)\cup(B\cap C)=(A\cup C)\cap B$.

1.146 写出下列每个集合方程的对偶：

(a)$(A\cup B\cup C)^c=(A\cup C)^c\cap(A\cup B)^c$；　(b)$A\cup B=(B^c\cap A^c)^c$；

(c)$(A\cap\mathbf{U})^c\cap A=\varnothing$；　(d)$A=(B^c\cap A)\cup(A\cap B)$.

解 ☞ (a)$(A\cap B\cap C)^c=(A\cap C)^c\cup(A\cap B)^c$，　(b)$A\cap B=(B^c\cup A^c)^c$，

(c)$(A\cup\varnothing)^c\cup A=\mathbf{U}$，　(d)$A=(B^c\cup A)\cap(A\cup B)$.

1.147 写出下列每个集合方程的对偶：

(a)$A^c\cup B^c\cup C^c=(A\cap B\cap C)^c$；

(b)$(A\cap\mathbf{U})\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

(c)$A=(B^c\cap A)\cup(C^c\cap A)\cup(A\cap B\cap C)$.

解 ☞ (a)$A^c\cap B^c\cap C^c=(A\cup B\cup C)^c$；

(b)$(A\cup\varnothing)\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

(c)$A=(B^c\cup A)\cap(C^c\cup A)\cap(A\cup B\cup C)$.

1.148 解释对偶原理.

解 ☞ 对偶原理是说，如果某些公理蕴含它们自身对偶，那么任一定理若是这些公理的一个推断，则其对偶也是这些公理的一个推论.对于任一给定的定理及其证明，该定理的对偶可在原先证明中用每一步的对偶按同样方法得到证明.

集代数

1.149 考虑对于并，交和补运算的集合.(a)解释集代数的含义；(b)说明为什么对偶原理用于集代数.

解 ☞ (a)集代数归结为表 1-1 中的定律并且那些定理的证明要用这些定律而不是其他定律，就是说，那些定理都是这些定律的一个推论.

(b)表 1-1 中每个定律的对偶也是表 1-1 中的一个定律.因此对偶原理用于集代数.

1.150 应用表 1-1 中定律证明恒等式：

(a)$(\mathbf{U}\cap A)\cup(B\cap A)=A$；(b)$(\varnothing\cup A)\cap(B\cup A)=A$.

证 ☞ (a)

陈述	理由
$(\mathbf{U}\cap A)\cup(B\cap A)=(A\cap\mathbf{U})\cup(A\cap B)$	交换律 3a
$=A\cap(\mathbf{U}\cup B)$	分配律 4b
$=A\cap(B\cup\mathbf{U})$	交换律 3a
$=A\cap\mathbf{U}$	同一律 6a
$=A$	同一律 5b

(b)这是(a)中证明的恒等式的对偶，因此根据对偶原理，它是正确的.换句话说，在(a)的证明中，用对偶陈述替代每一步便得到这个恒等式的一个证明.

1.151 证明右分配律：

(a)$(B\cup C)\cap A=(B\cap A)\cup(C\cap A)$；

(b)$(B\cap C)\cup A=(B\cup A)\cap(C\cup A)$.

证 ☞ (a)

陈述	理由
1. $(B\cup C)\cap A=A\cap(B\cup C)$	1. 交换律
2. $\quad=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	2. 分配律
3. $\quad=(B\cap A)\cup(C\cap A)$	3. 交换律

(b)这是(a)中证明的恒等式的对偶，只要在上面的证明中用其对偶替代每一步就行：

陈述	理由
1. $(B\cap C)\cup A=A\cup(B\cap C)$	1. 交换律
2. $\quad=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	2. 分配律
3. $\quad=(B\cup A)\cap(C\cup A)$	3. 交换律

1.152 证明下列集合恒等式：

(a) $(A\cup B)\cap(A\cup B^c)=A$；(b) $(A\cap B)\cup(A\cap B^c)=A$.

证 ☞ (a)

陈述	理由
1. $(A\cup B)\cap(A\cup B^c)=A\cup(B\cap B^c)$	1. 分配律
2. $B\cap B^c=\varnothing$	2. 补余律
3. $\therefore (A\cup B)\cap(A\cup B^c)=A\cup\varnothing$	3. 替 换
4. $A\cup\varnothing=A$	4. 同一律
5. $\therefore (A\cup B)\cap(A\cup B^c)=A$	5. 替 换

(b)由(a)和对偶原理得到.

1.153 证明吸收律：(a) $A\cup(A\cap B)=A$；　(b) $A\cap(A\cup B)=A$.

证 ☞ (a)

$A\cup(A\cap B)=(A\cap \mathbf{U})\cup(A\cap B)$	同一律
$\quad=A\cap(\mathbf{U}\cup B)$	分配律
$\quad=A\cap(B\cup \mathbf{U})$	交换律
$\quad=A\cap \mathbf{U}$	同一律
$\quad=A$	同一律

(b)由(a)和对偶原理得到.

1.154 证明：(a) $(B^c\cap\mathbf{U})\cap(A^c\cup\varnothing)=(A\cup B)^c$，(b) $(B^c\cup\varnothing)\cup(A^c\cap\mathbf{U})=(A\cap B)^c$.

证 ☞ (a)

$(B^c\cap\mathbf{U})\cap(A^c\cup\varnothing)=B^c\cap A^c$	同一律
$\quad=A^c\cap B^c$	交换律
$\quad=(A\cup B)^c$	德·摩根定律

(b)由(a)和对偶原理得到.

1.155 集代数是用并、交和补运算定义的，在集代数中，集包含定义如下：

$$A\subseteq B \quad 意指 \quad A\cap B=A.$$

用这个定义证明，若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

证 ☞

陈述	理由
1. $A=A\cap B$ 且 $B=B\cap C$	1. 子集定义
2. $\therefore A=A\cap(B\cap C)$	2. 代换
3. $A=(A\cap B)\cap C$	3. 结合律
4. $\therefore A=A\cap C$	4. 代换
5. $\therefore A\subseteq C$	5. 子集定义

1.6　有限集(合)、计数原理

这一节用到下面的定义和记号.

定义　若一个集合恰好含有 m 个不同的元素,其中 m 是一个非负整数,则称该集合是**有限集(合)**.否则,称它是**无限集(合)**.

记号　若一个集合 A 是有限的,则 $n(A)$表示 A 的元素数目.

1.156　判定下列集合哪些是有限的:

(a)A = {一年中的季节};　　(b)B = {美国的州};

(c)C = {小于 1 的正整数};　　(d)D = {奇整数};

(e)E = {12 的正整数因子};　　(f)F = {生活在美国的猫}.

解　☞ (a)A 是有限集合,因一年中有四季,即 $n(A)=4$.

(b)B 是有限集合,因美国有 50 个州,即 $n(B)=50$.

(c)没有小于 1 的正整数,因此 C 是空集.这样,C 是有限集合,且 $n(C)=0$.

(d)D 是无限集合.

(e)12 的正整数因子是 1,2,3,4,6 和 12.因此 E 是有限集合且 $n(E)=6$.

(f)虽然计算生活在美国的猫的数目是困难的,但猫的数目仍是有限的.因此 F 是有限集合.

1.157　指出下列各个集合是无限的或是有限的:

(a){一周天数};

(b){单词"mathematics(数学)"中的不同字母};

(c){负整数};

(d){数 1 到 100 的排序方法}.

解　☞ (a)有限集.一周有 7 天,因此该集合是有限的.

(b)有限集.单词"mathematics"中有 8 个不同字母,因此该集合是有限的.

(c)无限集.有无穷多个负整数,因此该集合是无限的.

(d)有限集.这些数的组合数目是很大的且将它们列出是一个冗长的工作,但毕竟是有限数目.因此该集合是有限的.

1.158　指出下列每个集合是无限或是有限的:

(a){过原点的直线};

(b){满足方程 $3x=y$ 的直线};

(c){一立方体的面};

(d){具有点(0,0),(0,1)和(0,4)为隅角的正方形}.

解　☞ (a) 无限集.过任一点有无穷多条直线,因此该集合是无限的.

(b) 有限集.这个方程表明只有一条过原点的直线,因此该集合是有限的.

(c) 一个立方体有 6 个面,因此该集合是有限的.

(d) 没有这样的正方形满足所给的条件.因此该集合是空集,因而是有限的.

1.159　求下列各个有限集的元素数目:

(a)$A=\{2,4,6,8,10\}$;

(b)$B=\{x:x^2=4\}$;

(c)$C=\{x:x>x+2\}$;

(d)$D=\{x:x$ 是正整数,x 是 15 的因子$\}$;

(e)E = {字母表中在字母 m 前面的字母};

(f)$F=\{x:x$ 是 $x^3=27$ 的解$\}$.

解　☞ (a) 有 5 个确定的元素,因此 $n(A)=5$.

(b) 只有两个根 $x=2$ 和 $x=-2$,因此 $n(A)=2$.

(c) 没有 x 能满足所给的条件,因此 $C=\varnothing$且 $n(C)=0$.

(d) 15 的正因子是 1,3,5 和 15,因此 $n(D)=4$.

(e) 在 m 之前有 12 个字母,因此 $n(E)=12$.

(f) 若 **U** 是实数域 **R**,则 $x^3=27$ 只有一个解 $x=3$,因此 $n(F)=1$.但若 **U** 是复数域 **C**,则 $x^3=27$ 有 3 个不同的解,因此 $n(F)=3$.

计数(包含-排斥)原理

习题 1.160~1.177 用到下列定理.

引理 1.4 设 A 和 B 是不相交(分离)的有限集合,则 $A\cup B$ 是有限集合且

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B).$$

定理 1.5 设 A 和 B 都是有限集合,则 $A\cup B$ 和 $A\cap B$ 是有限集合且

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B).$$

这样

$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B).$$

定理 1.6 设 A,B 和 C 都是有限集合,则 $A\cup B\cup C$ 是有限集合且

$$\begin{aligned}n(A\cup B\cup C)=&n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)\\&-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C).\end{aligned}$$

定理 1.7 (包含-排斥原理) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都是有限集合,则 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 是有限集合且

$$\begin{aligned}n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=&\sum_{1\leqslant i\leqslant n}n(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}n(A_i\cap A_j)\\&+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}n(A_i\cap A_j\cap A_k)\\&-\cdots+(-1)^{n-1}n(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n).\end{aligned}$$

注 定理 1.5 和 1.6 是定理 1.7 的特殊情形.

1.160 证明引理 1.4.

证 ☞ 计算 $A\cup B$ 的元素数目时,首先计算在 A 中的那些元素.A 有 $n(A)$个元素.$A\cup B$ 的其他元素是在 B 中而不在 A 中的元素.但由于 A 和 B 是不相交的,在 A 中没有 B 的元素,因此 B 中有 $n(B)$个元素不在 A 中.故 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$.

1.161 证明定理 1.5.

证 ☞ 计算 $A\cup B$ 的元素数目时,我们计算 A 的元素和 B 的元素.A 有 $n(A)$个元素以及 B 有 $n(B)$个元素.但是 $A\cap B$ 的元素计算两次.因此正如所要证明的:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B).$$

另一方面,我们有不相交的并

$$A\cup B=A\cup(B\setminus A)\ \text{以及}\ B=(A\cap B)\cup(B\setminus A).$$

因此,根据引理 1.4,有

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B\setminus A)\ \text{以及}\ n(B)=n(A\cap B)+n(B\setminus A).$$

于是 $n(B\setminus A)=n(B)-n(A\cap B)$,因而

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B).$$

这正是我们所要证明的.

1.162 证明定理 1.6.

证 ☞ 应用$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$和$(A\cap C)\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C$,以及反复应用定理 1.5,我们有

$$\begin{aligned}n(A\cup B\cup C)&=n(A\cup B)+n(C)-n[(A\cap C)\cup(B\cap C)]\\&=[n(A)+n(B)-n(A\cap B)]+n(C)\\&\quad-[n(A\cap C)+n(B\cap C)-n(A\cap B\cap C)]\\&=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)\end{aligned}$$

$$+n(A\cap B\cap C)].$$

这正是我们所要证明的.

1.163 证明:(a)$A\setminus B$ 和 $A\cap B$ 是不相交的,以及 $A=(A\setminus B)\cup(A\cap B)$;(b)$n(A\setminus B)=n(A)-n(A\cap B)$.

证 ☞ (a)设 $x\in A\setminus B$ 且 $x\in A\cap B$,则因 $x\in A\setminus B$,因此 $x\notin B$,以及因 $x\in A\cap B$,有 $x\in B$. 这个矛盾表明没有元素 x 属于 $A\setminus B$ 而又属于 $A\cap B$.这就是说,$A\setminus B$ 和 $A\cap B$ 是不相交的.而且

$$(A\setminus B)\cup(A\cap B)=(A\cap B^c)\cup(A\cap B)=A\cap(B^c\cup B)=A\cap\mathbf{U}=A.$$

(b)由(a)和引理 1.4,有

$$n(A)=n(A\setminus B)+n(A\cap B).$$

这就给出我们要证明的等式.

1.164 设 $A\subseteq B$. 证明 $n(A\cup B)=n(B)$ 且 $n(A\cap B)=n(A)$.

证 ☞ 由于 $A\subseteq B$,我们有 $A\cup B=B$ 且 $A\cap B=A$. 因此 $n(A\cup B)=n(B)$ 且 $n(A\cap B)=n(A)$.

1.165 在正餐上,5 个人点特色菜,2 人从菜单上点菜,以及 1 个人只点 1 个色拉. 求总的进餐人数 m.

解 ☞ 由于这些集合是不相交的(假定没有更多人进餐),因此进餐的总人数是 $m=5+2+1=8$.

1.166 在一个班上有 22 名女学生和 18 名男学生. 总共有多少学生?

解 ☞ 男学生集合和女学生集合是不相交的,因此共有 $t=22+18=40$ 名学生.

1.167 在一个餐馆工作的 12 名服务员具有学士学位,4 名服务员具有硕士学位. 求有学位的服务员人数 d(假设没有服务员具有博士学位).

解 ☞ 具有硕士学位的服务员集合 M 包含在具有学士学位的服务员集合 B 中. 因此 $d=n(B\cup M)=n(B)=12$.

1.168 为了回收,32 人保存纸和瓶子(或二者),30 人保存纸,14 人保存瓶子. 求(a)保存纸和瓶子;(b)只保存纸;(c)只保存瓶子的人数 m.

解 ☞ 设 P 和 B 分别表示保存纸和瓶子的人的集合.

(a)据定理 1.5,有

$$m=n(P\cap B)=n(P)+n(B)-n(P\cup B)=30+14-32=12.$$

(b)$m=n(P\setminus B)=n(P)-n(P\cap B)=30-12=18$.

(c)$m=n(B\setminus P)=n(B)-n(P\cap B)=14-12=2$.

1.169 调查 80 名车主的车型显示,24 人拥有小型汽车,62 人拥有的汽车不是小型汽车. 求既有小型汽车又有别的汽车的人数 k.

解 ☞ 据定理 1.5,$k=62+24-80=6$.

1.170 你曾经访问 12 个人,发现他们都去过迪斯尼世界或迪斯尼游乐场. 若有 8 个人去过迪斯尼游乐场,则有多少人去过迪斯尼世界呢?

解 ☞ 答案不是 4 个人去过迪斯尼世界,除非我们知道没有人既去过迪斯尼游乐场又去过迪斯尼世界. 这就是说,没有足够的信息去确定解答(除非,例如我们知道去过两个地方的人数).

1.171 假设 12 人读华尔街日报(W)或商业周刊(B)(或二者都读). 已知 3 人只读日报和 6 人既读日报又读周刊,求只读商业周刊的人数 k.

解 ☞ 由于

$$W\cup B=(W\setminus B)\cup(W\cap B)\cup(B\setminus W)$$

以及并集是不相交的,因此有

$$12=3+6+k,$$

故得 $k=3$.

1.172 询问10家人有什么宠物得到的回答是(i)6家人有狗,(ii)4家人有猫,(iii)2家人既无猫也无狗.求既有猫又有狗的家庭数目 k.

解 ☞ 有 $10-2=8$ 家人或有猫或有狗(或有猫又有狗).据定理1.5,有

$$k = 6 + 4 - 8 = 2.$$

1.173 调查一个集体宿舍学生在他们房间里是否有词典(D)或百科全书(T).结果表明,650名学生有词典,150名学生没有词典,175名学生有百科全书,50名学生既无词典又无百科全书.求(a)住在集体宿舍;(b)既有词典又有百科全书;(c)只有百科全书的学生人数 k.

解 ☞ 这里 $n(D)=650$, $n(D^c)=150$, $n(T)=175$, $n(D^c\cap T^c)=n(D\cup T)^c=50$.

(a)

$$k = n(\mathbf{U}) = n(D) + n(D^c) = 650 + 150 = 800.$$

(b)首先求得

$$n(D\cup T) = n(\mathbf{U}) - n((D\cup T)^c) = 800 - 50 = 750,$$

然后,据定理1.5,有

$$k = n(D\cap T) = 650 + 175 - 750 = 75.$$

(c)

$$k = n(T) - n(D\cap T) = 175 - 75 = 100$$

1.174 调查60人发现,25人读周刊,26人读时报,26人读幸运杂志.而且9人既读周刊又读幸运杂志,11人既读周刊又读时报,8人既读时报又读幸运杂志,8人什么杂志也不读.

(a)求读所有三种杂志的人数;

(b)在图1-20(a)的文图的8个区域中,填上准确的人数,这里,N, T 和 F 分别表示读周刊、时报和幸运杂志的人组成的集合;

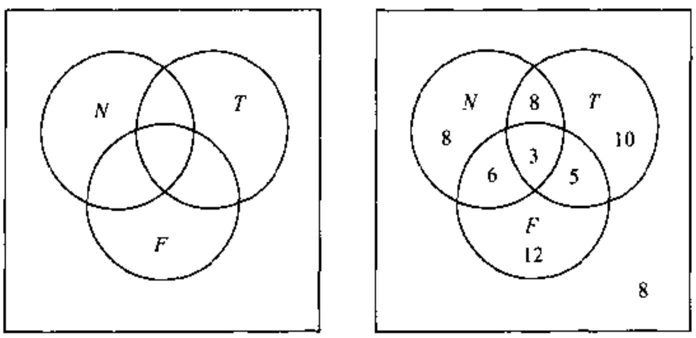
(c)求只读一种杂志的人数.

解 ☞ (a)设 $x=n(N\cap T\cap F)$,它是读三种杂志的人数.由于有8人三种杂志都不读,因此 $n(N\cup T\cup F)=52$.我们有

$$n(N\cup T\cup F) = n(N) + N(T) + n(F) - n(N\cap T) - n(N\cap F) - n(T\cap F) + n(N\cap T\cap F).$$

因此,$52=25+26+26-11-9-8+x$.故 $x=3$.

(b)所要求的文图,图1-20(b)如下得到:



(a) (b)

图1-20

3人读所有三种杂志,

$11-3=8$ 人读周刊和时报但不是所有三种杂志,

$9-3=6$ 人读周刊和幸运杂志但不是所有三种杂志,

$8-3=5$ 人读时报和幸运杂志但不是所有三种杂志,

25 − 8 − 6 − 3 = 8 人只读周刊，

26 − 8 − 5 − 3 = 10 人只读时报，

26 − 6 − 5 − 3 = 12 人只读幸运杂志．

(c)8 + 10 + 12 = 30 人只读一种杂志．

1.175 假设一学院 120 名数学系学生中的 100 名至少修读法语、德语和俄语中一种语言．再设

65 人学法语，　20 人学法语和德语，

45 人学德语，　25 人学法语和俄语，

42 人学俄语，　15 人学德语和俄语．

(a)求学所有三种语言的学生数；

(b)在图 1-21(a)的文图的 8 个区域中填上准确的学生人数．这里 F, G 和 R 分别表示学法语、德语和俄语的学生组成的集合；

(c)求(1)只学一种语言和(2)恰恰学两种语言的学生人数 k．

解 (a)根据定理 1.6，有

$$n(F\cup G\cup R)=n(F)+n(G)+n(R)-n(F\cap G)$$
$$-n(F\cap R)-n(G\cap R)+n(F\cap G\cap R),$$

现在，由于 100 名学生至少学习一种语言，因此 $n(F\cup G\cup R)=100$．将它代入上式得

$$100=65+45+42-20-25-15+n(F\cap G\cap R).$$

因此，$n(F\cap G\cap R)=8$，即 8 名学生学习所有三种语言．

(b)应用(a)，所要求的文图，图 1-21(b)如下得到：

8 名学生学习所有三种语言，

20 − 8 = 12 名学生学习法语和德语但不学俄语，

25 − 8 = 17 名学生学习法语和俄语但不学德语，

15 − 8 = 7 名学生学习德语和俄语但不学法语，

65 − 12 − 8 − 17 = 28 名学生只学法语，

45 − 12 − 8 − 7 = 18 名学生只学德语，

42 − 17 − 8 − 7 = 10 名学生只学俄语，

120 − 100 = 20 名学生不学这三种语言的任何一种语言．

(c)应用图 1-21(b)的文图得到

(1)$k=28+18+10=56$，(2)$k=12+17+7=36$．

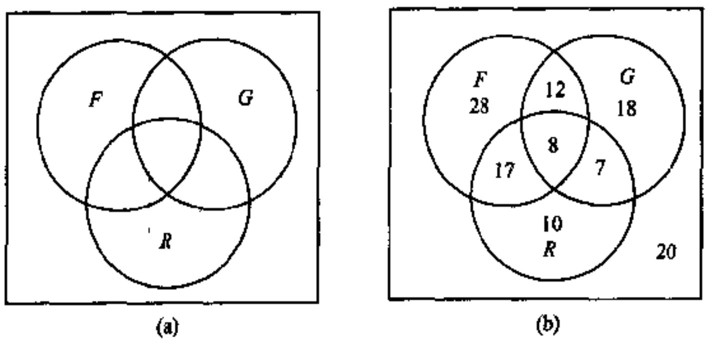


图 1-21

1.176 询问 100 名学生是否修读过社会学、人类学和历史学等三个领域的课程．结果是：

45 人修读过社会学，

38 人修读过人类学，

21 人修读过历史学，

18 人修读过社会学和人类学，

9 人修读过社会学和历史学，

4 人修读过历史学和人类学，

以及 23 人没有修读过这 3 个领域的任一课程.

(a)画一个表明调查结果的文图；

(b)求(1)修读过一个领域课程和(b)修读过两个领域课程的学生人数 k.

解 ☞ 设 S,A 和 H 分别表示修读过社会学、人类学和历史学的学生组成的集合.

(a)首先求得 $n(S\cup A\cup H)=100-23=77$. 其次，应用定理 1.6，求 $m=n(S\cap A\cap H)$：

$$77=45+38+21-18-9-4+m,$$

因此 $m=4$. 现在填所要求的图 1-22 的文图如下：

4 人属于所有 3 个集合，

$18-4=14$ 人属于 S 和 A 但不属于 H，

$9-4=5$ 人属于 S 和 H 但不属于 A，

$4-4=0$ 个人属于 A 和 H 但不属于 S，

$45-14-4-5=22$ 人只属于 S，

$38-14-4-0=20$ 人只属于 A，

$21-5-4-0=12$ 人只属于 H，

23 人不属于这 3 个集合.

(b)应用文图得到：(1)$k=22+20+12=54$，(2)$k=14+5+0=19$.

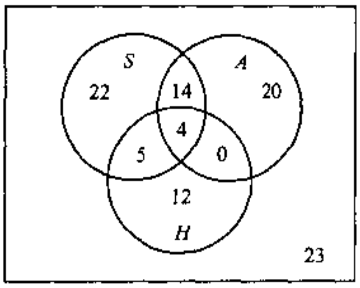


图 1-22

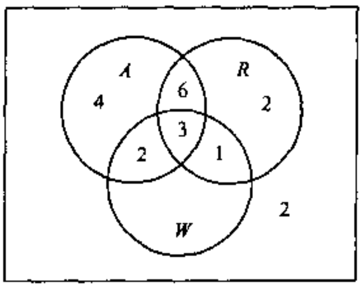


图 1-23

1.177 调查本地汽车商那里正在销售的 25 辆新汽车式样看到，车子装有 3 个大众化的供选择的设备：空调(A)、收音机(R)和动力窗(W). 调查发现：

15 辆有空调，

12 辆有收音机，

5 辆有空调和动力窗，

9 辆有空调和收音机，

4 辆有收音机和动力窗，

3 辆有所有三种设备，

2 辆没有供选设备.

求(a)只有动力窗；(b)只有空调；(c)只有收音机；(d)有收音机和动力窗但无空调；(e)有空调和收音机但无动力窗；(f)只有一种供选择设备的汽车数目.

解 ☞ 首先把数据如下填入图 1-23 A,R 和 W 的文图中：

3 辆车有所有三种供选设备，

$9-3=6$ 辆车有 A 和 R 但无 W，

$5-3=2$ 辆车有 A 和 W 但无 R，

$4-3=1$ 辆车有 R 和 W 但无 A，

$15-6-3-2=4$ 辆车只有 A，

$12-6-3-1=2$ 辆车只有 R，

2 辆车没有供选设备.

应用文图,我们得到

(a)$25-(6+4+2+3+2+1+2)=5$ 部车只有 W,

(b)4, (c)2, (d)$3+1=4$, (e)6, (f)$4+2+5=11$.

1.7 集合类、幂集

1.178 解释术语"集合类"的用法和术语"子类"的用法.

解 ☞ 设 X 是一个集合,其元素为集合.为了避免混淆,我们称 X 是一个**集合类**,而不称它为集合的集合.我们将称 X 的子集为**子类**.

1.179 设 A 是给定的集合.(a)定义 A 的**幂集**,用 $\mathscr{P}(A)$表示;(b)当 A 是有限集时,求 $\mathscr{P}(A)$中元素的数目.

解 ☞ (a)A 的幂集是 A 的所有子集的集合.

(b)$\mathscr{P}(A)$的元素数目是 2 的 $n(A)$次幂,即 $n(\mathscr{P}(A))=2^{n(A)}$.

1.180 考虑集合 $A=[\{1,2,3\},\{4,5\},\{6,7,8\}]$.

(a)A 的元素是什么?

(b)判定下列每个关系式是对或是错:

(i)$1\in A$,　　(ii)$\{1,2,3\}\subseteq A$,　(iii)$\{6,7,8\}\in A$,

(iv)$\{\{4,5\}\}\subseteq A$,　(v)$\varnothing\in A$,　　(vi)$\varnothing\subseteq A$.

解 ☞ (a)A 是一个集合类.它的元素是集合$\{1,2,3\}$,$\{4,5\}$和$\{6,7,8\}$.

(b)(i)错.1 不是 A 的一个元素.

(ii)错.$\{1,2,3\}$不是 A 的一个子集,它是 A 的一个元素.

(iii)对.$\{6,7,8\}$是 A 的一个元素.

(iv)对.$\{\{4,5\}\}$是由元素$\{4,5\}$组成的集,它是 A 的一个子集.

(v)错.空集$\varnothing$不是 A 的一个元素,即它不是所述问题中列出的 3 个元素之一.

(vi)对.空集是任一集合的一个子集,甚至是一个集合类.

1.181 设 $X=\{a,b,c\}$.求 X 的幂集 $\mathscr{P}(X)$.列出 $\mathscr{P}(X)$的下列每个子类的元素(X 的子集).

(a) $Y_1=$含有两个元素的集合;

(b) $Y_2=$含有三个元素的集合;

(c) $Y_3=$含有元素"a"的集合;

(d) $Y_4=$含有元素"b"和"c"的集合.

解 ☞ $\mathscr{P}(X)$由 X 的全体子集组成:

$$\mathscr{P}(X)=[\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}].$$

注意空集$\varnothing$是 X 的一个子集,因此空集$\varnothing$属于 $\mathscr{P}(X)$.同理,$X=\{a,b,c\}$属于 $\mathscr{P}(X)$,而且 $\mathscr{P}(X)$含有 $2^3=8$ 个元素.

(a)$\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}$.

(b)$\{a,b,c\}$.

(c)$\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}$.

(d)$\{b,c\},\{a,b,c\}$.

1.182 求 $A=\{a,b,c,d\}$的幂集 $\mathscr{P}(A)$.

解 ☞ $\mathscr{P}(A)$的元素是 A 的子集.因此

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(A)=[&A,\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},\\&\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},\\&\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\varnothing].\end{aligned}$$

我们注意到 $\mathscr{P}(A)$有 $2^4=16$ 个元素.

1.183 设 $X=\{1,2,3,4,5\}$，列出下面的 $\mathscr{P}(A)$ 的子类的元素：

(a) Y_1 = 不含元素 2 或 4 的集合；

(b) Y_2 = 元素之和是 5 的集合；

(c) Y_3 = 有 4 个元素的集合.

解 ☞ 列出 X 的具有给定性质的元素：

(a) $\{1\},\{3\},\{5\},\{1,3\},\{1,5\},\{3,5\},\{1,3,5\}$；

(b) $\{2,3\},\{1,4\},\{5\}$；

(c) $\{1,2,3,4\},\{1,2,3,5\},\{1,2,4,5\},\{1,3,4,5\},\{2,3,4,5\}$.

1.184 求下列每个集合的幂集的元素数目：

(a) {一，二}；

(b) {小汽车，公共汽车，火车，飞机}；

(c) $\{7\}$；

(d) $\{1,2,3,4,5\}$.

解 ☞ $\mathscr{P}(A)$ 有 $2^{n(A)}$ 个元素. 因此，(a) $2^2=4$，(b) $2^4=16$，(c) $2^1=2$，(d) $2^5=32$.

1.185 空集 $\varnothing$ 的幂集 $\mathscr{P}(\varnothing)$ 是空集吗？

解 ☞ 不是. $\mathscr{P}(\varnothing)=\{\varnothing\}$. 它是具有一个元素，即空集的类.

1.186 求下列每个集合的幂集的元素数目：

(a) $\{x: x$ 是一星期的一天$\}$；

(b) $\{x: x$ 是 6 的一个正因子$\}$；

(c) $\{x: x$ 是一年中的一个季节$\}$；

(d) $\{x: x$ 是单词"yes"的一个字母$\}$.

解 ☞ (a) $2^7=128$，(b) $2^4=16$，因有 4 个因子：1，2，3，6. (c) $2^4=16$. (d) $2^3=8$.

1.187 设 $A=[\{a\},\{b,c,d,e\},\{c,d\}]$. 列出 A 的元素，并且判定下列关系式是对或是错：

(a) $a\in A$； (b) $\{a\}\in A$； (c) $\{\{a\},\{c,d\}\}\subseteq A$；

(d) $\{b,c,d,e\}\subseteq A$； (e) $\varnothing\subseteq A$； (f) $\varnothing\in A$.

解 ☞ A 的元素是 $\{a\},\{b,c,d,e\}$ 和 $\{c,d\}$.

(a) 错. a 不是 A 的 3 个元素之一.

(b) 对. 集合 $\{a\}$ 是 A 的 3 个元素之一.

(c) 对. $\{\{a\},\{c,d\}\}$ 是 A 的一个子集.

(d) 错. $\{b,c,d,e\}$ 是 A 的一个元素，但不是子集.

(e) 对. 空集是任一集合的一个子集，甚至是一个集合类.

(f) 错. 空集没有被指定为 A 的一个元素.

1.188 考虑集合类 $B=[\{1,3,5\},\{2,4,6\},\{0\}]$. 列出 B 的元素并且判定下列每个关系式是对或是错：

(a) $\varnothing\subseteq B$； (b) $3\in B$； (c) $\{1,3,5\}\subseteq B$；

(d) $\{1,2,3,4,5,6\}\in B$； (e) $\{\{2,4,6\},\{0\}\}\subseteq B$； (f) $\{0\}\in B$.

解 ☞ B 的元素是 $\{1,3,5\},\{2,4,6\}$ 和 $\{0\}$.

(a) 对. 空集是任一集合的一个子集，甚至是一个集合类.

(b) 错. 3 是一个集合的元素，而该集合是集合类 B 的一个元素. 3 不是 B 的一个元素.

(c) 错. $\{1,3,5\}$ 是 B 的一个元素，但不是子集.

(d) 错. $\{1,2,3,4,5,6\}$ 不是 B 的一个元素.

(e) 对. $\{\{2,4,6\},\{0\}\}$ 是 B 的元素的集合，因而是 B 的一个子集.

(f) 对. $\{0\}$ 是 B 的元素之一.

习题 1.189～1.191 考虑下列集合：

$$E = [\{1,2,3\},\{2,3\},\{a,b\}],\quad F = [\{a,b\},\{1,2\}].$$

1.189　求(a)$E\cup F$,(b)$E\cap F$,(c)E^c,(d)$E\setminus F$.

解　☞ (a)$E\cup F=[\{1,2,3\},\{2,3\},\{a,b\},\{1,2\}]$,它是 E 或 F 的元素构成的集合.

(b)$E\cap F=[\{a,b\}]$,因$\{a,b\}$是同时在这两个集合中的惟一元素.

(c)因没有给出全集 $\mathbf{U}$,因此不能指出 E^c.

(d)$E\setminus F=[\{1,2,3\},\{2,3\}]$,它由 E 中不在F 的元素组成的集合.

1.190　求 E 的幂集 $\mathscr{P}(E)$.

解　☞ 这里 $\mathscr{P}(E)$由 E 的全体子集组成,且它有 $2^3=8$ 个元素:

$$\mathscr{P}(E)=\{\varnothing,[\{1,2,3\}],[\{2,3\}],[\{a,b\}],\\ [\{1,2,3\},\{2,3\}],[\{1,2,3\},\{a,b\}],\\ [\{2,3\},\{a,b\}],E\}.$$

注意 $\mathscr{P}(E)$是集合类的一个集合.

1.191　判定下列关系式是对或是错:

(a)$\{a,b\}\subseteq F$;　(b)$[\{1,2,3\}]\subseteq E$;　(c)$F\subseteq E$;

(d)$\varnothing\subseteq F$;　(e)$1\in E$;　(f)$\{2,3\}\in E$.

解　☞ (a)错.$\{a,b\}$是 F 的一个元素,而不是子集.

(b)对.

(c)错.$\{1,2\}\in F$ 不属于E.

(d)对.空集是任一集合的子集.

(e)错.元素 1 不是 E 的元素.

(f)对.

1.192　求集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$的幂集 $\mathscr{P}(A)$.

解　☞ 列出 A 的所有子集,共有 $2^5=32$ 个子集:

$$\mathscr{P}(A)=[\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\\ \{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\},\{1,2,3\},\\ \{1,2,4\},\{1,2,5\},\{2,3,4\},\{2,3,5\},\{3,4,5\},\{1,3,4\},\\ \{1,3,5\},\{1,4,5\},\{2,4,5\}\{1,2,3,4\},\{1,2,3.5\},\\ \{1,2,4,5\},\{1,3,4,5\},\{2,3,4,5\},A].$$

1.193　求 $A=[\{a,b\},\{c\},\{d,e,f\}]$的幂集.

解　☞ 由于 A 有 3 个元素,因此 $\mathscr{P}(A)$有 $2^3=8$ 个元素:

$$\mathscr{P}(A)=\{A,[\{a,b\},\{c\}],[\{a,b\},\{d,e,f\}],[\{c\},\{d,e,f\}],\\ [\{a,b\}],[\{c\}],[\{d,e,f\}],\varnothing\}$$

1.194　设 A 是具有 m 个元素的一个有限集.证明 $\mathscr{P}(A)$有 2^m 个元素.

证　☞ 设 X 表示 $\mathscr{P}(A)$的任一成员.对于每一个 $a\in A$,有两种可能性:$a\in X$ 或 $a\notin X$.因 A 有 m 个元素,因此有

$$\overbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot\cdots\cdot 2}^{m\text{次}}=2^m$$

个不同的集合 X.这就是说,$\mathscr{P}(A)$有 2^m 个成员.

1.8　数学归纳法

1.195　叙述数学归纳法原理的两个等价形式.

解　☞ 形式Ⅰ:设 P 是定义在正整数 $\mathbf{N}$ 上的一个命题,即对于 $\mathbf{N}$ 中每一个 n,$P(n)$或是真或是假.设 P 有下面两个性质:

(i)$P(1)$是真,

(ii)每当 $P(n)$是真时,$P(n+1)$也是真,

则 P 对每个正整数是真.

形式Ⅱ("完全归纳法"):设 P 是定义在正整数集 $\mathbf{N}$ 上的一个命题,使得

(i) $P(1)$ 是真,

(ii)每当对所有 $1\leqslant k\leqslant n$, $P(k)$ 是真时, $P(n)$ 也是真,

则 P 对每个正整数是真.

注:上述归纳法原理开始于 $n_0=1$,且证明对所有 $n\geqslant 1$, $P(n)$ 是真.另外,我们也可以开始于某个整数 $n_0=m$,且证明对所有 $n\geqslant m$, $P(n)$ 是真.

1.196 设 P 是命题:前 n 个奇数之和是 n^2,即

$$P(n):1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

(第 n 个奇数是 $2n-1$,且下一个奇数是 $2n+1$.)证明对每个正整数 $n\in\mathbf{N}$, P 是真.

证 ☞ 由于 $1=1^2$,因此 $P(1)$ 是真.设 $P(n)$ 是真,我们将 $2n+1$ 加到 $P(n)$ 的两端,得

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)=n^2+(2n+1)=(n+1)^2.$$

它便是 $P(n+1)$.这就是说,每当 $P(n)$ 是真时, $P(n+1)$ 也是真.根据归纳法原理,对所有的 n, P 是真.

1.197 证明命题:前 n 个正整数之和是 $\frac{1}{2}n(n+1)$,即

$$P(n):1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1).$$

证 ☞ 由于 $1=\frac{1}{2}(1)(1+1)$,因此这个命题对 $n=1$ 成立,即 $P(1)$ 是真.设 $P(n)$ 是真,我们将 $n+1$ 加到 $P(n)$ 的两端,得

$$\begin{aligned}1+2+3-\cdots+n+(n+1)&=\frac{1}{2}n(n+1)+(n+1)\\&=\frac{1}{2}[n(n+1)+2(n+1)]\\&=\frac{1}{2}[(n+1)(n+2)],\end{aligned}$$

它是 $P(n+1)$.这就是说,每当 $P(n)$ 是真时, $P(n+1)$ 也是真.根据归纳法原理,对所有的 n, P 是真.

1.198 证明下面的命题:

$$P(n):\quad 1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

证 ☞ 由于 $1=(1)(2)(3)/6$,因此 $P(1)$ 是真.假设 $P(n)$ 是真,我们将 $(n+1)^2$ 加到 $P(n)$ 的两端,得

$$\begin{aligned}1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}\\&=\frac{(n+1)[(2n^2+n)+(6n+6)]}{6}\\&=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}\\&=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\\&=\frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6},\end{aligned}$$

它是 $P(n+1)$.这样,每当 $P(n)$ 是真时, $P(n+1)$ 也是真.根据归纳法原理,对所有的 n, P 是真.

1.199 证明下面的命题:

$$P(n):\quad 1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}.$$

证 ☞ 因 $1=1(3-2)/2$,因此 $P(1)$ 为真.设 $P(n)$ 是真,我们将 $[3(n+1)-2]=(3n+1)$ 加到

$P(n)$两端得

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)+(3n+1)=\frac{n(3n-1)}{2}+(3n+1)$$
$$=\frac{n(3n-1)+2(3n+1)}{2}$$
$$=\frac{3n^2+5n+2}{2}$$
$$=\frac{(n+1)(3n+2)}{2}$$
$$=\frac{(n+1)[3(n+1)-1]}{2},$$

它便是 $P(n+1)$. 因此, 每当 $P(n)$为真时, $P(n+1)$也是真. 根据归纳法原理, 对所有的 n, P 是真.

1.200 证明下面的命题:

$$P(n):\quad \frac{1}{1(3)}+\frac{1}{3(5)}+\frac{1}{5(7)}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

证 ☞ 由于 $1/3=1/(2+1)$, 因此 $P(1)$是真. 假设 $P(n)$是真, 我们将 $1/[(2n+1)(2n+3)]$加到 $P(n)$的两端得

$$\frac{1}{1(3)}+\frac{1}{3(5)}+\frac{1}{5(7)}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$
$$=\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)}$$
$$=\frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)}$$
$$=\frac{n+1}{2n+3}=\frac{n+1}{2(n+1)+1},$$

它是 $P(n+1)$. 这样, 每当 $P(n)$是真时, $P(n+1)$也是真, 根据归纳法原理, 对所有的 n, P 是真.

1.201 证明下面的命题(对 $n\geqslant 0$):

$$P(n):\quad 1+2+2^2+2^3+\cdots+2^n=2^{n+1}-1.$$

证 ☞ 由于 $1=2^1-1$, 我们有 $P(0)$为真. 假设 $P(n)$为真, 我们将 2^{n+1}加到 $P(n)$的两端, 得

$$1+2+2^2+\cdots+2^n+2^{n+1}=2^{n+1}-1+2^{n+1}$$
$$=2(2^{n+1})-1=2^{n+2}-1,$$

它便是 $P(n+1)$. 因此, 每当 $P(n)$是真时, $P(n+1)$也是真. 根据归纳法原理, 对所有的 $n\geqslant 0$, P 是真.

1.202 证明对 $n\geqslant 4$, $n!\geqslant 2^n$.

证 ☞ 由于 $4!=24\geqslant 2^4=16$, 因此对 $n=4$, 公式成立. 假设 $n!\geqslant 2^n$, 我们有

$$(n+1)!=n!(n+1)\geqslant 2^n(n+1)\geqslant 2^n(2)=2^{n+1}.$$

因此对 $n+1$ 该公式成立. 根据归纳法, 该公式对 $n\geqslant 4$ 成立.

1.203 证明对 $n\geqslant 3$, $n^2\geqslant 2n+1$.

证 ☞ 由 $3^2=9\geqslant 2(3)+1=7$, 该公式对 $n=3$ 成立. 假设 $n^2\geqslant 2n+1$, 我们有

$$(n+1)^2=n^2+2n+1\geqslant 2n+1+2n+1$$
$$=2n+2+2n\geqslant 2n+2+1=2(n+1)+1.$$

这样, 对于 $n+1$, 该公式成立. 根据归纳法, 该公式对 $n\geqslant 3$ 成立.

1.204 证明对 $n\geqslant 4$, $2^n\geqslant n^2$.

证 ☞ 由于 $2^4=16=4^2$, 因此对 $n=4$, 该公式成立. 现设 $2^n\geqslant n^2$. 由于 $n^2\geqslant 2n+1$(习题 1.203), 我们有

$$2^{n+1}=2(2^n)\geqslant 2(n^2)=n^2+n^2\geqslant n^2+2n+1=(n+1)^2.$$

于是该公式对 $n+1$ 成立. 根据归纳法, 该公式对所有 $n\geqslant 4$ 成立.

定理 1.8 设 $*$ 是集合 S 上的一个结合的运算, 即对任何 3 个元素 $a,b,c\in S$, 都有 $(a*b)*c=a*(b*c)$. 那么, n 个有序元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的所有可能的"积"都是相等的.

(这样,涉及一个结合的运算时,我们可以省去圆括号,且简单地写成 $a_1*a_2*\cdots*a_n$.)

1.205 证明定理1.8.

证 ☞ 对于 n 用归纳法证明. $n=1$ 和 $n=2$ 时无疑是真的,且 $n=3$ 时,因 $*$ 是结合的,因此也是真的.设 $n>3$,且应用记号(用毗连替代 $*$)

$$(a_1a_2\cdots a_n)\equiv(\cdots((a_1a_2)a_3)\cdots)a_n$$

以及

$$[a_1a_2\cdots a_n]\equiv \text{任一积}.$$

我们将证明,$[a_1a_2\cdots a_n]=(a_1a_2\cdots a_n)$.事实上,由于$[a_1a_2\cdots a_n]$表示某一个积,因此存在一个 $r<n$ 使得$[a_1a_2\cdots a_r]=[a_1a_2\cdots a_r][a_{r+1}\cdots a_n]$.因此,根据归纳法,

$$\begin{aligned}[a_1a_2\cdots a_n]&=[a_1a_2\cdots a_r][a_{r+1}\cdots a_n]\\&=[a_1a_2\cdots a_r](a_{r+1}\cdots a_n)\\&=[a_1a_2\cdots a_r]((a_{r+1}\cdots a_{n-1})a_n)\\&=([a_1\cdots a_r](a_{r+1}\cdots a_{n-1}))a_n\\&=[a_1\cdots a_{n-1}]a_n\\&=(a_1\cdots a_{n-1})a_n\\&=(a_1a_2\cdots a_n).\end{aligned}$$

定理得证.

1.206 证明数学归纳法原理(完全形式)等价于论述:每个非空的正整数集合含有一个最小的数(对于 N 的**良序原理**).

证 ☞ 假设N是良序的,并且我们给出一个满足归纳法假设条件(i)和(ii)的命题 $P(n)$.设 F 表示N的一个子集,在此 P 是假的.若 F 是非空的,则有一个最小的数 q;由(i),$q\geqslant 2$,于是 $P(1),\cdots,P(q-1)$都是真,因而由(ii),$P(q)$是真.这个矛盾说明 F 必是空的.这样,对每一正整数,P 是真且归纳法原理成立.

相反地,我们假设归纳法原理成立且存在N的一个子集 S,它没有最小数.设 S^*是 S 的补集,并且定义命题 $P(n)$:n 属于S^*.$P(n)$满足完全归纳法条件(i)和(ii)(若它不满足(i)和(ii),则 S 将有一个最小数),因此 $S^*=\mathbf{N}$,这意味着 S 是空的.故N是良序的.

1.9 论证和文图

这一节应用文图去判定一个论证的正确性.

1.207 将下列陈述画成文图:

(a)所有学生是懒散的; (b)有些学生是懒散的;

(c)没有学生是懒散的; (d)并非所有学生是懒散的.

解 ☞ (a)懒散人的集合包含学生的集合,如图1-24(a)所示.

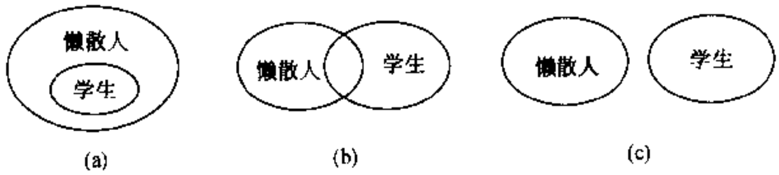


图1-24

(b)学生的集合和懒散人集合有一些公共元素,如图1-24(b)所示.

(c)学生集合和懒散人集合是不相交的,如图1-24(c)所示.

(d)学生集合是不含于懒散人集合之中.这就引出图1-24(b)(有可能交集是空的).

1.208 说明下面的论证(摘自于《阿莉斯在奇境中》的作者刘易斯·卡罗尔写的一本逻辑书)是正确的:

S_1：我的果酱盘只是我有的马口铁做的东西，

S_2：我发现你的所有礼品都很有用，

S_3：我的果酱盘没有用，

S：你送给我的礼品不是马口铁做的.

(水平线上的陈述 S_1，S_2 和 S_3 表示假设，线下的陈述表示结论.若从假设条件 S_1，S_2 和 S_3 按逻辑推理得到结论 S，则该论证是正确的.)

解 ☞ 由 S_1，物品马口铁是含于果酱盘集合中，以及由 S_3，果酱盘集合与有用的东西集合是不相交的.因此画出图 1-25 的文图.

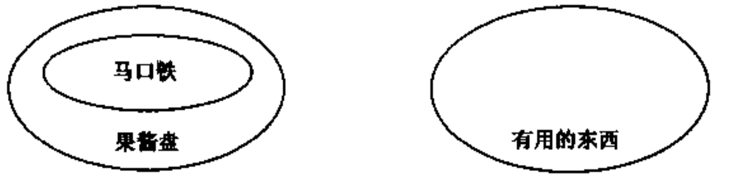


图 1-25

由 S_2，“你的礼品”的集合是有用东西的集合的一个子集，因此画出图 1-26.根据此文图，因“你的礼品”集合和物品马口铁的集合是不相交的，因此显然结论是正确的.

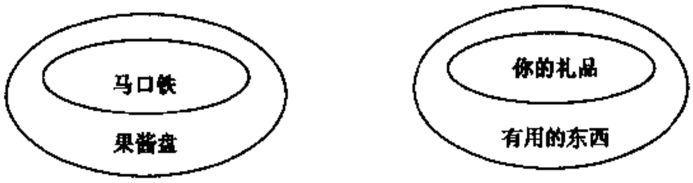


图 1-26

1.209　考虑下列假设条件：

S_1：诗人是快乐的人，

S_2：每个医生是富有的，

S_3：没有人既快乐又富有.

判定下列各个结论的正确性：

(a)没有诗人是富有的；(b)医生是快乐的人；(c)没有人既是诗人又是医生.

解 ☞ 根据 S_1，快乐人集合包含诗人集合；又根据 S_3，快乐人集合和富有人集合是不相交的.因此画出图 1-27 的文图.



图 1-27

根据 S_2，富有人集合包含医生集合.这样，画出图 1-28 的文图.从这个文图看出，(a)和(c)是正确的结论，而(b)则是不正确的.



图 1-28

1.210 构造一个文图,说明下面的论证是不正确的,这里前提成立但结论不成立:

S_1:一些学生是懒散的,

S_2:所有男生是懒散的,

S:一些学生是男性的.

解 ☞ 考虑图 1-29(a)的文图,两个前提都成立,但结论不成立.即使可能构造一个文图使前提和结论都成立,如图 1-29(b),这个论证也是不正确的.换句话说,要一个论证正确,当前提是真的时,结论必须总是真的.

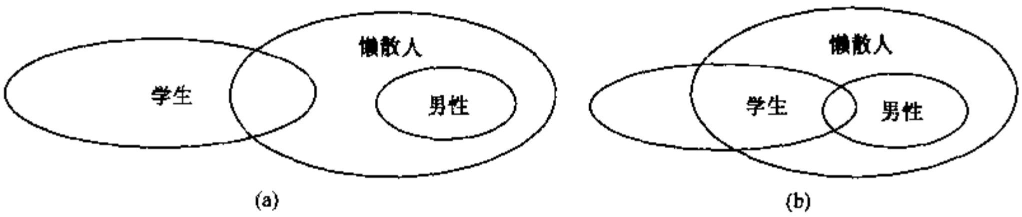


图 1-29

1.211 说明下面论证是不正确的:

S_1:所有的学生是懒散的,

S_2:富有人没有一个是学生,

S:懒散人不富有.

解 ☞ 图 1-30 给两个前提都成立但结论不成立的文图,因此这个论证不正确.

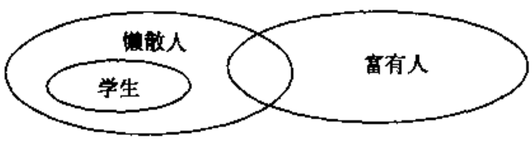


图 1-30

1.212 说明下面的论证是正确的:

S_1:没有学生是懒散的,

S_2:约翰是一位艺术家,

S_3:所有艺术家是懒散的,

S:约翰不是一名学生.

解 ☞ 根据 S_3,艺术家集合是懒散人集合的一个子集.根据 S_1,懒散人集合和学生集合是不相交的.这样,画出图 1-31 的文图.根据 S_2,约翰属于艺术家集合,因此从前提得出结论"约翰不是一

名学生".换句话说,该论证是正确的.

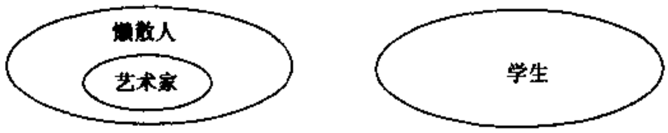


图 1-31

1.213　说明下面的论证是正确的：

S_1:所有的律师是富有的,

S_2:诗人是敏感的,

S_3:奥德莉是一名律师,

S_4:没有一个敏感的人是富有的,

S:奥德莉不是一位诗人.

解 ☞ 由前提 S_1, S_4 和 S_2 导出图 1-32 的文图.根据 S_3,奥德莉属于律师的集合,它与诗人集合不相交.因此"奥德莉不是一位诗人"是一个正确的结论.

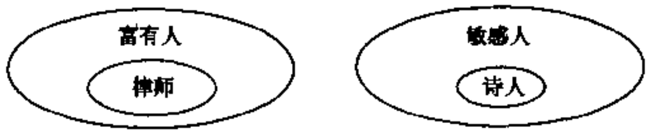


图 1-32

1.214　说明下面的论证是不正确的(即使每个陈述都是正确的)：

S_1:某些动物能思考,

S_2:人是动物,

S:人能思考.

解 ☞ 图 1-33 给出两个前提成立但结论不成立的文图.因此该论证是不正确的.

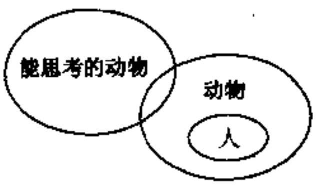


图 1-33

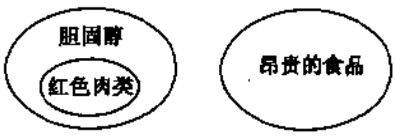


图 1-34

1.215　判定论证：

S_1:所有红色肉类含有胆固醇,

S_2:没有昂贵的食品含有胆固醇,

S:红色肉类不是昂贵的

的正确性.

解 ☞ 由前提 S_1 和 S_2 导出图 1-34 的文图.这样,红色肉类和昂贵食品集合是不相交的.因此,S 是一个正确结论.

1.216 判定论证:

S_1:纽约是一个大城市,

S_2:埃里克住在有电车的一个城市,

S_3:没有大城市有电车,

S:埃里克不住在纽约

的正确性.

解 ☞ 由前提 S_1 和 S_3 导出图 1-35 的文图.根据 S_2,埃里克住在有电车的城市.由图 1-35,这样的城市不包含纽约.因此 S 是正确的结论.

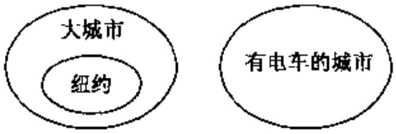


图 1-35

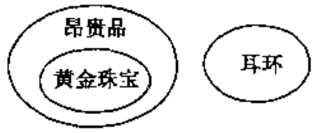


图 1-36

1.217 判定下面的论证的正确性:

S_1:所有黄金珠宝是昂贵的,

S_2:没有耳环是昂贵的,

S:耳环不是黄金做的.

解 ☞ 由前提 S_1 和 S_2 导出图 1-36 的文图.这样,耳环集合与黄金珠宝集合是不相交的,就是说,S 是正确的结论.

1.218 判断下面论证的正确性:

S_1:我的所有朋友是音乐家,

S_2:约翰是我的朋友,

S_3:我的邻居都不是音乐家,

S:约翰不是我的邻居.

解 ☞ 由前提 S_1 和 S_3 导出图 1-37 的文图.根据 S_2,约翰属于朋友集合,它与邻居集合不相交.因此 S 是一个正确的结论,从而该论证是正确的.

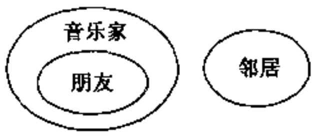


图 1-37

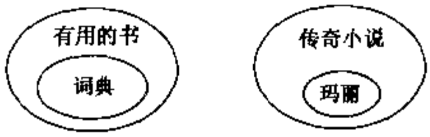


图 1-38

1.219 考虑下面的假设:

S_1:所有的词典都是有用的,

S_2:玛丽自己只有传奇小说,

S_3:没有传奇小说是有用的.

判定下列各个结论的正确性:

(a)传奇小说不是词典;

(b)玛丽自己没有词典;

(c)所有有用的书是词典.

解 ☞ 由 3 个前提导出图 1-38 的文图.从该图得到(a)和(b)是正确的结论.但是,(c)是不正确的结论,因此可以有有用的书不是词典.

1.220 考虑下列假设:

S_1:所有羊毛衫是暖和的,

S_2:我的衣服没有一件是暖和的,

S_3:马歇只卖羊毛衫.

判定下列各个结论的正确性:

(a)我的衣服没有一件是羊毛制的;

(b)马歇的所有衣服是暖和的;

(c)我的衣服没有一件来自马歇.

解 ☞ 由 3 个前提导出图 1-39 的文图,它表明(a),(b)和(c)都是正确的结论.

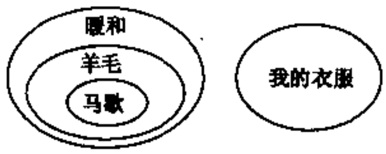


图 1-39

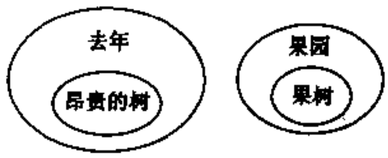


图 1-40

1.221 考虑下列假设:

S_1:我的所有的昂贵的树是去年种植的,

S_2:我的所有水果树在我的果园里,

S_3:果园里没有去年种植的树.

判定下列结论是否正确:

(a)果树是去年种的;

(b)果园里没有昂贵的树;

(c)没有果树是昂贵的.

解 ☞ 由 3 个前提导出图 1-40 的文图.该图表明(b)和(c)是正确结论,但(a)是不正确的.

1.222 考虑下列假设:

S_1:没有实用汽车是昂贵的,

S_2:有太阳顶的汽车是昂贵的,

S_3:所有的货车都是实用的.

判别下列各个结论的正确性:

(a)没有实用汽车有太阳顶;

(b)一些货车是昂贵的;

(c)没有货车有太阳顶;

(d)所有实用汽车都是货车;

(e)有太阳顶的汽车是不实用的.

解 ☞ 由 3 个前提导出图 1-41 的文图.该图表明(a),(c)和(e)都是正确的结论,但(b)和(d)是不正确的.

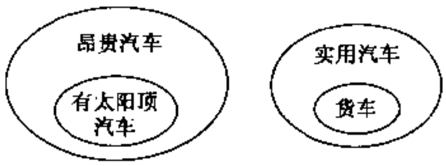


图 1-41

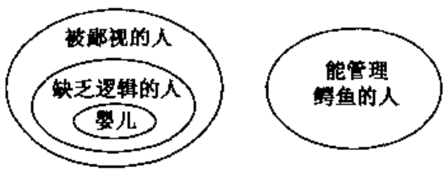


图 1-42

1.223 判定下面论证的正确性：

S_1：婴儿是缺乏逻辑的，

S_2：没有能管理鳄鱼的人被鄙视，

S_3：缺乏逻辑的人被鄙视，

S：婴儿不能管理鳄鱼.

(上述论证摘自刘易斯·卡罗尔的《符号逻辑》，他也是《阿莉斯在奇境中》的作者.)

解 ☞ 由3个前提导出图1-42的文图.由于婴儿集合和能管理鳄鱼的人的集合是不相交的，因此“婴儿不能管理鳄鱼”是正确的结论.

1.224 考虑下列假设：

S_1：所有数学家是有趣味的人，

S_2：只有没有趣味的人成为保险销售员，

S_3：每个天才的人是一个数学家.

判定下列各个结论的正确性：

(a)保险销售员不是数学家；

(b)一些天才的人是保险销售员；

(c)一些天才的人是有趣味的人.

解 ☞ 由3个前提导出图1-43的文图.该图表明(a)和(c)是正确结论(事实上，每个天才的人是有趣味的人)，但(b)是不正确结论.

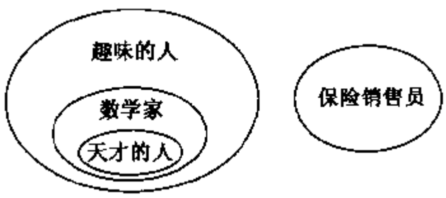


图 1-43

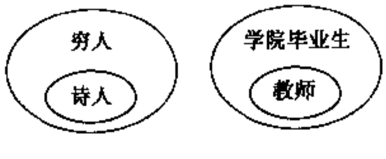


图 1-44

1.225 考虑下列假设：

S_1：所有诗人是贫穷的，

S_2：为了当一名教师，他必须毕业于学院，

S_3：没有学院毕业生是贫穷的.

判别下列各个结论是否正确：

(a)教师是不贫穷的；

(b)诗人不是教师；

(c)学院毕业生不能成为诗人.

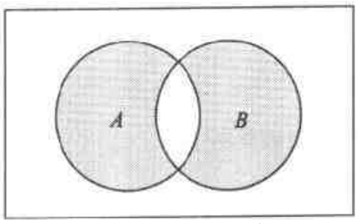
解 ☞ 由3个前提导出图1-44的文图.该图表明(a)，(b)和(c)都是正确结论.

1.10　对称差

1.226　集合 A 和 B 的**对称差**，记作 $A\oplus B$，定义为

$$A\oplus B=(A\cup B)\setminus(A\cap B).$$

这就是说，$A\oplus B$ 是由属于 A 或 B，但不同时属于 A 和 B 的元素组成的集合.（图 1-45 表示 $A\oplus B$ 的一个文图.）证明 $A\oplus B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.



$A\oplus B$ 为阴影部分

图 1-45

证　☞ **方法一**　设 $x\in A\oplus B$，即 x 属于 A 或 B 但不同时属于 A 和 B. 若 $x\in A$，则 $x\notin B$，因而 $x\in A\setminus B$. 若 $x\in B$，则 $x\notin A$，因而 $x\in B\setminus A$. 因此 x 属于 $A\setminus B$ 或 $B\setminus A$，即 $x\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$. 于是，$A\oplus B\subseteq(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

设 $y\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$，则 y 属于 $A\setminus B$ 或 $B\setminus A$. 若 $y\in A\setminus B$，则 y 属于 A 但不同时属于 A 和 B. 若 $y\in B\setminus A$，则 y 属于 B 但不同时属于 A 和 B. 因此 y 属于 A 或 B 但不同时属于 A 和 B，即 $y\in A\oplus B$. 于是，$(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\subseteq A\ominus B$. 综上二结论得到 $A\oplus B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

方法二　图 1-45 的文图中的阴影区域也是 $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$，因此 $A\oplus B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

习题 1.227～1.230 考虑集合：

$A=\{1,2,3,4,5,6\}$，　$B=\{4,5,6,7,8,9\}$，　$C=\{1,3,5,7,9\}$，　$D=\{2,3,5,7,8\}$.

1.227　求(a) $A\oplus B$，(b) $B\oplus C$.

解　☞ (a)首先求得 $A\setminus B=\{1,2,3\}$ 以及 $B\setminus A=\{7,8,9\}$. 于是 $A\oplus B$ 是并：

$$A\oplus B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=\{1,2,3\}\cup\{7,8,9\}=\{1,2,3,7,8,9\}.$$

(b)首先求得 $B\setminus C=\{4,6,8\}$ 以及 $C\setminus B=\{1,3\}$. 于是

$$B\oplus C=\{1,3,4,6,8\}.$$

1.228　求(a) $C\oplus D$，(b) $A\oplus D$.

解　☞ (a) $C\setminus D=\{1,9\}$，$D\setminus C=\{2,8\}$，因此

$$C\oplus D=\{1,2,8,9\}.$$

(b) $A\setminus D=\{1,4,6\}$，$D\setminus A=\{7,8\}$，因此

$$A\oplus D=\{1,4,6,7,8\}.$$

1.229　求(a) $A\cap(B\oplus D)$，(b) $(A\cap B)\oplus(A\cap D)$.

解　☞ (a) $B\setminus D=\{4,6,9\}$，$D\setminus B=\{2,3\}$，因此 $B\oplus D=\{2,3,4,6,9\}$. 于是

$$A\cap(B\oplus D)=\{2,3,4,6\}.$$

(b)先求得 $A\cap B=\{4,5,6\}$ 和 $A\cap D=\{2,3,5\}$. 其次计算

$$(A\cap B)\setminus(A\cap D)=\{4,6\}$$

以及

$$(A\cap D)\setminus(A\cap B)=\{2,3\},$$

因此

$$(A\cap B)\oplus(A\cap D)=\{2,3,4,6\}.$$

（注意到，$A\cap(B\oplus D)=(A\cap B)\oplus(A\cap D)$）

1.230 求(a)$A\cup(B\oplus D)$,(b)$(A\cup B)\ominus(A\cup D)$.

解 ☞ (a)由习题 1.229(a),$B\ominus D=\{2,3,4,6,9\}$,因此

$$A\cup(B\oplus D)=\{1,2,3,4,5,6,9\}.$$

(b)$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,$A\cup D=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,因此

$$(A\cup B)\setminus(A\cup D)=\{9\}$$

以及

$$(A\cup D)\setminus(A\cup B)=\varnothing,$$

故$(A\cup B)\oplus(A\cup D)=\{9\}$.

(注意到,$A\cup(B\oplus D)\neq(A\cup B)\oplus(A\cup D)$.同习题 1.229 比较.)

定理 1.9 对称差满足下列性质:

(i)$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$ (结合律);

(ii)$A\oplus B=B\oplus A$ (交换律);

(iii)若 $A\oplus B=A\oplus C$,则 $B=C$ (消去律);

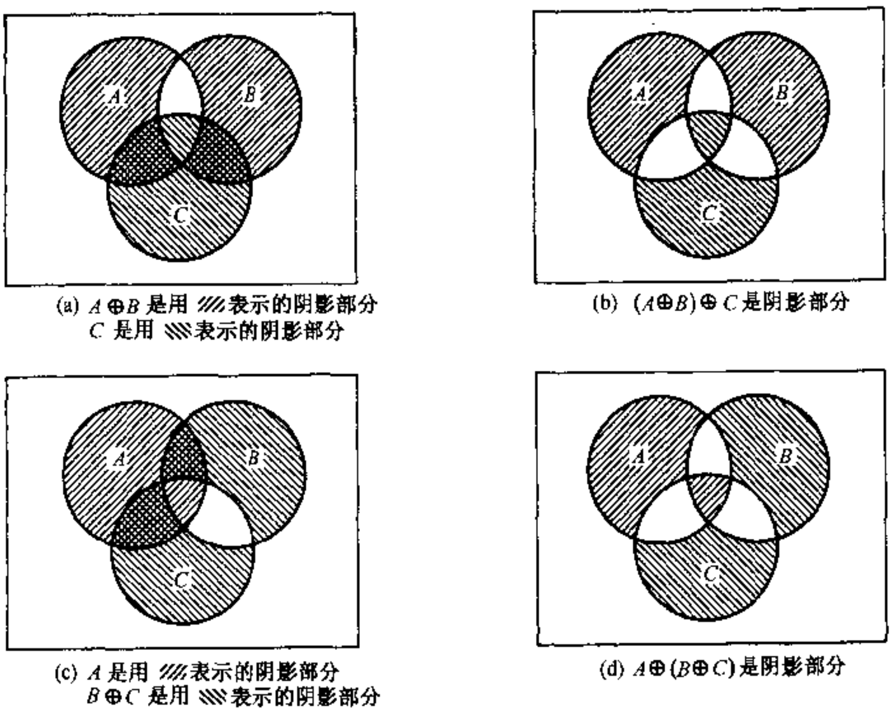
(iv)$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$ (分配律).

1.231 证明定理 1.9(i).

证 ☞ 考虑集合 A,B,C 的一个文图.阴影 $A\oplus B$ 是按一个方向一笔一画地画(///),阴影 C 是按另一方向一笔一画地画(\\\\\\),如图 1-46(a)所示.于是$(A\oplus B)\oplus C$ 由图 1-46(a)中按一个方向或另一方向但不是按两个方向画的阴影区域组成,如图 1-46(b)所示.

现在,阴影 A 是按一个方向一笔一画地画(///),以及阴影 $B\oplus C$ 是按另一方向一笔一画地画(\\\\\\),如图 1-46(c)所示.因此 $A\oplus(B\oplus C)$由图 1-46(c)中按一个方向或另一个方向但不是按两个方向画的阴影区域组成,如图 1-46(d)所示.

图 1-46(b)和图 1-46(d)表明阴影区域相同,故有$(A\oplus B)\ominus C=A\ominus(B\oplus C)$.这正是我们所要证明的.



(a) $A\oplus B$ 是用 ///表示的阴影部分 C 是用 \\\\\\表示的阴影部分

(b) $(A\oplus B)\oplus C$ 是阴影部分

(c) A 是用 ///表示的阴影部分 $B\oplus C$ 是用 \\\\\\表示的阴影部分

(d) $A\oplus(B\oplus C)$是阴影部分

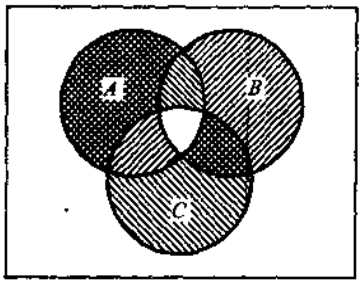
图 1-46

1.232 证明定理 1.9(ii).

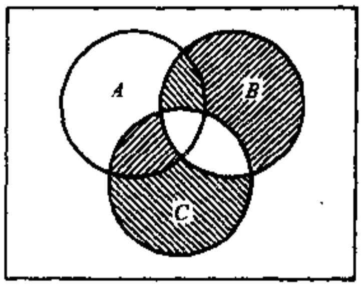
证 ☞ $A\ominus B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(B\setminus A)\cup(A\setminus B)=B\oplus A$.

1.233　证明定理 1.9(iii).

证 ☞ 考虑集合 A,B,C 的一个文图.阴影 $A\oplus B$ 是按一方向一笔一画地画(///),以及阴影 $A\oplus C$是另一方向一笔一画地画(\\\\\\),如图 1-47(a).现在图 1-47(b)表明图 1-47(a)中按一个方向或另一方向但不是两个方向画的阴影区域.若 $A\oplus B=A\oplus C$,则图 1-47(b)的阴影区域必是空集.因此正如所要求的 $B=B\cap C=C$.



(a) $A\oplus B$ 是用 ///表示的阴影部分
$A\oplus C$ 是用 \\\\\\表示的阴影部分

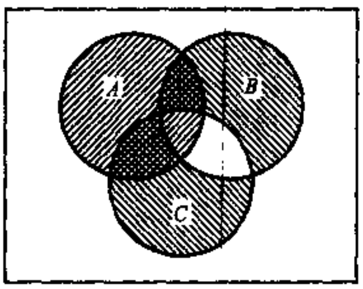


(b)

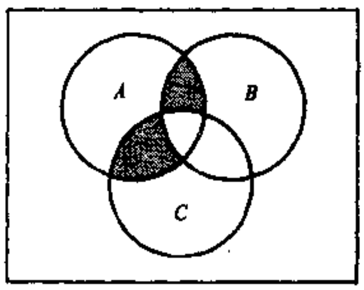
图 1-47

1.234　证明定理 1.9(iv).

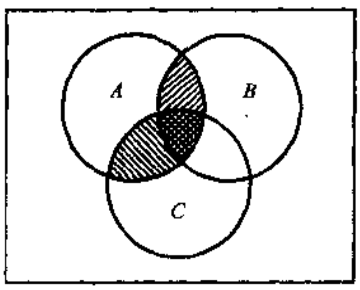
证 ☞ 考虑集合 A,B,C 的文图.阴影 A 是按一个方向一笔一画地画(///),阴影 $B\oplus C$ 是按另一方向一笔一画地画(\\\\\\),如图 1-48(a).于是交叉区域是 $A\cap(B\oplus C)$,它是图 1-48(b)的阴影部分.现在,阴影 $A\cap B$ 是按一个方向一笔一画地画(///),以及阴影 $A\cap C$ 是按另一方向一笔一画地画(\\\\\\),如图 1-48(c).因此,$(A\cap B)\oplus(A\cap C)$由图 1-48(c)中按一个方向或另一方向但不是两个方向画的阴影区域组成.这些区域和图 1-48(b)的那些阴影区域相同.故 $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$.



(a)



(b)



(c)

图 1-48

1.235　描述集合 $A\oplus B\oplus C$(图 1-46(b)所表示的).对于 4 个集合的对称差$(A\oplus B\oplus C\oplus D)$或更多集合的对称差需要圆括号吗?

解 ☞ $A\oplus B\oplus C$ 恰好在 3 个集合之一或同时在 3 个集合的元素组成.定理 1.9(i)说明对称差

满足结合律,因而根据定理 1.8,对于任意多个集合的对称差无需圆括号.

1.11 实数系统 R、数集

这一节涉及实数系统 **R** 的子集,包括有理数集 **Q**,整数集 **Z** 和自然数(正整数)集 **N**.

1.236 设 A 和 B 是数集,k 是一个数.定义:(a)$A+B$,(b)AB,(c)$k+A$,(d)kA.

解 ☞ (a)$A+B$ 是 A 的每个数和 B 的每个数相加得到的数(略去重复的)的集合,即

$$A+B=\{x:x=a+b,a\in A,b\in B\}.$$

(b)AB 是 A 的每个数和 B 的每个数相乘得到的数的集合,即

$$AB=\{x:x=ab,a\in A,b\in B\}.$$

(c)集合 $k+A$ 是将 k 和 A 的每个数相加得到的.

(d)集合 kA 是 A 的每个数乘以 k 得到的.

习题 1.237~1.240 涉及集合 $A=\{3,4,5,6\}$,$B=\{2,3,5\}$ 和 $C=\{1,4\}$.

1.237 求(a)$2+A$,(b)$3B$.

解 ☞ (a)将 2 加到 A 的每个元素得到

$$2+A=\{5,6,7,8\}.$$

(b)B 的每个元素乘以 3 得到

$$3B=\{6,9,15\}.$$

1.238 求 $A+C$.

解 ☞ 将 A 的每个元素和 B 的每个元素相加,得到

$$\begin{aligned}A+C&=\{3+1,3+4,4+1,4+4,5+1,5+4,6+1,6+4\}\\&=\{4,7,5,8,6,9,7,10\}\\&=\{4,5,6,7,8,9,10\}.\end{aligned}$$

1.239 求 $B+B$.

解 ☞ 将 B 的每个元素和 B 的每个元素相加,得到

$$\begin{aligned}B+B&=\{2+2,2+3,2+5,3+2,3+3,3+5,5+2,5+3,5+5\}\\&=\{4,5,7,5,6,8,7,8,10\}\\&=\{4,5,6,7,8,10\}.\end{aligned}$$

1.240 求 BB.

解 ☞ B 的每个元素和 B 的每个元素相乘,得到

$$\begin{aligned}BB&=\{4,6,10,6,9,15,10,15,25\}\\&=\{4,6,9,10,15,25\}.\end{aligned}$$

1.241 求一个无限集合 A 使得 $A+A$ 和 A 是不相交的.

解 ☞ 设 $A=\{1,3,5,\cdots\}=\{$正奇数$\}$,则 $A+A$ 仅仅由偶数组成.

1.242 求一个无限集合 B 使得 $B+B=B$.

解 ☞ 设 $B=\{0,1,2,\cdots\}=\{$非负整数$\}$,则 $B+B=B$.

1.243 求一个有限集合 C 使得(a)$C+C=C$,(b)$CC=C$.

解 ☞ (a)设 $C=\{0\}$,则 $C+C=C$.

(b)设 $C=\{0,1\}$,则 $CC=C$.

1.244 集合 **Q**, **Z**, **N** 和 **R** 之间的包含关系是什么? $\mathbf{Q}^c$ 称为什么?

解 ☞ 正整数集 **N** 包含在整数集 **Z** 中,依次,整数集 **Z** 包含在有理数集 **Q** 中,以及它们都是实数集 **R** 的子集.这就是说,

$$\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}.$$

$\mathbf{Q}^c$ 的元素数称为**无理数**.

1.245 讨论表示法"实轴 **R**"的含义.

解 ☞ 实数系统 **R** 的最重要的性质之一是 **R** 可用一直线上的点来表示.具体地说,如图 1-49,选取一个点称为**原点**用来表示 0,另一个点,通常取在 0 的右边,表示 1.于是,有一个通常的方法将直线上的点和实数分成一对一对,即每个点将表示惟一的一个实数并且每个实数将用惟一的一个点表示.由于这个缘故,我们视 **R** 为**实线**(**实轴**)且可互换使用词点和数.

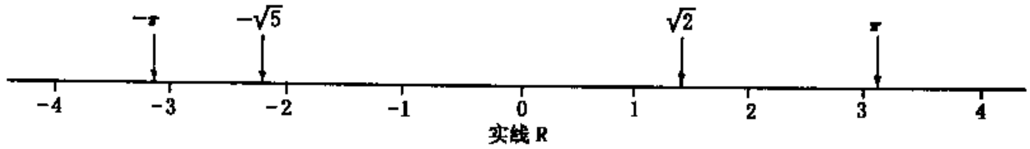


图 1-49

正数

1.246 从几何上描述正和负(实)数,并从公理上解释正数是怎么定义的.

解 ☞ 实线上 0 的右边,即和 1 同一边的数是**正数**,0 左边的数是**负数**.正数集合可用下面的公理来描述:

[P_1]若 $a \in \mathbf{R}$,则下列之一是真的:a 是正数;$a=0$;$-a$ 是正数.

[P_2]若 $a, b \in \mathbf{R}$ 是正数,则它的和 $a+b$ 以及积 $a \cdot b$ 也是正数.

于是,我们说 a 是负数,如果 $-a$ 是正数.这样,由[P_1],任一非零数是正数或是负数,但不能同时是正数和负数.

1.247 仅仅应用公理[P_1]和[P_2]证明 1 是正数.

证 ☞ 由[P_1],1 或 -1 是正数.若 -1 是正数,则由[P_2],乘积 $(-1)(-1)=1$ 是正数,但这与[P_1]矛盾,因[P_1]说明 1 和 -1 不能同时是正的.因此假设 -1 为正是错的,故 1 是正数.

1.248 证明实数 -2 是负的.

证 ☞ 根据习题 1.247,1 是正数,因而,由[P_2],和 $1+1=2$ 是正数.因此 -2 不是正数,即 -2 是负数.

1.249 证明 1/2 是一个正数.

证 ☞ 由[P_1],$-1/2$ 或 $1/2$ 是正数.假设 $-1/2$ 是正数,从而,由[P_2],和 $(-1/2)+(-1/2)=-1$ 也是正数,但是,根据习题 1.247,1 是正数,-1 不是正数,这就产生矛盾,因此 1/2 是正数.

1.250 证明一个正数 a 和一个负数 b 的乘积是负数.

证 ☞ 若 b 是负数,则 $-b$ 是正数,因而,由[P_2],乘积 $a\cdot(-b)$ 也是正数.但 $a\cdot(-b)=-(a\cdot b)$,因此 $-(a\cdot b)$ 是正数,故 $a\cdot b$ 是负数.

1.251 证明负数 a 和 b 的乘积是正数.

证 ☞ 若 a 和 b 都是负数,则 $-a$ 和 $-b$ 都是正数.因此,据[P_2],乘积 $(-a)\cdot(-b)$ 是正数.但 $a\cdot b=(-a)\cdot(-b)$,因此 $a\cdot b$ 是正数.

有序不等式

1.252 解释在实数系统 **R** 中如何引进“次序”概念.

解 ☞ 在 **R** 中,次序关系用正面概念定义如下.设 a 和 b 是实数.若 $b-a$ 是正数,则实数 a 小于实数 b,记作 $a<b$.我们也用下列记号:

$a>b$:实数 a 大于实数 b,意指 $b<a$;

$a\leqslant b$:实数 a 小于等于 b,意指 $a<b$ 或 $a=b$;

$a\geqslant b$:实数 a 大于等于 b,意指 $b\leqslant a$.

从几何上说,

$a<b$ 表示：a 位于实线 **R** 上 b 的左边；

$a>b$ 表示：a 位于实线 **R** 上 b 的右边.

我们还注意到，a 依 $a>0$ 或 $a<0$ 而确定是正的或是负的. 我们称关系$<$，$>$，$\leqslant$和$\geqslant$为不等以区别于相等关系$(=)$. 我们还称$<$和$>$为严格不等.

1.253 用记号形式写下列各个陈述：

(a)a 小于b； (b)a 不大于b； (c)a 小于或等于b；

(d)a 大于b； (e)a 不小于b； (f)a 不大于或等于b.

解 ☞ 一条竖或斜线穿过一个符号以表示该符号的否定. (a)$a<b$，(b)$a\not>b$，(c)$a\leqslant b$，(d)$a>b$，(e)$a\not<b$，(f)$a\not\geqslant b$.

1.254 解释 $a<x<b$ 的含义和几何意义.

解 ☞ 这里，$a<x<b$ 意指 $a<x$ 且 $x<b$. 因此 x 位于实线上的 a 和 b 之间.

1.255 在给定的实数之间用不等记号重写下列的几何关系：

(a)y 在 8 的右边； (b)z 在 -3 的左边；

(c)x 在 -3 和 7 之间； (d)w 在 5 和 1 之间.

解 ☞ $a<b$ 意指在直线上 a 位于 b 的左边.

(a)$y>8$ 或 $8<y$.

(b)$z<-3$.

(c)$-3<x$ 且 $x<7$，或更简明地，$-3<x<7$.

(d)$1<w<5$.

定理 1.10

(i)若 $a<b$，则 $b\not<a$；

(ii)若 $a<b$ 且$b<c$，则 $a<c$.

1.256 证明定理 1.10(i).

证 ☞ 根据定义，$a<b$ 意指 $b-a$ 是正的. 因此，由$[P_1]$，$-(b-a)=a-b$ 不是正的. 故 $b\not<a$，这正是所要证明的不等式.

1.257 证明定理 1.10(ii).

证 ☞ 据定义，$a<b$ 且 $b<c$ 意指 $b-a$ 和 $c-b$ 都是正的. 由$[P_2]$，两个正数的和$(b-a)+(c-b)=c-a$ 是正的. 因此，据定义有 $a<c$.

定理 1.11 设 a，b 和 c 是实数.

(i)若 $a<b$，则 $a+c<b+c$；

(ii)若 $a<b$ 且c 是正的，则 $ac<bc$；

(iii)若 $a<b$ 且c 是负的，则 $ac>bc$.

1.258 证明定理 1.11(i).

证 ☞ 根据定义，$a<b$ 意指 $b-a$ 是正的. 但

$$(b+c)-(a+c)=b-a,$$

因此$(b+c)-(a+c)$是正的. 故有 $a+c<b+c$.

1.259 证明定理 1.11(ii).

证 ☞ 根据定义，$a<b$ 意指 $b-a$ 是正的. 因 c 也是正的，因此由$[P_2]$，乘积 $c(b-a)=bc-ac$ 是正的. 故有 $ac<bc$.

1.260 证明定理 1.11(iii).

证 ☞ 根据定义，$a<b$ 意指 $b-a$ 是正的. 由$[P_1]$，若 c 是负的，则 $-c$ 是正的. 因此，由$[P_2]$，乘积$(b-a)(-c)=ac-bc$ 也是正的. 这样，根据定义，$bc<ac$，或等价地，$ac>bc$.

1.261 证明：设 a 和b 都是正数，则当且仅当 $a^2<b^2$ 时，$a<b$.

证　假设 $a<b$. 由于 a 和 b 都是正的, 因此 $a^2<ab$ 且 $ab<b^2$, 从而 $a^2<b^2$.

另一方面, 设 $a^2<b^2$, 则 $b^2-a^2=(b+a)(b-a)$ 是正的. 由于 a 和 b 都是正的, 因此和 $b+a$ 是正的, 从而 $b-a$ 是正的(否则 $(b+a)(b-a)$ 将是负的). 故由定义有 $a<b$.

1.262　证明一个正数 a 与其倒数 $1/a$ 之和大于或等于 2, 即若 $a>0$, 则 $a+1/a\geqslant 2$.

证　若 $a=1$, 则 $1/a=1$, 因而 $a+1/a=1+1=2$. 另一方面, 若 $a\neq 1$, 则 $a-1\neq 0$, 从而

$$(a-1)^2>0 \quad 或\ a^2-2a+1>0,$$

即

$$a^2+1>2a.$$

因 a 是正的, 我们用 a 除该不等式两端得到

$$a+1/a>2.$$

区间

1.263　设 a 和 b 是实数使得 $a<b$. 定义从 a 到 b 的(有限)区间. 阐明实线上的区间.

解　满足不等式:

$$a<x<b,$$
$$a\leqslant x\leqslant b,$$
$$a<x\leqslant b,$$
$$a\leqslant x<b$$

的所有 x 的集合分别称为从 a 到 b 的开区间, 闭区间, 开-闭区间, 闭-开区间. 点 a 和 b 称为区间端点. 我们看到, 一个闭区间同时含有两个端点, 以及开-闭区间和闭-开区间恰好含有其端点的一个.

图 1-50 表明这 4 个区间. 注意, 在每个图形中, 端点 a 和 b 是圆圈, a 和 b 之间的线更粗, 若端点属于区间, 则该端点的圆圈给予阴影.



图 1-50

1.264　定义和显示无穷区间.

解　设 a 是任一实数. 那么, 满足 $x<a$, $x\leqslant a$, $x>a$ 或 $x\geqslant a$ 的全体实数 x 构造的集合称为一个**无穷区间**. 这些区间为图 1-51 所表示的.

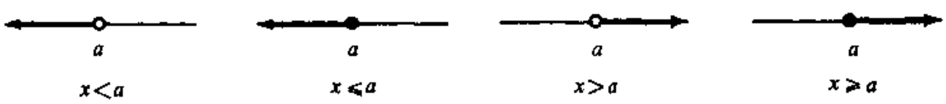


图 1-51

1.265　描述并画出下列各区间: (a) $2<x<4$, (b) $-1\leqslant x\leqslant 2$, (c) $-3<x\leqslant 1$.

解　(a) 所有大于 2 且小于 4 的数, 即 2 和 4 之间的所有点, 见图 1-52(a).

(b) 所有 -1 和 2 之间的数, 包括 -1 和 2. 见图 1-52(b).

(c) 所有大于 -3 且小于或等于 1 的数, 见图 1-52(c).

1.266　描述并画出每个区间: (a) $x>-1$, (b) $x\leqslant 2$.

解　(a) 所有大于 1 的数, 即 -1 右边的所有的点, 见图 1-53(a).

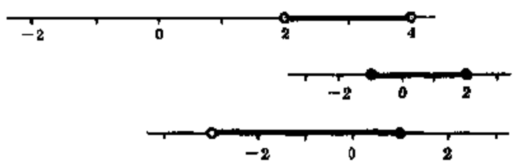


图 1-52

(b)所有小于或等于 2 的数,即 2 的左边的所有的点,包括 2,见图 1-53(b).

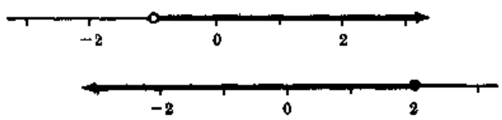


图 1-53

1.267 求满足各不等式的区间,即仅用 x 重新表示不等式:

(a)$3\leqslant x-4\leqslant 8$, (b)$-1\leqslant x+3\leqslant 2$, (c)$-9\leqslant 3x\leqslant 12$, (d)$-6\leqslant -2x\leqslant 4$.

解 ☞ (a)每边加上 4 得到:$7\leqslant x\leqslant 12$.

(b)每边加上 -3 得到:$-4\leqslant x\leqslant -1$.

(c)用 3 除每边(或用 1/3 乘每边)得到:$-3\leqslant x\leqslant 4$.

(d)用 -2 除每边(或用 $-1/2$ 乘每边)并改变不等号方向得:$-2\leqslant x\leqslant 3$.

1.268 求满足各不等式的区间,即解各不等式:(a)$3<2x-5<7$ 和(b)$-7\leqslant -2x+3\leqslant 5$.

解 ☞ (a)每边加上 5 得 $8<2x<12$,再每边除以 2 得 $4<x<6$.

(b)每边加上 -3 得 $-10\leqslant -2x\leqslant 2$,再每边除以 -2 并将不等式倒过来得 $-1\leqslant x\leqslant 5$.

绝对值

1.269 定义并从几何上描述一个实数的绝对值.

解 ☞ 一个实数 x 的绝对值,记作 $|x|$,定义为

$$|x|=\begin{cases}x, & 若\ x\geqslant 0;\\ -x, & 若\ x<0.\end{cases}$$

就是说,若 x 是非负的,则 $|x|=x$,并且若 x 是负的,则 $|x|=-x$. 于是,对每个 $x\in\mathbf{R}$, $|x|\geqslant 0$.

从几何上讲,x 的绝对值是实轴上点 x 与原点,即 0 的距离. 而且任何两点 $a,b\in\mathbf{R}$ 之间的距离是 $|a-b|=|b-a|$.

1.270 求(a)$|-7|$,(b)$|4|$,(c)$|-\pi|$,(d)$|\sqrt{5}|$.

解 ☞ 一个数的绝对值给出该数的大小. 因此

(a)$|-7|=7$, (b)$|4|=4$, (c)$|-\pi|=\pi$, (d)$|\sqrt{5}|=\sqrt{5}$.

1.271 计算:(a)$|3-5|$,(b)$|-3+5|$,(c)$|-3-5|$.

解 ☞ (a)$|3-5|=|-2|=2$.

(b)$|-3+5|=|2|=2$.

(c)$|-3-5|=|-8|=8$.

1.272 计算:(a)$|-4|+|2-5|$,(b)$|3-7|-|-5|$.

解 ☞ (a)$|-4|+|2-5|=4+|-3|=4+3=7$.

(b)$|3-7|-|-5|=|-4|-|-5|=4-5=-1$.

1.273 计算:(a)$|2-8|+|3-1|$;(b)$|2-5|-|4-7|$.

解 ☞ (a)$|2-8|+|3-1|=|-6|+|2|=6+2=8$.

(b) $|2-5|-|4-7|=|-3|-|-3|=3-3=0$.

1.274 计算：(a) $4+|-1-5|-|-8|$；(b) $|3-6|-|-2+4|-|-2-3|$.

解 ☞ (a) $4+|-1-5|-|-8|=4+|-6|-|-8|=4+6-8=2$.

(b) $|3-6|-|-2+4|-|-2-3|=3-2-5=-4$.

1.275 给出不等式 $|x|<5$ 的一个几何解释，并且重新把该不等式表示成不带绝对值记号的不等式.

解 ☞ 陈述 $|x|<5$ 可解释为 x 和原点之间的距离小于5，因此 x 必在实线上的 -5 与5之间. 换句话说，

$$|x|<5 \text{ 和 } -5<x<5$$

同理

$$|x|\leqslant 5 \text{ 和 } -5\leqslant x\leqslant 5$$

有相同含义.（见图1-54.）

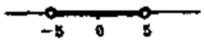


图1-54

1.276 不带绝对值记号，重新表示不等式：(a) $|x|\leqslant 3$；(b) $|x-2|<5$；(c) $|2x-3|\leqslant 7$.

解 ☞ (a) $-3\leqslant x\leqslant 3$.

(b) $-5<x-2<5$ 或 $-3<x<7$.

(c) $-7\leqslant 2x-3\leqslant 7$ 或 $-4\leqslant 2x\leqslant 10$ 或 $-2\leqslant x\leqslant 5$.

定理1.12　设 a 和 b 是任意的两个实数. 那么

(i) $|a|\geqslant 0$，且 $|a|=0$ 当且仅当 $a=0$；

(ii) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$；

(iii) $|ab|=|a|\cdot|b|$；

(iv) $|a+b|\leqslant |a|+|b|$；

(v) $|a+b|\geqslant |a|-|b|$.

1.277 证明定理1.12(iii).

证 ☞ 若 $a=0$ 或 $b=0$，则定理成立. 因此，我们可以假设 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$. 有四种情形：

情形(a)　a 和 b 同时为正数. 此时，ab 是正的，并且 $|a|=a$，$|b|=b$，$|ab|=ab$. 于是，$|ab|=ab=|a|\cdot|b|$.

情形(b)　a 是正数且 b 是负数. 此时，ab 是负的，并且 $|a|=a$，$|b|=-b$，$|ab|=-ab$. 于是 $|ab|=-ab=a(-b)=|a|\cdot|b|$.

情形(c)　a 是负数且 b 是正数. 证明类似于情形(b).

情形(d)　a 和 b 同时为负数. 此时，ab 是正的，并且 $|a|=-a$，$|b|=-b$，$|ab|=ab$. 于是，$|ab|=ab=(-a)(-b)=|a|\cdot|b|$.

1.278 证明定理1.12(iv).

证 ☞ 由于 $|a|=\pm a$，$-|a|\leqslant a\leqslant |a|$，$-|b|\leqslant b\leqslant |b|$，因此，将两个不等式相加得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant |a|+|b|.$$

于是

$$|a+b|\leqslant ||a|+|b||=|a|+|b|.$$

1.279 证明：$|a-b|\leqslant |a|+|b|$.

证 ☞ 应用习题1.278的结果，我们有

$$|a-b|=|a+(-b)|\leqslant |a|+|-b|=|a|+|b|.$$

1.280 证明：$|a-c|\leqslant |a-b|+|b-c|$.

证 ☞ $|a-c|=|(a-b)+(b-c)|\leqslant|a-b|+|b-c|$.

1.281 画出并描述绝对值函数的图形.

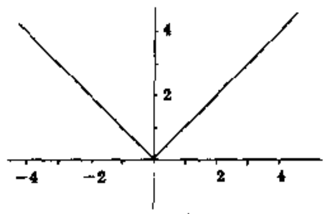
解 ☞ 对于 x 的非负值,我们有 $f(x)=x$,因而我们得到形式(a,a)的点,例如

$$(0,0),(1,1),(2,2),\cdots.$$

对于 x 的负值,我们有 $f(x)=-x$,因而我们得到形式$(-a,a)$的点,例如

$$(-1,1),(-2,2),(-3,3),\cdots.$$

这就得到图 1-55.因为对每个 $x\in\mathbf{R}$, $f(x)\geqslant 0$,因此 $f(x)=|x|$的图形整个在上半平面.而且,该图形由右半平面中的直线 $y=x$和左半平面的直线$y=-x$ 组成.



$f(x)=|x|$的图形

图 1-55

有界集合

1.282 定义一个有界集合.

解 ☞ 设 A 是一个实数集合.若存在一个实数 M,使得对每个 $x\in A$,有

(i)$|x|\leqslant M$, (ii)$x\leqslant M$, (iii)$M\leqslant x$,

则相应地说 A 是

(i)有界的, (ii)上有界, (iii)下有界.

在(i)中,称 M 是一个界;在(ii)中,称 M 是一个上界;在(iii)中,称 M 是一个下界.注意,当且仅当 A 是某一有限区间的一个子集时,A 是有界的.

注:若 A 是一个有限集,则 A 必为有界的.若 A 是一个无限集,则 A 可以是有界的,只是上(下)有界的或者根本是无界的.

1.283 下列各集合是否有界、下有界或者上有界:

(a)$A=\{1,1/2,1/3,\cdots,1/n,\cdots\}$;

(b)$B=\{2,4,6,\cdots\}$;

(c)$C=\{4,780,-3355,22,5678,-99\}$.

解 ☞ (a)由于 A 确实是区间$[0,1]$的一个子集,因此 A 是有界的.另外,$M=1$ 是 A 的一个界.

(b)B 是下有界的,例如,0 是一个下界,但它不是上有界,于是 B 是无界的.

(c)C 是有限集,因而是有界的.具体地说,5678 是它的一个上界以及 -3355 是一个下界.

1.284 下列各集合是否有界、下有界或上有界:

(a)$A=\{x:x<4\}$;

(b)$B=\{1,-1,3,-3,5,-5,7,-7,\cdots\}$;

(c)$C=\{1,-1,1/2,-1/2,1/3,-1/3,\cdots\}$.

解 ☞ (a)A 是上有界的.例如,4 是它的一个上界,但因有负数,其绝对值可任意大,因此 A 不是下有界的.具体地说,A 不是有界的.

(b)B 既无上界又无下界,因此 B 不是有界的.

(c)虽然 C 中有无穷多个数,但 C 仍是有界的.它其实是含于区间$[-1,1]$之中.

1.285 设集合 A 和 B 都是有界的.关于 A 和 B 的交和并能说些什么?

解 ☞ 有界集合的并和交都是有界的.

1.286 设集合 C 和 D 都是无界的.关于 C 和 D 的并和交能说些什么?

解 ☞ C 和 D 的并必是无界的,但交可能是有界的或是无界的.

第二章 关 系

2.1 积集

这一节,我们涉及到的有序偶和 n 元有序组,以及集合的(笛卡尔)乘积,使用下面记号:

(a,b):元素 a 和 b 的有序偶;

$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$:元素 $a_1,\cdots,a_n$ 的有序组;

$A\times B=\{(a,b):a\in A,b\in B\}$:集合 A 和 B 的(乘)积;

$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 或 $\prod_{i=1}^{n}A_i$:集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的(乘)积.

我们还用到记号 $A^2=A\times A$ 以及 $A^n=A\times A\times\cdots\times A$($n$ 个因子).

2.1 解释两个元素 a 和 b 的有序偶 (a,b) 和集合 $\{a,b\}$ 之间的主要区别.

解 ☞ 在 (a,b) 中元素的顺序是有差别的,这里指定 a 为第一个元素而 b 为第二个元素.因此,除 $a=b$ 外,$(a,b)\neq(b,a)$.另一方面,$\{a,b\}$ 和 $\{b,a\}$ 表示相同的集合.

2.2 解释在什么情况下,(a)有序偶 (a,b) 和 (c,d) 相等;(b)n 元有序组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 和 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 相等.

解 ☞ (a)当且仅当 $a=c$ 且 $b=d$ 时,这两个有序偶相等.

(b)同理,$(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 的充分必要条件是对应元素(分量)相等,即

$$a_1=b_1,a_2=b_2,\cdots,a_n=b_n.$$

2.3 已知 $(3x,x-2y)=(6,-8)$.求 x 和 y.

解 ☞ 两个有序偶相等当且仅当对应分量相等,因此我们得到方程组 $3x=6$ 和 $x-2y=-8$.由此解得

$$x=2,\qquad y=5.$$

2.4 设 $(x-3y,5)=(7,x-y)$.求 x 和 y.

解 ☞ 令它们的对应元素相等,得到

$$x-3y=7\quad 且\quad x-y=5.$$

这就得到 $x=4,y=-1$.

2.5 设 $(2x,x+y,x-y-2z)=(4,-1,3)$.求 x,y,z.

解 ☞ 由于两个有序三元组相等,令其对应分量相等,得

$$2x=4,\qquad x+y=-1,\qquad x-y-2z=3.$$

解此方程组得 $x=2,y=-3,z=1$.

2.6 设 $A=\{1,2,3\}$ 和 $B=\{a,b\}$.求(a)$A\times B$,(b)$B\times A$.

解 ☞ (a)$A\times B$ 是以 A 的元素为第一个分量,B 的元素为第二个分量的全体有序偶组成的集合,因此

$$A\times B=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}.$$

(b)这里,以 B 的元素为第一个分量,以 A 的元素为第二个分量:

$$B\times A=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}.$$

2.7 设 $A=\{1,2\}$.求(a)A^2,(b)A^3.

解 ☞ (a)这里,$A^2=A\times A$.因此

$$A^2=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$$

(b) $A^3=A\times A\times A$.这样,A^3 是 A 的元素形成的全体有序三元组的集合:

$A^3 = \{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,1),(1,2,2),(2,1,1),(2,1,2),(2,2,1),(2,2,2)\}$.

(我们可认为 A^3 是 $A \times A^2$.)

2.8 设 $A=\{1,2\}$和 $B=\{a,b\}$.判定下列各集合是否等于 $A\times B$.

(a) $E=[\{1,a\},\{1,b\},\{2,a\},\{2,b\}]$;

(b) $F=[(a,1),(a,2),(b,1),(b,2)]$;

(c) $G=[(1,a),(1,b),(2,a),(b,2)]$;

(d) $H=[(1,b),(2,a),(1,a),(2,b)]$.

解 ☞ (a) 否.E 是集合的集合,不是有序偶的集合.

(b) 否.$F=B\times A$, $F\neq A\times B$.

(c) 否.若最后一个有序偶是$(2,b)$而不是$(b,2)$,则 $G=A\times B$.

(d) 是,即使它的元素不是用系统方法列出来的.

2.9 设 $A=\{$雄的,雌的$\}$和 $B=\{$猫,狗,鱼$\}$.求(a)$A\times B$;(b) $B\times A$.

解 ☞ (a) 第一个元素来自于 A,第二个元素来自于 B 的所有有序偶形成:

$A\times B=\{$(雄的,猫),(雄的,狗),(雄的,鱼),(雌的,猫),(雌的,狗),(雌的,鱼)$\}$.

(b)第一个元素来自于 B,第二个元素来自于 A 的所有有序偶形成:

$B\times A=\{$(猫,雄的),(狗,雄的),(鱼,雄的),(猫,雌的),(狗,雌的),(鱼,雌的)$\}$.

2.10 设 $Y=\{0,1\}$和 $Z=\{1,0\}$.求(a) $Y\times Z$;(b) $Z\times Y$;(c)关于 $Y\times Z$ 和$Z\times Y$ 你注意到什么?

解 ☞ (a)$\{(0,1),(0,0),(1,1),(1,0)\}$.

(b) $\{(1,0),(1,1),(0,0),(0,1)\}$.

(c)由于 Y 和Z 相等,因此 $Y\times Z$ 和$Z\times Y$ 相等.

2.11 讨论 $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 作为平面上的点的几何表示.

解 ☞ 这里,平面中的每个点 P 表示实数的一个有序偶(a,b),反之亦然,如图 2-1 所示.这就是说,过 P 点的垂直线与 x 轴交于 a,且过 P 点的水平线与 y 轴交于 b.通常,$\mathbf{R}^2$ 称为**笛卡尔平面**.

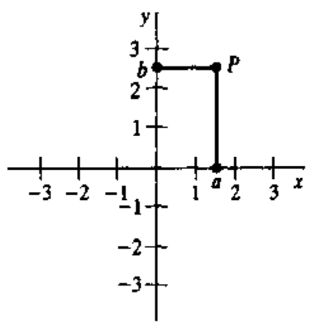


图 2-1

2.12 证明 $n(A\times B)=n(A)\cdot n(B)$,此处 A 和B 是有限集合且$n(A)$表示 A 的元素数目.请叙述一般结果.

解 ☞ $A\times B$ 的每个有序偶(a,b)对于 a 有 $n(A)$种选取方法,对 b 有 $n(B)$种选取方法.这样,有 $n(A)\cdot n(B)$个这样的有序偶.这就是说,

$$n(A\times B)=n(A)\cdot n(B).$$

同理,可以证明,若 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 都是有限集合,则

$$n(A_1\times A_2\times\cdots\times A_m)=n(A_1)\cdot n(A_2)\cdot\cdots\cdot n(A_m).$$

2.13 设 $A=\{1,2,3,\cdots,8,9,10\}$, $B=\{a,b,c,\cdots,x,y,z\}$.求 $A\times B$ 中有多少个元素?

解 ☞ 这里,$n(A)=10$, $n(B)=26$.因此 $A\times B$ 有$(10)(26)=260$个元素.

2.14 设 $A=\{1,2,3,6\}$, $B=\{8,9,10\}$.求(a)$A\times B$;(b) $B\times A$;(c) A^2;(d) B^4;(e) $A\times A\times B$;(f)$B\times A\times B$ 的元素数目.

解 ☞ 这里,$n(A)=4$, $n(B)=3$.为了求得每个乘积集合的元素数目,只要将各个集合的元素数目相乘.

(a) $n(A\times B)=4\cdot 3=12$.

(b) $n(B\times A)=3\cdot 4=12$.

(c) $n(A^2)=4\cdot4=16$.

(d) $n(B^4)=3^4=81$.

(e) $n(A\times A\times B)=4\cdot4\cdot3=48$.

(f) $n(B\times A\times B)=3\cdot4\cdot3=36$.

2.15　已知 $A=\{1,2\}, B=\{x,y,z\}, C=\{3,4\}$. 求 $A\times B\times C$ 和 $n(A\times B\times C)$.

解　$A\times B\times C$ 由所有有序三元组 (a,b,c) 组成,此处 $a\in A, b\in B, c\in C$. $A\times B\times C$ 的元素可由图 2-2 所表示的称为树图系统地得到. $A\times B\times C$ 的元素正好是列在树图右边的 12 个有序三元组. 我们看到 $n(A)=2, n(B)=3, n(C)=2$, 因此

$$n(A\times B\times C)=12=n(A)\cdot n(B)\cdot n(C).$$

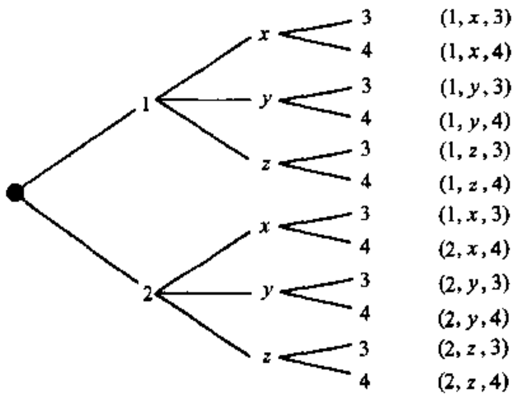


图 2-2

2.16　每次抛硬币将出现正面或背面. 设 $C=\{H,T\}$ 表示结果的集合. 求 C^3, $n(C^3)$, 并解释 C^3 表示什么?

解　由于 $n(C)=2$, 因此我们有 $n(C^3)=2^3=8$. 为了记号方便,省去某些逗号和括号,

$$C^3=\{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}.$$

C^3 表示抛 3 次硬币时所有可能结果的序列.

2.17　设 $S=\{a,b,c\}, T=\{b,c,d\}, W=\{a,d\}$. 构造 $S\times T\times W$ 的树图,然后求 $S\times T\times W$.

解　选一个左边点 P 作为"根",画三条线到右边表示第一个集合 S 的元素,如图 2-3 所示. 在每个端点画 3 条线到表示第二个集合 T 的元素,再在每个新的端点画二条线到表示第三个集合的元素. $S\times T\times W$ 的每个元素对应于从 P 到一个端点的一条通路. 因此

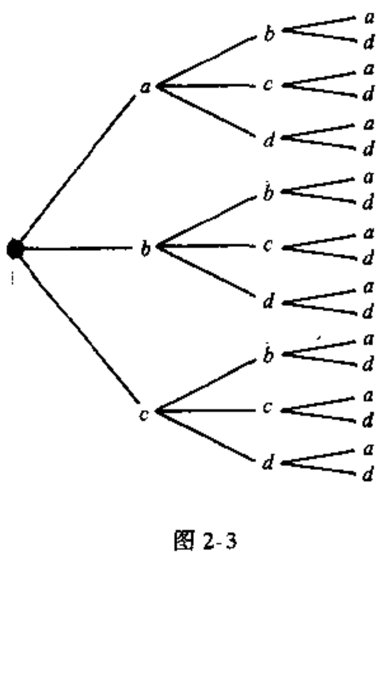


图 2-3

$$S \times T \times W = \{(a,b,a),(a,b,d),(a,c,a),(a,c,d),(a,d,a),\\(a,d,d),(b,b,a),(b,b,d),(b,c,a),(b,c,d),\\(b,d,a),(b,d,d),(c,b,a),(c,b,d),(c,c,a),\\(c,c,d),(c,d,a),(c,d,d)\}.$$

2.18 设 $W=\{$马克,埃里克,保尔$\}$, $V=\{$埃里克,大卫$\}$.求:(a) $W\times V$, (b) $V\times W$, (c) $V\times V$.

解 ☞ 写出每个积集的所有有序偶.

(a) $W\times V=\{$(马克,埃里克),(马克,大卫),(埃里克,埃里克),(埃里克,大卫),(保尔,埃里克),(保尔,大卫)$\}$.

(b) $V\times W=\{$(埃里克,马克),(埃里克,埃里克),(埃里克,保尔),(大卫,马克),(大卫,埃里克),(大卫,保尔)$\}$.

(c) $V\times V=\{$(埃里克,埃里克),(埃里克,大卫),(大卫,埃里克),(大卫,大卫)$\}$.

2.19 给定集合 $A=\{1,2\}$, $B=\{a,b,c\}$, $C=\{c,d\}$.求:(a) $(A\times B)\cap(A\times C)$;(b) $A\times(B\cap C)$.

解 ☞ (a)首先求得

$$A\times B=\{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\},$$
$$A\times C=\{(1,c),(1,d),(2,c),(2,d)\}.$$

于是

$$(A\times B)\cap(A\times C)=\{(1,c),(2,c)\}.$$

(b) 这里, $B\cap C=\{c\}$,因此

$$A\times(B\cap C)=\{(1,c),(2,c)\}.$$

注意到, $(A\times B)\cap(A\times C)=A\times(B\cap C)$.这对于任何集合 A,B 和 C 都是正确的.

2.20 设 $A=\{a,b\}$, $B=\{1,2\}$, $C=\{2,3\}$.求:(a) $(A\times B)\cup(A\times C)$;(b) $A\times(B\cup C)$.

解 ☞ (a)首先求得

$$A\times B=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2)\}$$

和

$$A\times C=\{(a,2),(a,3),(b,2),(b,3)\}.$$

因此

$$(A\times B)\cup(A\times C)=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}.$$

(b) 首先求得 $B\cup C=\{1,2,3\}$.因此

$$A\times(B\cup C)=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}.$$

注意到, $(A\times B)\cup(A\times C)=A\times(B\cup C)$.这对于任何集合 A,B 和 C 都是正确的.

2.21 证明 $(A\times B)\cap(A\times C)=A\times(B\cap C)$.

证 ☞

$$\begin{aligned}(A\times B)\cap(A\times C)&=\{(x,y):(x,y)\in A\times B \text{ 且 } (x,y)\in A\times C\}\\&=\{(x,y):x\in A,y\in B \text{ 且 } x\in A,y\in C\}\\&=\{(x,y):x\in A,y\in B\cap C\}\\&=A\times(B\cap C).\end{aligned}$$

2.22 证明 $(A\times B)\cup(A\times C)=A\times(B\cup C)$.

证 ☞

$$\begin{aligned}(A\times B)\cup(A\times C)&=\{(x,y):(x,y)\in A\times B \text{ 或 } (x,y)\in A\times C\}\\&=\{(x,y):x\in A,y\in B \text{ 或 } x\in A,y\in C\}\\&=\{(x,y):x\in A,\text{且 } y\in B \text{ 或 } y\in C\}\\&=\{(x,y):x\in A,y\in B\cup C\}\\&=A\times(B\cup C).\end{aligned}$$

2.23 设 $A_1=\{b,c,f\}$, $A_2=\{a\}$, $A_3=\{r,t\}$.求 $\prod A_i$.

解 ☞ 这里 $\prod A_i = A_1 \times A_2 \times A_3$. 因此

$$\prod A_i = \{(b,a,r),(b,a,t),(c,a,r),(c,a,t),(f,a,r),(f,a,t)\}.$$

2.24 设 $B_1=\{1,2\}, B_2=\{3,4\}, B_3=\{5,6\}$. 求 $\prod B_i$.

解 ☞ 这里, $\prod B_i = B_1 \times B_2 \times B_3$. 因此

$$\prod B_i = \{(1,3,5),(1,3,6),(1,4,5),(1,4,6),$$
$$(2,3,5),(2,3,6),(2,4,5),(2,4,6)\}.$$

2.2 关系

设 A 和 B 是两个集合. 从 A 到 B 的一个**二元关系**, 简称**关系**是 $A\times B$ 的一个子集 R. 给定 $a\in A$ 和 $b\in B$, 我们依照 $(a,b)\in R$ 或 $(a,b)\notin R$, 记作

$$aRb \quad 或 \quad a\not R b.$$

若 R 是从 A 到 A 的一个关系, 即若 $R\subseteq A\times A$, 我们则说 R 是 A 上的一个关系.

2.25 设 R 是从 A 到 B 的一个关系. 定义 R 的定义域, 记作 $\mathrm{dom}(R)$, R 的值域, 记作 $\mathrm{range}(R)$.

解 ☞ R 的定义域是 R 的有序偶的第一个元素组成的 A 的子集, R 的值域是第二个元素组成的 B 的子集.

2.26 定义从 A 到 B 的一个关系 R 的逆(关系).

解 ☞ R 的逆(关系)记作 R^{-1}, 是从 B 到 A 的关系, 它由属于 R 的那些有序偶的顺序颠倒过来得到的有序偶组成, 即

$$R^{-1} = \{(b,a):(a,b)\in R\}.$$

换句话说, $bR^{-1}a$ 当且仅当 aRb.

2.27 判定下面哪些是从 $A=\{a,b,c\}$ 到 $B=\{1,2\}$ 的关系:

(a) $R_1=\{(a,1),(a,2),(c,2)\}$;　　(b) $R_2=\{(a,2),(b,1)\}$;

(c) $R_3=\{(c,1),(c,2),(c,3)\}$;　　(d) $R_4=\{(b,2)\}$;

(e) $R_5=\varnothing$;　　(f) $R_6=A\times B$.

解 ☞ 由于它们都是 $A\times B$ 的子集, 因此它们都是从 A 到 B 的关系. $R_5=\varnothing$ 为空集, 称为从 A 到 B 的**空关系**, $R_6=A\times B$ 称为从 A 到 B 的**全关系**.

2.28 求习题 2.27 中每个关系的逆.

解 ☞ 将每个关系 R_k 的有序偶的顺序颠倒得到 R_k^{-1}:

(a) $R_1^{-1}=\{(1,a),(2,a),(2,c)\}$;　　(b) $R_2^{-1}=\{(2,a),(1,b)\}$;

(c) $R_3^{-1}=\{(1,c),(2,c),(3,c)\}$;　　(d) $R_4^{-1}=\{(2,b)\}$;

(e) $R_5^{-1}=\varnothing$;　　(f) $R_6^{-1}=B\times A$.

2.29 求从 $A=\{a,b,c\}$ 到 $B=\{1,2\}$ 的关系的数目.

解 ☞ $A\times B$ 有 $3\cdot 2=6$ 个元素, 因此 $A\times B$ 有 $m=2^6=64$ 个子集. 这样, 从 A 到 B 有 $m=64$ 个关系.

2.30 设 R 是 $A=\{1,2,3,4\}$ 上的关系, 定义为"x 小于 y", 即 R 是关系 $<$. 将 R 表示成一个有序偶的集合.

解 ☞ R 由有序偶 (a,b) 组成, 此处 $a<b$. 因此

$$R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}.$$

2.31 求习题 2.30 中关系 R 的逆 R^{-1}. R^{-1} 可用文字描述吗?

解 ☞ 将 R 的有序偶的顺序颠倒过来, 得到

$$R^{-1} = \{(2,1),(3,1),(4,1),(3,2),(4,2),(4,3)\}.$$

R^{-1}是关系>，即 R^{-1}可以描述为“x 大于 y”.

2.32 设 R 是从 $A=\{1,2,3,4\}$到 $B=\{x,y,z\}$的关系，定义为

$$R=\{(1,y),(1,z),(3,y),(4,x),(4,z)\}.$$

(a) 求 R 的定义域和值域；

(b) 求 R 的逆 R^{-1}.

解 ☞ (a) R 的定义域由 R 的有序偶的第一个元素组成，R 的值域由第二个元素组成.因此 $\text{dom}(R)=\{1,3,4\}$，$\text{range}(R)=\{x,y,z\}$.

(b) R^{-1}是将 R 的有序偶的顺序颠倒得到的，因此

$$R^{-1}=\{(y,1),(z,1),(y,3),(x,4),(z,4)\}.$$

2.33 设 R 是从城市集合 X 到国家集合 Y 的关系“位于”.用文字叙述：

(a) (巴黎，法国)$\in R$；

(b) (莫斯科，意大利)$\in R$；

(c) (华盛顿，加拿大)$\in R$；

(d) (伦敦，英国)$\in R$.

并指出这些陈述是正确或是错.

解 ☞ (a)巴黎位于法国.正确.

(b) 莫斯科位于意大利.错.

(c) 华盛顿位于加拿大.错.

(d) 伦敦位于英国.正确.

2.34 设 $A=\{1,2,3\}$，$R=\{(1,1),(2,1),(3,2),(1,3)\}$是 A 上的一个关系(即从 A 到 A 的一个关系)，判定下列：

(a) $1R1$；(b) $1\not R2$；(c) $2R3$；(d) $2\not R1$；(e) $3R2$；(f) $3\not R1$

中的每一个是正确或是错.

解 ☞ (a) 正确.因$(1,1)\in R$.

(b) 正确.因$(1,2)\notin R$.

(c) 错.因$(2,3)\notin R$.

(d) 错.因$(2,1)\in R$.

(e) 正确.因$(3,2)\in R$.

(f) 正确.因$(3,1)\notin R$.

2.35 考虑 $A=\{1,2,3,4\}$上的关系=(相等).将=写成一个有序偶的集合.

解 ☞ 这里$(a,b)\in =$意指 $a=b$.因此=是下面的有序偶集合：

$$\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}.$$

2.36 设 $A=\{1,2,3,4,6\}$，R 是A 上的关系，定义为“x 整除 y”，记作 $x\mid y$.(若存在一个整数 z 使得 $xz=y$，则 $x\mid y$，例如，$2\cdot 3=6$，因此 $2\mid 6$.)将 R 写成一个有序偶集合.

解 ☞ 求 A 中被 1,2,3,4 和 6 整除的数，我们有

$$1\mid 1,1\mid 2,1\mid 3,1\mid 4,1\mid 6,2\mid 2,2\mid 4,2\mid 6,3\mid 3,3\mid 6,4\mid 4,6\mid 6.$$

因此

$R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,6),(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(6,6)\}$.

2.37 求习题 2.36 中关系 R 的逆 R^{-1}. R^{-1}可用文字来描述吗？

解 ☞ 将 R 的有序偶的顺序颠倒，得到 R^{-1}：

$$R^{-1}=\{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(6,1),(2,2),(4,2),(6,2),(3,3),(6,3),(4,4),(6,6)\}.$$

R^{-1}可描述为“x 是 y 的倍数”.

2.38 没 S 是正整数集 $\mathbf{N}$ 上的关系，用方程 $x+3y=13$ 来定义它，即

$$S=\{(x,y):x+3y=13\}.$$

(除非特别说明,在一个有序偶中 x 表示第一个坐标且 y 表示第二个坐标.)将 S 写成一个有序偶集合.

解 ☞ 赋予变量,例如 y 的一个值,从该方程解另一个变量 x.这样,

(i) $y=1$ 得出 $x=10$,　(ii) $y=2$ 得出 $x=7$,　(iii) $y=3$ 得出 $x=4$,　(iv) $y=4$ 得出 $x=1$.
任何一个其他的 y 值都不能得到 x 的正整数值.因此

$$S=\{(10,1),(7,2),(4,3),(1,4)\}.$$

2.39　设 S 是习题 2.38 中的关系.求 S 的定义域和值域.

解 ☞ S 的定义域由有序偶的第一个元素组成,值域由第二个元素组成,因此

$$\mathrm{dom}(S)=\{10,7,4,1\},\quad \mathrm{range}(S)=\{1,2,3,4\}.$$

2.40　设 S 是习题 2.38 中的关系.求逆关系 S^{-1},并用一个方程表示 S^{-1}.

解 ☞ 将 S 的有序偶的次序颠倒得到

$$S^{-1}=\{(1,10),(2,7),(3,4),(4,1)\}.$$

把定义 S 的方程中的 x 和 y 交换得到定义 S^{-1} 的一个方程,因此 $3x+y=13$ 定义 S^{-1}.

2.41　设 R 是非负整数集合 $X=\{0,1,2,3,\cdots\}$ 上的关系,用方程 $x^2+y^2=25$ 来定义它.将 R 写成一个有序偶集合.

解 ☞ 仅当 $x=0,3,4,5$ 时,给定的方程有非负整数解,并且分别得到解 $y=5,4,3,0$.因此

$$R=\{(0,5),(3,4),(4,3),(5,0)\}.$$

2.42　设 S 是正整数集 $\mathbf{N}$ 上的关系,用方程 $3x+4y=17$ 定义它.将 R 写成一个有序偶集合.

解 ☞ 这里,$3x=17-4y$.由于 x 必须是正数,因此 y 没有超过 4 的值.用 $y=1,2,3,4$ 试之,只有 $y=2$ 得出 x 的一个整数值,即 $x=3$.因此 $S=\{(3,2)\}$.

2.43　设 R 是正整数集 $\mathbf{N}$ 上的关系,用方程 $2x+4y=17$ 来定义.将 R 写成一个有序偶集合.

解 ☞ y 没有超过 4 的值(如同习题 2.42).用 $y=1,2,3,4$ 试之,我们看到没有 y 的值能使 x 得到整数值.因此 $R=\varnothing$,$\mathbf{N}$ 上的空关系.(换句话说,对于 x 和 y 的任何整数值,$2x+4y$ 必然得到一个偶数,决不会等于奇数 17.)

2.44　描述人的集合 A 上的下列关系的逆:(a)"比……高";(b)"比……年老";(c)"……的父母亲";(d)"……的兄弟".

解 ☞ (a)"比……矮",(b)"比……年轻",(c)"……的孩子",(d)"……的兄弟"(这个关系是对称的).

2.45　描述平面中直线的集合 X 上的下列关系的逆:(a)"平行于";(b)"在……上";(c)"垂直于".

解 ☞ (a)"平行于",(b)"在……下",(c)"垂直于".

(在这里,(a)和(c)都是对称的)

2.46　设 R 是 $X=\{1,2,3,4\}$ 到 $Y=\{a,b,c,d\}$ 的关系,定义为

$$R=\{(1,a),(1,b),(3,b),(3,d),(4,b)\}.$$

求 X 的如下每个子集:

(a) $E=\{x:xRb\}$;　(b) $F=\{x:xRd\}$.

解 ☞ (a)E 由与 b 有关系的元素组成.有 3 个以 b 为第二个元素的有序偶$(1,b)$,$(3,b)$和$(4,b)$.因此,1,3 和 4 与 b 有关系,从而 $E=\{1,3,4\}$.

(b) 第二个元素是 d 的只有一个有序偶$(3,d)$,因此 $F=\{3\}$.

2.47　设 R 是习题 2.46 中从 X 到 Y 的关系.求 Y 的如下每个子集:

(a)$G=\{y:1Ry\}$;　(b)$H=\{y:2Ry\}$.

解 ☞ (a)G 由 Y 的那些 1 与其有关系的元素组成.有两个以 1 为第一个元素的有序偶$(1,a)$和$(1,b)$.这样,1 与 a 和 b 有关系,因此 $G=\{a,b\}$.

(b) 因为没有以 2 为第一个元素的有序偶,因此,$H=\varnothing$, Y 的空子集.

2.48 设 A 是任一集合.定义 A 上的**对角关系**,通常记作 Δ_A 或简单地记作 Δ.你能给出这个关系的另一个名称吗?

解 ☞ 对角关系由使得 $a=b$ 的所有有序偶(a,b)组成,即

$$\Delta=\{(a,a):a\in A\}.$$

这与相等关系相同.

2.49 假设 A 是一个有限集合.求 A 上的关系的数目 m,此处:(a)A 有 3 个元素,(b) A 有 n 个元素.

解 ☞ (a) $A\times A$ 有 $3^2=9$ 个元素.因此,$A\times A$ 有 $2^9=512$ 个子集,从而 A 上有 $m=512$ 个关系.

(b) $A\times A$ 有 n^2 个元素,因此 $m=2^{n^2}$.

2.50 设 R 和 S 是$A=\{1,2,3\}$上的关系,定义为

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,3),(3,1),(3,3)\},$$
$$S=\{(1,2),(1,3),(2,1),(3,3)\}.$$

求 $R\cap S$ 和$R\cup S$.

解 ☞ 只要将 R 和 S 作为集合处理,并且取通常的交和并:

$$R\cap S=\{(1,2),(3,3)\},$$
$$R\cup S=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,3)\}.$$

2.51 设 R 是习题 2.50 中 $A=\{1,2,3\}$上的关系.求 R^c.

解 ☞ 利用 $A\times A$ 是 A 上的全关系这一事实,得到

$$R^c=(A\times A)\setminus R=\{(1,3),(2,1),(2,2),(3,2)\}.$$

(注意 $A\times A$ 有 $3\times3=9$ 个元素,R 有 5 个元素,因此 R^c 有 4 个元素.)

2.52 设 R 和 S 是从$A=\{1,2,3\}$到 $B=\{a,b\}$的关系,定义为

$$R=\{(1,a),(3,a),(2,b),(3,b)\},$$
$$S=\{(1,b),(2,b)\}.$$

求 $R\cap S$ 和$R\cup S$.

解 ☞ 只要将 R 和 S 作为集合处理.于是有

$$R\cap S=\{(2,b)\},$$
$$R\cup S=\{(1,a),(3,a),(2,b),(3,b),(1,b)\}.$$

2.53 设 R 是习题 2.52 中从 A 到B 的关系.求 R^c.

解 ☞ 利用 $A\times B$ 是从 A 到 B 的全关系这一事实,得到

$$R^c=(A\times B)\setminus R=\{(1,b),(2,a)\}.$$

(注意,$A\times B$ 有 $3\cdot2=6$ 个元素,R 有 4 个元素,因此 R^c 有 2 个元素.)

2.54 描述集合的关系:(a)$\subseteq$(子集)和(b)x 与 y 不相交的逆关系.

解 ☞ (a)$\supseteq$(包含或超集).

(b) y 与 x 不相交.(关系是对称的.)

2.55 设 R 是正整数集 **N** 上的关系,用方程 $x^2+2y=100$ 来定义它.求 R 的定义域.

解 ☞ 这里,$2y=100-x^2$.由于 y 是正数,因此 x 不能超过 9.而且,由于 $100-x^2$ 必须是偶数,因此 x 不能是奇数.故 $\operatorname{dom}(R)=\{2,4,6,8\}$.

2.56 设 R 是习题 2.55 中 **N** 上的关系.将 R 写成一个有序偶集合并求R 的值域.

解 ☞ 将 $x=2,4,6,8$ 分别代入方程 $2y=100-x^2$ 得 $y=48,42,32,18$.因此

$$R = \{(2,48),(4,42),(6,32),(8,18)\},$$
$$\text{range}(R) = \{48,42,32,18\}.$$

2.57　设 R 是习题 2.55 中 $\mathbf{N}$ 上的关系. 求 R^{-1}, 并用一个方程来描述 R^{-1}.

解 ☞ 将 R 的有序偶的顺序颠倒, 得到

$$R^{-1} = \{(48,2),(42,4),(32,6),(18,8)\}.$$

将定义 R 的方程中的 x 和 y 互换便得到定义 R^{-1}的方程, 因此 $y^2+2x=100$ 定义 R^{-1}.

2.58　考虑 $A=\{1,2,3\}$ 上的关系<(小于), Δ(对角的或相等)以及|(整除). (回忆一下, 若存在整数 z 使得 $xz=y$, 则 $x \mid y$.) 求(a)$<\cup\Delta$, (b)$<\cap\mid$.

解 ☞ 首先将<, Δ 和 | 表示成有序偶集合:

$$< = \{(1,2),(1,3),(2,3)\},$$
$$\Delta = \{(1,1),(2,2),(3,3)\},$$
$$\mid = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(3,3)\}.$$

然后只要将<, Δ 和 | 作为集合处理.

(a) $<\cup\Delta=\{(1,2),(1,3),(2,3),(1,1),(2,2),(3,3)\}$.

(注意到, $<\cup\Delta$ 表示≤.)

(b) $<\cap\mid=\{(1,2),(1,3)\}$.

2.59　设 $X=\{a,b,c,d,e,f\}$, $Y=\{\text{bed, dead, bad, feed, face}\}$, R 是 X 到 Y 的关系, 定义为"x 是 y 中的一个字母". 用文字叙述和求集合: (a)$E=\{x:(x,\text{dead})\in R\}$, (b) $F=\{y: bRy\}$.

解 ☞ (a) E 由 dead 中的字母组成, 因此 $E=\{d,e,a\}$.

(b) F 由含有字母 b 的单词组成, 因此 $F=\{\text{bed, bad}\}$.

2.60　设 R 是世界上的国家的集合上的关系"邻接于". (若国家 x 和国家 y 有公共边界, 则 x 与 y 邻接.) 用文字叙述并指出下列陈述是否正确:

(a) (法国, 西班牙)$\in R$;　　(b) (加拿大, 墨西哥)$\in R$;

(c) (中国, 日本)$\notin R$;　　(d) (德国, 波兰)$\notin R$.

解 ☞ (a) 法国和西班牙邻接. 正确.　(b) 加拿大和墨西哥邻接. 错.

(c) 中国和日本不邻接. 正确.　(d) 德国和波兰不邻接. 错.

2.3 关系的表示法

这一节研究表示和绘画关系的一些方法.

2.61　描述从有限集合 A 到有限集合 B 的一个关系 R 的"箭号图". 设 R 是从集合 $A=\{1,2,3,4\}$ 到集合 $B=\{x,y,z\}$ 的关系定义为

$$R = \{(1,y),(1,z),(3,y),(4,x),(4,z)\}.$$

试用该关系解释之.

解 ☞ 在两个不相交的盘里, 用两列记下 A 的元素和 B 的元素, 然后, 当 $a\in A$ 与 $b\in B$ 有关系, 即$(a,b)\in R$ 时, 便从 a 到 b 画一个箭号, 如图 2-4 所示. 该图称为 R 的箭号图.

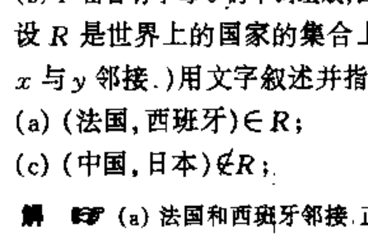


图 2-4

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4 \end{array}\begin{array}{c} x\quad y\quad x \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \\ & & \end{array}\right) \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4 \end{array}\begin{array}{c} x\quad y\quad x \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

(a)　　(b)

图 2-5

2.62　定义从有限集 A 到有限集 B 的关系 R 的矩阵表示 M_R. 用习题 2.61 的关系 R 解释之.

解 ☞ 我们形成一个矩形数组，其行标注 A 的元素，而列标注 B 的元素，如图 2-5(a)所示. 然后，数组的每个位置，当 $a\in A$ 与 $b\in B$ 有关系，即 $(a,b)\in R$ 时，则置整数 1，其余位置置 0，即此处 $(a,b)\notin R$. 最后的数组在图 2-5(b)中，它是关系 R 的矩阵 M_R.

2.63　设 R 是从有限集合 A 到有限集合 B 的一个关系. 说明怎么能(a)从 R 的箭号图得到 R^{-1} 的箭号图；(b)从表示 R 的矩阵 M_R 得到表示 R^{-1} 的矩阵 N.

解 ☞ (a)只要将 R 的箭号图的箭头方向颠倒过来便得到 R^{-1} 的箭号图.

(b) 将表示 R 的矩阵 M_R 转置，即把行写成列，列写成行，便得到表示 R^{-1} 的矩阵 N.

2.64　考虑习题 2.61 中的关系 R. (a)画出逆关系 R^{-1} 的箭号图；(b)求表示 R^{-1} 的矩阵 N.

解 ☞ (a)将 R 的箭号图的箭头方向颠倒过来得到图 2-6 便是 R^{-1} 的箭号图.

(b) 只要将图 2-5 中的矩阵 M_R 转置，即行写成列，列写成行便得到

$$N=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}.$$

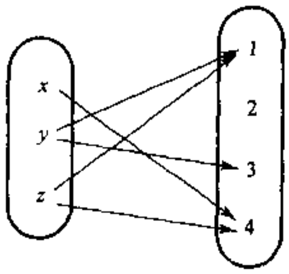


图 2-6

2.65　设 S 是 $A=\{$埃伦，斯蒂芬，奥德丽，珍妮$\}$ 到集合 $B=\{$是，否$\}$ 的关系，定义为

$$S=\{(\text{埃伦,否}),(\text{斯蒂芬,是}),(\text{奥德丽,是}),(\text{珍妮,否})\}.$$

求表示关系 S 的矩阵 M.

解 ☞ 指定 A 和 B 的元素顺序，例如，就所给定的顺序，则

$$M=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

(元素顺序不同可给出不同的矩阵.)

2.66　求习题 2.65 中关系 S 的逆 S^{-1}，并求表示 S^{-1} 的矩阵 N.

解 ☞ 只要将 S 的有序偶的次序颠倒便得到

$$S^{-1}=\{(\text{否,埃伦}),(\text{是,斯蒂芬}),(\text{是,奥德丽}),(\text{否,珍妮})\}.$$

表示 S^{-1} 的矩阵 N 可以取表示 S 的矩阵 M 的转置得到. 因此

$$N=M^T=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}.$$

(这里，我们假定 A 和 B 的元素顺序与其确定 M 的顺序相同.)

2.67　设 T 是从 $A=\{1,2,3,4,5\}$ 到 $B=\{$红，白，蓝，绿$\}$ 的关系，定义为

$$T=\{(1,\text{红}),(1,\text{蓝}),(3,\text{蓝}),(4,\text{绿})\}.$$

(a) 画关系 T 的一个箭号图；

(b) 求 T 的定义域和值域；

(c) 求逆关系 T^{-1} 及其箭号图.

解 ☞ (a)对于每一 $(x,y)\in T$ 从 $x\in A$ 到 $y\in B$ 画一个箭号，所要求的箭号图如图 2-7 所示.

(b) 定义域由 T 的有序偶的第一个元素组成，值域由第二个元素组成. 因此 $\mathrm{dom}(T)=\{1,3,4\}$，$\mathrm{range}(T)=\{$红，蓝，绿$\}$.

(c) 将 T 的有序偶的次序颠倒得到

$$T^{-1}=\{(\text{红},1),(\text{蓝},1),(\text{蓝},3),(\text{绿},4)\}.$$

把图 2-7 中 T 的箭号图的箭头方向颠倒得 T^{-1}的箭号图,如图 2-8 所示.

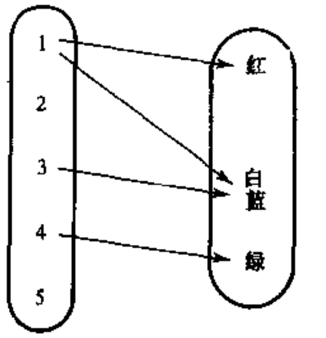


图 2-7

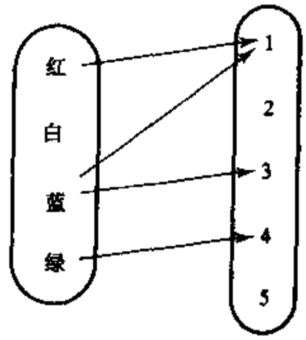


图 2-8

2.68　考虑习题 2.67 中的关系 T.求表示 T 的矩阵M 和表示 T^{-1}的矩阵 N.

解 ☞ 指定 A 和 B 的元素顺序,例如就所给定的顺序,则

$$M=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$N=M^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

注意到,在每个矩阵中 1 的数目等于 T 的有序偶的数目.

2.69　设 R 是从$X=\{1,2,3,4\}$到 $Y=\{a,b,c,d\}$的图 2-9 所表示的关系.叙述下列陈述:

(a) $1Rb$,　(b) $2Rc$,　(c) $3Ra$,　(d) $4Rc$

是否正确.并且(e)将 R 写成一个有序偶的集合.

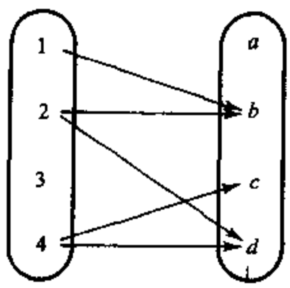


图 2-9

解 ☞ (a) 是,从 1 到 b 有一个箭号.

(b) 否,从 2 到 c 没有箭号.

(c) 否,从 3 到 a 没有箭号.

(d) 是,从 4 到 c 有一个箭号.

(e) 在图中的每一个箭号,比方说,从 x 到 y 确定 R 的一个有序偶(x,y).因此

$$R=\{(1,b),(2,b),(2,d),(4,c),(4,d)\}.$$

2.70　已知图 2-9 表示的从 X 到 Y 的关系R,求 Y 的如下子集:

(a) $E=\{y:2Ry\}$;　　(b) $F=\{y:1Ry\}$.

解 ☞ (a) 子集 E 由 2 与 Y 中有关系的 Y 的那些元素组成.有从 2 到 b 和从 2 到 d 的箭号,因此 $E=\{b,d\}$.

(b) 因只有一个箭号从 1 到 b,因此 $F=\{b\}$.

2.71　已知图 2-9 表示的从 X 到 Y 的关系R,求 X 的如下子集:

(a) $G=\{x:xRd\}$;　　(b) $H=\{x:xRa\}$.

解 ☞ (a)子集 G 由 X 的与 d 有关系的元素组成.从 2 到 d 和从 4 到 d 有箭号,因此 $G=\{2,4\}$.

(b) 由于没有到 a 的箭号,因此 $H=\varnothing$,它是空集.

2.72　设 $X=\{a,b,c,d,e,f\}$, $Y=\{\text{beef, dad, ace, cab}\}$, R 是从X 到 Y 的关系,此处若 x 是单词y 的一个字母,则$(x,y)\in R$.求表示 R 的矩阵M.

解 ☞ 指定 X 和 Y 的元素顺序，比方说，就所给定的顺序．注意到 M 有用 X 的元素标注的 6 行，以及用 y 的元素标注的 4 列．然后，若 x 是 y 的一个字母，则在行 x 和列 y 中置 1，否则置 0．于是

$$M = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{beef} & \text{dad} & \text{acc} & \text{cab} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

2.73 考虑从 $X = \{1,2,3\}$ 到 $Y = \{a,b,c,d\}$ 的关系 S，其矩阵表示是

$$M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

叙述下列关系是否正确：

(a) $1Sb$；　(b) $2Sa$；　(c) $3Sd$.

解 ☞ (a) 是．在行 1 列 b 中有一个 1.

(b) 否．在行 2 列 a 中有一个 0.

(c) 是．在行 3 列 d 中有一个 1.

2.74 将习题 2.73 中的关系 S 写成一个有序偶的集合．

解 ☞ 在矩阵中的每一个 1，比方说，在行 x 和列 y 中的 1 确定一个有序偶 $(x,y) \in S$．因此

$$S = \{(1,b),(1,d),(2,c),(2,d),(3,a),(3,b),(3,d)\}.$$

2.75 设 S 是习题 2.73 中的关系．求 X 和 Y 的如下子集：

(a) $E = \{x : xSb\}$；　(b) $F = \{y : 3Sy\}$.

解 ☞ (a) 子集 E 由 X 的与 b 有关系的元素组成．在矩阵 M 的列 b 中，有行 1 和行 3 的一个 1．因此 $E = \{1,3\}$.

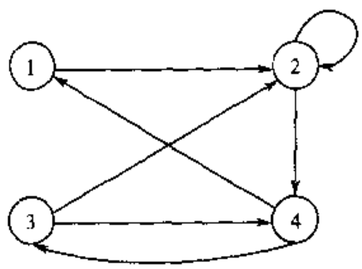
(b) 子集 F 由 3 与 Y 中有关系的 Y 的那些元素组成．在矩阵 M 的行 3 中有列 a，b 和 d 的一个 1．因此 $F = \{a,b,d\}$.

在一个集合上的一个关系的有向图

2.76 描述集合 A 上的一个关系 R 的"有向图"．用 $A = \{1,2,3,4\}$ 上定义为

$$R = \{(1,2),(2,2),(2,4),(3,2),(3,4),(4,1),(4,3)\}$$

的关系 R 解释之．（我们强调，对于从一个集合到另一个集合的关系，有向图是没有定义的．）



R={(1,2),(2,4),(3,2),(3,4),(4,1),(4,3)}

图 2-10

解 ☞ 记下 A 的元素,然后每当 $(x,y)\in R$ 时,便从元素 x 到 y 画一个箭号,如图 2-10 所示.

2.77 设 $A=\{1,2,3,4,6\}$, R 是 A 上的关系,定义为"x 整除 y",记作 $x\mid y$. 由习题 2.36,有

$$R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,6),(2,2),\\(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(6,6)\}.$$

画 R 的有向图.

解 ☞ 记下整数 1,2,3,4,6. 若 $x\mid y$,则从整数 x 到整数 y 画一个箭号,如图 2-11 所示.

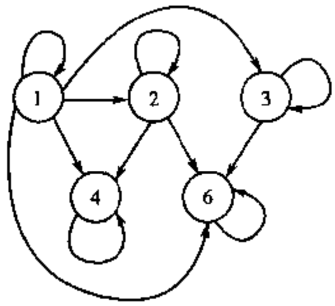


图 2-11

2.78 求习题 2.77 中关系 R 的矩阵 M.

解 ☞ 假设 M 的行和列都标注 1,2,3,4,6. 若 x 整除 y,则在行 x 和列 y 置 1,否则置 0. 因此

$$M=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\6\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&6\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&1&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\end{array}.$$

(注意,由于 R 是集合 A 上的一个关系,因此矩阵 M 是方阵,即 M 有相同的行数和列数.)

2.79 设 S 是 $X=\{a,b,c,d,e,f\}$ 上的关系,定义为

$$S=\{(a,b),(b,b),(b,c),(c,f),(d,b),(e,a),(e,b),(e,f)\}.$$

画 S 的有向图.

解 ☞ 记下 X 的字母,并且若 $(x,y)\in S$,则从字母 x 到字母 y 画一个箭号,如图 2-12 所示.

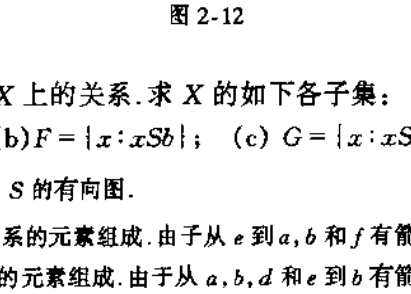


图 2-12

2.80 设 S 是习题 2.79 中 X 上的关系. 求 X 的如下各子集:

(a) $E=\{x:eSx\}$; (b) $F=\{x:xSb\}$; (c) $G=\{x:xSe\}$.

解 ☞ 应用图 2-12 中 S 的有向图.

(a) 子集 E 是 e 与其有关系的元素组成. 由于从 e 到 a, b 和 f 有箭号,因此 $E=\{a,b,f\}$.

(b) 子集 F 由与 b 有关系的元素组成. 由于从 a,b,d 和 e 到 b 有箭号,因此 $F=\{a,b,d,e\}$.

(c) 子集 G 由与 e 有关系的元素组成. 由于没有箭头到 e,因此 $G=\varnothing$,空集.

2.81 画出 $X=\{1,2,3,4\}$ 上的关系 T 的有向图，T 定义为

$$T=\{(1,1),(2,2),(2,3),(3,2),(4,2),(4,4)\}.$$

解 ☞ 当$(x,y)\in T$时，从 x 到 y 画一个箭号，如图 2-13. 注意 T 的每一有序偶有一个箭号.

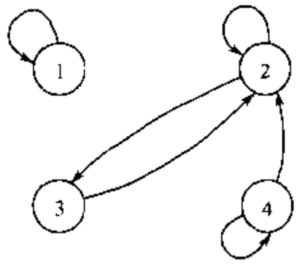


图 2-13

2.82 求表示习题 2.81 中的关系 T 的矩阵 M.

解 ☞ 每一$(x,y)\in T$ 确定 M 中的一个 1 如下：

$$M=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&0&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}.$$

2.83 设 R 是由图 2-14 有向图描述的 $A=\{1,2,3,4,5\}$ 上的关系. 将 R 写成有序偶的集合.

解 ☞ 在此图中每个箭号，例如从 x 到 y，确定 R 的一个有序偶. 因此

$$R=\{(1,2),(2,2),(2,4),(3,3),(3,5),(4,1),(5,2)\}.$$

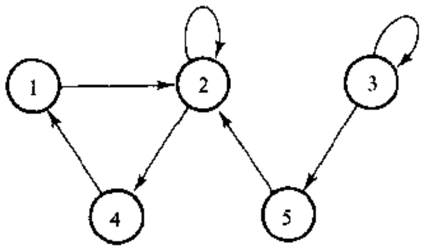


图 2-14

2.84 设 R 是图 2-14 表示的 A 上的关系. 求 A 的下列子集：

(a) $E=\{a:aR2\}$； (b) $F=\{a:aR3\}$.

解 ☞ (a)子集 E 由与 2 有关系的元素组成. 由于从 1，2 和 5 到 2 有箭号，因此 $E=\{1,2,5\}$.

(b) 由于只有一个箭号到 3，就是从 3 到其自身，因此 $F=\{3\}$.

2.85 设 R 是图 2-14 表示的 A 上的关系. 求 A 的下列子集：

(a) $G=\{a:2Ra\}$； (b) $H=\{a:3Ra\}$.

解 ☞ (a)子集 G 由 2 与其有关系的元素组成. 由于从 2 到 2 和 4 有箭号，因此 $G=\{2,4\}$.

(b) 由于从 3 到 3 和 5 有箭号，因此 $H=\{3,5\}$.

2.86 求图 2-14 表示的 A 上的关系 R 的矩阵 M.

解 ☞ 矩阵 M 有 5 行和 5 列(分别标注 A 的元素 1，2，3，4，5). 每当 xRy 时，在行 x 和列 y 中置整数 1，其余位置置 0，得到矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.87　求图 2-14 表示的 A 上的关系 R 的逆 R^{-1} 的矩阵 N.

解 ☞ 只要将习题 2.86 中 R 的矩阵 M 转置(行写成列,列写成行)得到

$$N = M^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.88　设 R 是 $A=\{2,3,4,6,9\}$ 上的关系,定义为"x 与 y 互质",即 x 与 y 只有正因子 1. 将 R 写成一个有序偶集合.

解 ☞ $R=\{(2,3),(2,9),(3,2),(3,4),(4,3),(4,9),(9,2),(9,4)\}$.

2.89　画出习题 2.88 中的关系 R 的有向图.

解 ☞ 每当 xRy 时,从 x 到 y 画一个箭号,如图 2-15.(注意 6 与任一元素没有关系.)

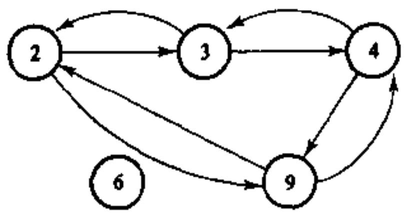


图 2-15

2.90　求习题 2.88 中表示关系 R 的矩阵 M.

解 ☞ 这里, M 有分别标注 2,3,4,6,9 的 5 行和 5 列. 于是

$$M = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 9 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 4 & 6 & 9 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

R 上的关系图

这一小节考虑实数集 **R** 上的关系. 通常,这样的一个关系 S 是由满足某一给定方程

$$E(x,y)=0$$

的所有实数有序偶组成. 关系 S 用此方程来定义,我们就说关系 $E(x,y)=0$. 而且,由于 $\mathbf{R}^2$ 可用平面上的点来表示,因此我们可以突出平面上属于 S 的那些点来绘画 S 的图形. 有时,关系的这种图形表示称为**关系图**.

2.91　求 R 上的下列关系的逆关系:

(a) $x^2+xy=100$;　(b) $5x^2-3y^2=15$;　(c) $y=\sin x$.

解 ☞ 由于 (a,b) 属于一个关系的充分必要条件是 (b,a) 属于它的逆关系,因此可以将给定方程的 x 和 y 交换得到逆关系. 于是

(a) $y^2+xy=100$,　(b) $5y^2-3x^2=15$,　(c) $x=\sin y$.

2.92 图 2-16 表示由方程 $4x^2+9y^2=36$ 的关系 S 的图形. 求 (a) S 的定义域;(b) S 的值域.

解 ☞ (a) 由于垂直线通过 x 轴上区间$[-3,3]$的每个点,并且只有这些点上垂直线至少含 S 的一个点,因此 S 的定义域是区间$[-3,3]$.

(b) 由于水平线通过 y 轴上区间$[-2,2]$的每一个点,并且只有这些点上水平线至少含 S 的一个点,因此 S 的值域是区间$[-2,2]$.

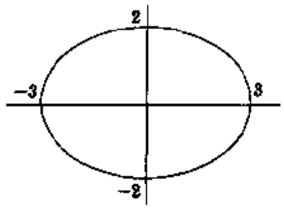


图 2-16

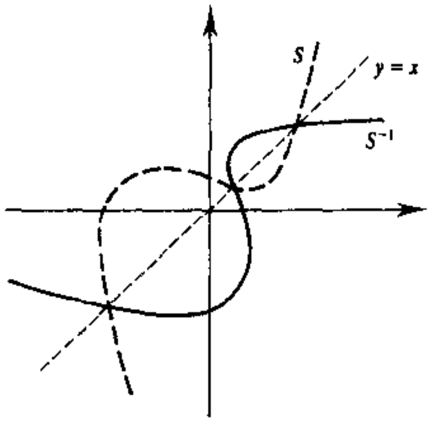


图 2-17

2.93 描述 R 上的一个关系 S 的图形和逆关系 S^{-1} 的图形之间的关系.

解 ☞ 有序偶(a,b)属于 S 的充分必要条件是反向偶(b,a)属于 S^{-1}. 因此 S^{-1} 的图形可以从 S 的图形关于直线 $y=x$ 经反射得到,如图 2-17 所示.

2.94 图 2-18 表示用方程 $y=x^2$ 定义的关系 S 的图形. 求 S 的定义域和值域.

解 ☞ 由于每条垂直线含 S 的一个点,因此 $\text{dom}(S)=\mathbf{R}$. 然而只有在 x 轴上和 x 轴以上的水平线与 S 的图形相交,因此 $\text{range}(S)=[0,\infty)=\{x:x\geqslant 0\}$.

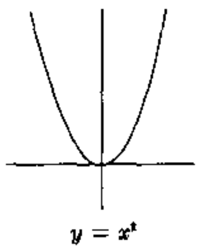


图 2-18

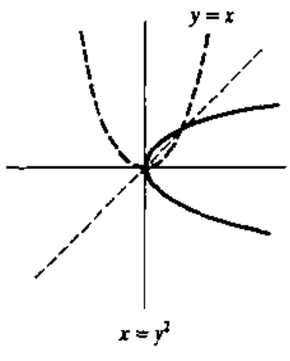


图 2-19

2.95 设 S 是习题 2.94 中的关系. (a)求确定逆关系 S^{-1} 的方程;(b)画 S^{-1} 的图形.

解 ☞ (a) 交换给定方程中的 x 和 y,得到 $x=y^2$.

(b) S 的图形关于直线 $y=x$ 经反射得 S^{-1} 的图形如图 2-19.

2.96 解释如何绘制 $\mathbf{R}$ 上的形如:

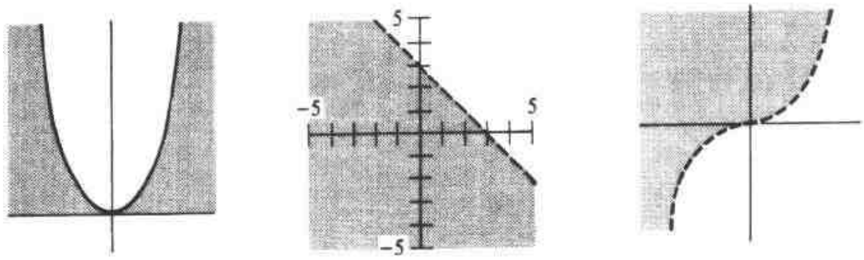
(a) $y>f(x)$; (b) $y\geqslant f(x)$; (c) $y<f(x)$; (d) $y\leqslant f(x)$

的关系 S 的图形.

解 ☞ 首先绘制 $y=f(x)$ 的图形. 于是 S 由(a) $y=f(x)$ 以上;(b) $y=f(x)$ 上及其以上;(c) $y=f(x)$ 以下;(d) $y=f(x)$ 上及其以下的所有点组成.

2.97 画 **R** 上的下列关系的草图:(a) $y \leqslant x^2$;(b) $y < 3 - x$;(c) $y > x^3$.

解 ☞ 应用习题 2.96 的方法得到图 2-20. 注意图 2-20(b) 和(c)的曲线 $y = f(x)$ 是用虚线画的,这是因为每个 $y = f(x)$ 上的点不属于相应的关系.



(a) $y \leq x^2$　　(b) $y < 3 - x$　　(c) $y > x^3$

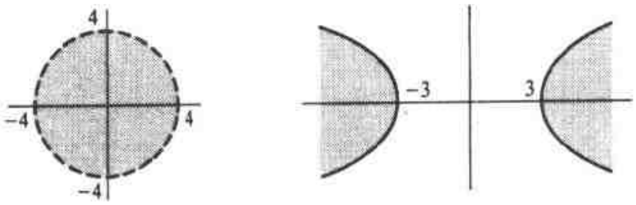
图 2-20

2.98 解释如何绘制 **R** 上的形式为 $E(x, y) < 0$(或 $\leqslant$, $>$, $\geqslant$)的关系的图形.

解 ☞ 首先绘制 $E(x, y) = 0$ 的图形. 曲线 $E(x, y) = 0$ 将平面划分成一个或更多个区域. 所考虑的关系将由一个或许更多个区域的所有点组成. 于是在每个区域中检验一个或更多个点以确定是否该区域的所有点都属于所考虑的关系.

2.99 画 **R** 上的下列关系的草图:(a) $x^2 + y^2 < 16$;(b) $x^2 - 4y^2 \geqslant 9$.

解 ☞ 应用习题 2.98 的方法得到图 2-21.



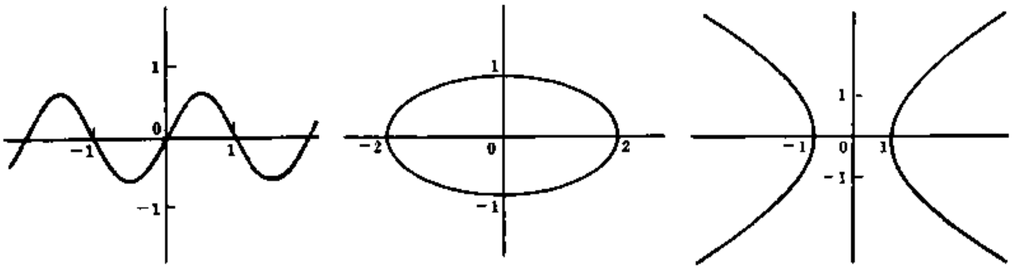
(a) $x^2 + y^2 < 16$　　(b) $x^2 - 4y^2 \geqslant 9$

图 2-21

2.100 考虑 **R** 上的下列关系:

(a) $y = \sin \pi x$; (b) $x^2 + 4y^2 = 4$; (c) $x^2 - y^2 = 1$.

与其相应的图形如图 2-22 所示,画每个逆函数的图形.



(a)　　(b)　　(c)

图 2-22

解 ☞ 每个图形关于直线 $y = x$ 经反射得逆函数的相应图(见图 2-23).

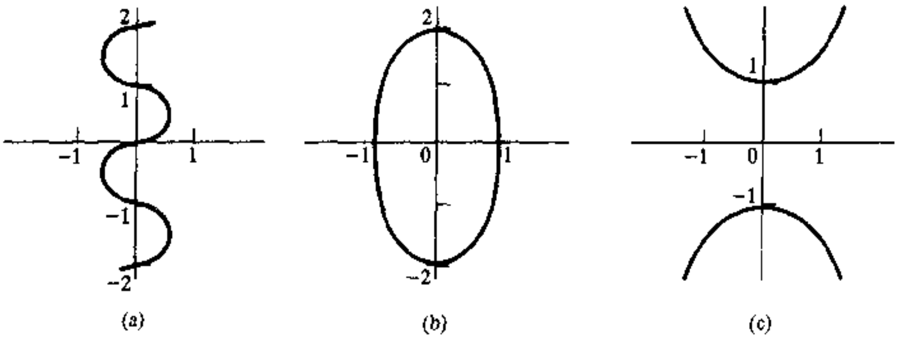


图 2-23

2.4 复合关系

2.101 定义复合关系.

解 ☞ 设 A, B 和 C 是三个集合，R 是 A 到 B 的一个关系，S 是从 B 到 C 的一个关系.这就是说，R 是 $A\times B$ 的一个子集 S 是 $B\times C$ 的一个子集.那么 R 和 S 产生一个从 A 到 C 的关系，记作 $R\circ S$，定义为：若对某一 $b\in B$ 有 aRb 和 bSc，则有

$$a(R\circ S)c.$$

这就是说，

$$R\circ S=\{(a,c):\text{存在 } b\in B \text{ 有}(a,b)\in R\text{ 且}(b,c)\in S\}.$$

这个关系 $R\circ S$ 称为 R 和 S 的**复合**.有时简单地用 RS 表示.

2.102 设 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b,c\}$, $C=\{x,y,z\}$.考虑下面的从 A 到 B 的关系 R 和从 B 到 C 的关系 S：

$$R=\{(1,b),(2,a),(2,c)\},$$
$$S=\{(a,y),(b,x),(c,y),(c,z)\}.$$

求复合关系 $R\circ S$.

解 ☞ 画出 R 和 S 的箭号图如图 2-24.从 1 到 b 有一个箭号随后从 b 到 x 有一个箭号.于是，由于 $1Rb$ 且 bSx，因此有 $1(R\circ S)x$，即 $(1,x)\in R\circ S$.同理，从 2 到 a 到 y 有一条通路，从 2 到 c 到 z 有一条通路.因此 $(2,y)$ 和 $(2,z)$ 也属于 $R\circ S$.没有别的有序偶属于 $R\circ S$.故

$$R\circ S=\{(1,x),(2,y),(2,z)\}.$$

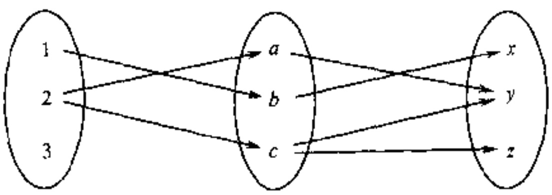


图 2-24

2.103 考虑习题 2.102 中的关系 R, S 和 $R\circ S$.(a)求 R, S 和 $R\circ S$ 的矩阵 M_R, M_S 和 $M_{R\circ S}$；(b)将 M_R 和 M_S 相乘并且将乘积 M_RM_S 和矩阵 $M_{R\circ S}$ 进行比较.

解 ☞ (a) 矩阵 M_R, M_S 和 $M_{R\circ S}$ 如下：

$$M_R=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}a&b&c\end{array}\\\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\end{array},\quad M_S=\begin{array}{c}\\a\\b\\c\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x&y&z\end{array}\\\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}\end{array},\qquad M_{R\circ S}=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x&y&z\end{array}\\\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\end{array}.$$

(b) M_R 和 M_S 相乘得

$$M_RM_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

矩阵 $M_{R\cdot S}$和M_RM_S 有相同的零元素.

2.104 设 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{a,b,c,d\}$, $C=\{x,y,z\}$. 考虑从 A 到 B 的关系 R, 以及从 B 到 C 的关系 S, 定义为

$$R = \{(1,a),(2,d),(3,a),(3,b),(3,d)\},$$
$$S = \{(b,x),(b,z),(c,y),(d,z)\}$$

求复合关系 $R\circ S$.

解 ☞ 画 R 和 S 的箭号图如图 2-25. 从 2 到 d 有一个箭号随后从 d 到 z 有一个箭号. 因此, 由 $2Rd$ 且 dSz 有 $2(R\circ S)z$. 同理, 从 3 到 b 到 x 有一条通路, 从 3 到 b 到 z 有一条通路. 因此有 $3(R\circ S)x$和 $3(R\circ S)z$. A 的其他元素和 C 的元素没有联系. 因此

$$R\circ S = \{(2,z),(3,x),(3,z)\}.$$

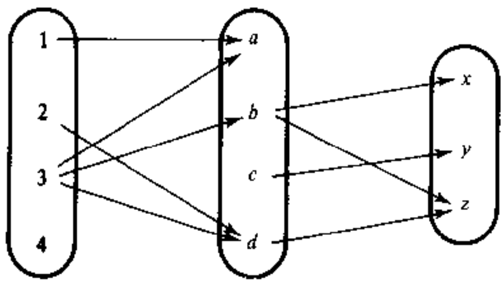


图 2-25

2.105 利用矩阵求习题 2.104 中关系 R 和 S 的复合 $R\circ S$.

解 ☞ 首先分别求得表示 R 和 S 的矩阵 M_R 和 M_S 如下:

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

和

$$M_S = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

M_R 和 M_S 相乘得矩阵

$$M = M_RM_S = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

这个矩阵的非零元告诉我们那些元素是为 $R\circ S$ 所联系的, 即 $M_{R\cdot S}$和 M 有相同的非零元(位置). 因此

$$R\circ S = \{(2,z),(3,x),(3,z)\}.$$

这与习题 2.104 的结果一致.

定理 2.1 设 A,B,C 和 D 是集合.设 R 是从 A 到 B 的一个关系,S 是从 B 到 C 的一个关系,T 是从 C 到 D 的一个关系.那么

$$(R\circ S)\circ T=R\circ(S\circ T).$$

(这就是说,复合关系满足结合律.)

2.106 证明定理 2.1.

解 我们要证明 $(R\circ S)\circ T$ 的每个有序偶属于 $R\circ(S\circ T)$,反之亦然.

设 (a,d) 属于 $(R\circ S)\circ T$,则存在 $c\in C$ 使得 $(a,c)\in R\circ S$ 且 $(c,d)\in T$.由于 $(a,c)\in R\circ S$,因此存在 $b\in R$,使得 $(a,b)\in R$ 且 $(b,c)\in S$.由于 $(b,c)\in S$ 且 $(c,d)\in T$,我们有 $(b,d)\in S\circ T$.由于 $(a,b)\in R$ 且 $(b,d)\in S\circ T$,我们有 $(a,d)\in R\circ(S\circ T)$.这样 $(R\circ S)\circ T\subseteq R\circ(S\circ T)$.同理,$R\circ(S\circ T)\subseteq(R\circ S)\circ T$.由这两个包含关系证得 $(R\circ S)\circ T=R\circ(S\circ T)$.

2.107 设 $A=\{a,b,c,d\}$,$B=\{1,2,3\}$,$C=\{w,x,y,z\}$.考虑从 A 到 B 的关系 R,以及从 B 到 C 的关系 S,它们定义为

$$R=\{(a,3),(b,3),(c,1),(c,3),(d,2)\},$$
$$S=\{(1,x),(2,y),(2,z)\}.$$

(a) 画 R 和 S 的箭号图;(b) 求复合关系 $R\circ S$.

解 (a) 画出集合 A,B 和 C,然后画上与 R 和 S 的有序偶相对应的箭头,如图 2-26.(b) 从 c 到 1 到 x,从 d 到 2 到 y 和从 d 到 2 到 z 都有一条通路.没有连接 A 到 C 的其他通路.因此 $R\circ S=\{(c,x),(d,y),(d,z)\}$.

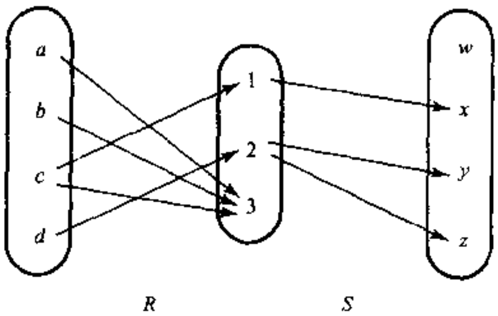


图 2-26

2.108 设 R 和 S 是 $A=\{1,2,3,4\}$ 上的两个关系,定义为

$$R=\{(1,1),(3,1),(3,4),(4,2),(4,3)\},$$
$$S=\{(1,3),(2,1),(3,1),(3,2),(4,4)\}.$$

求复合关系 $R\circ S$.

解 首先,求 $R\circ S$ 的以 1 开始的有关系的那些元素.注意有 $1R1$ 及 $1S3$,因此 $(1,3)$ 属于 $R\circ S$.

其次,求 $R\circ S$ 的以 2 开始的有关系的那些元素.因 R 中没有以 2 开始的有序偶,因此 $R\circ S$ 没有这样的元素.

再次,求 $R\circ S$ 的以 3 开始的有关系的那些元素.注意有 $3R1$ 和 $3R4$,以及 $1S3$ 和 $4S4$.因此 $(3,3)$ 和 $(3,4)$ 属于 $R\circ S$.

最后,求 $R\circ S$ 的以 4 开始的有关系的那些元素.注意有 $4R2$ 和 $4R3$,以及 $2S1,3S1$.和 $3S2$.这样 $(4,1)$ 和 $(4,2)$ 属于 $R\circ S$.故

$$R\circ S=\{(1,3),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2)\}.$$

2.109 求习题 2.108 中关系的复合 $S\circ R$.

解 首先用 S 然后用 R 得到如下通路:

(i) 1→3→1 以及 1→3→4;

(ii) 2→1→1;

(iii) 3→1→1;

(iv) 4→4→2 及 4→4→3.

因此

$$S\circ R=\{(1,1),(1,4),(2,1),(3,1),(4,2),(4,3)\}.$$

2.110 求习题2.108中关系 R 的复合 $R^2=R\circ R$.

解 ☞ 应用 R 两次得到下列通路:

1→1→1, 3→1→1, 3→4→2,

3→4→3, 4→3→1, 4→3→4.

因此

$$R^2=\{(1,1),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}.$$

2.111 求习题2.108中关系 R 的复合 $R^3=R\circ R\circ R$.

解 ☞ 应用 R 三次或求 R^2 与 R 的复合得到通路:

1→1→1, 3→1→1, 3→3→1, 3→3→4,

4→1→1, 4→4→2, 4→4→3.

因此

$$R^3=\{(1,1),(3,1),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}.$$

2.112 设 R 和 S 是 $X=\{a,b,c\}$ 上的关系,定义为

$$R=\{(a,b),(a,c),(b,a)\}$$

和

$$S=\{(a,c),(b,a),(b,b),(c,a)\}.$$

求分别表示 R 和 S 的矩阵 M_R 和 M_S.

解 ☞ 指定 X 的元素顺序,比方说 a,b,c,则

$$M_R=\begin{matrix} & a & b & c \\ a & 0 & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0\end{matrix},\qquad M_S=\begin{matrix} & a & b & c \\ a & 0 & 0 & 1 \\ b & 1 & 1 & 0 \\ c & 1 & 0 & 0\end{matrix}.$$

2.113 求习题2.112中关系 R 和 S 的复合 $R\circ S$.

解 ☞ M_R 和 M_S 相乘,得

$$M_RM_S=\begin{pmatrix}0+1+1 & 0+1+0 & 0+0+0\\ 0+0+0 & 0+0+0 & 1+0+0\\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

M_RM_S 的非零元表明 $R\circ S=\{(a,a),(a,b),(b,c)\}$.

2.114 求习题2.112中关系 S 和 R 的复合 $S\circ R$.

解 ☞ M_S 和 M_R 相乘,得

$$M_SM_R=\begin{pmatrix}0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0\\ 0+1+0 & 1+0+0 & 1+0+0\\ 0+0+0 & 1+0+0 & 1+0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

M_SM_R 的非零元表明 $S\circ R=\{(b,a),(b,b),(b,c),(c,b),(c,c)\}$.

2.115 求习题2.112中关系 R 的复合 $R^2=R\circ R$.

解 ☞ 矩阵 M_R 乘 M_R 得

$$M_R^2=\begin{pmatrix}0+1+0 & 0+0+0 & 0+0+0\\ 0+0+0 & 1+0+0 & 1+0+0\\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

因此 $R^2=\{(a,a),(b,b),(b,c)\}$.

2.116 求习题2.112中关系 S 的复合 $S^2=S\circ S$.

解 ☞ 矩阵 M_S 乘 M_S 得

$$M_S^2=\begin{bmatrix}0+0+1 & 0+0+0 & 0+0+0\\0+1+0 & 0+1+0 & 1+0+0\\0+0+0 & 0+0+0 & 1+0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

因此 $S^2=\{(a,a),(b,a),(b,b),(b,c),(c,c)\}$.

2.117 求习题 2.112 中关系 R 的逆 R^{-1} 以及表示 R^{-1} 的矩阵 N_R.

解 ☞ 将 R 的元素顺序颠倒过来得到

$$R^{-1}=\{(b,a),(c,a),(a,b)\}.$$

应用 R^{-1} 或将 M_R 转置得到

$$N_R=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}.$$

2.118 求习题 2.112 中关系 R 的复合 $R\circ R^{-1}$.

解 ☞ 矩阵 M_R 乘 N_R 得

$$M_RN_R=\begin{bmatrix}0+1+1 & 0+0+0 & 0+0+0\\0+0+0 & 1+0+0 & 0+0+0\\0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

因此 $R\circ R^{-1}=\{(a,a),(b,b)\}$.

2.119 求习题 2.112 中关系 R 的复合 $R^{-1}\circ R$.

解 ☞ 矩阵 N_R 乘 M_R 得

$$N_RM_R=\begin{bmatrix}0+1+0 & 0+0+0 & 0+0+0\\0+0+0 & 1+0+0 & 1+0+0\\0+0+0 & 1+0+0 & 1+0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}.$$

这样，$R^{-1}\circ R=\{(a,a),(b,b),(b,c),(c,b),(c,c)\}$.

2.120 给出用矩阵 M_R 表示关系 R 的优缺点.

解 ☞ 应用矩阵表示关系的一个主要的优点是容易得到复合关系和逆关系.主要缺点是要求存贮空间是 n^2 阶而关系或许是 n 阶的.例如，A 也许是有 100 个元素的集合和 R 或许是有 200 个元素的一个关系，因此大约需 300 个存贮单元存贮 A 和 R.但是，M_R 将需 $(100)^2=10000$ 个存贮单元.

2.5 关系的类型

2.121 设 R 是集合 A 上的一个关系.定义关系的下面 4 个类型：(a)自反的；(b)对称的；(c)反对称的；(d)传递的.（注意，这些性质仅仅对于一个集合上的关系来定义的，就是说，对于从一个集合到另一个集合的关系，它们是没有定义的.）

解 ☞ (a)若对于 A 的每一个 a 有 aRa，则 R 是**自反的**.

(b) 若 aRb 蕴含 bRa，则 R 是**对称的**.

(c) 若 aRb 且 bRa 蕴含 $a=b$，则 R 是**反对称的**.

(d) 若 aRb 且 bRc 蕴含 aRc，则 R 是**传递的**.

2.122 判定集合 A 上的一个关系 R 在什么情况下(a) 不是自反的；(b) 不是对称的；(c) 不是传递的；(d) 不是反对称的.

解 ☞ (a) 存在 $a\in A$ 使得 (a,a) 不属于 R.

(b) 存在 $(a,b)\in R$ 使得 (b,a) 不属于 R.

(c) 存在 $(a,b),(b,c)\in R$，使得 (a,c) 不属于 R.

(d) 存在不同的元素 a 和 b，使得 (a,b) 和 (b,a) 都属于 R.

2.123 考虑集合 $A=\{1,2,3\}$ 上的下列 5 个关系：

$$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(3,3)\};$$
$$S = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\};$$
$$T = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3)\};$$
$\varnothing$ = 空关系；

$A \times A$ = 全关系.

判定哪些关系是自反的.

解 ☞ R 不是自反的,因 $2 \in A$,但 $(2,2) \notin R$. T 不是自反的,因 $(3,3) \notin T$. 同理,$\varnothing$ 不是自反的. S 和 $A \times A$ 都是自反的.

2.124 判定习题 2.123 中 5 个关系哪些是对称的.

解 ☞ R 不是对称的,因 $(1,2) \in R$,但 $(2,1) \notin R$. 同理,T 不是对称的. S,$\varnothing$ 和 $A \times A$ 是对称的.

2.125 判定习题 2.123 中 5 个关系哪些是传递的.

解 ☞ T 不是传递的,因 $(1,2)$ 和 $(2,3)$ 属于 T,但 $(1,3)$ 不属于 T. 其他 4 个关系都是传递的.

2.126 判定习题 2.123 中 5 个关系哪些是反对称的.

解 ☞ S 不是反对称的,因 $1 \neq 2$,但 $(1,2)$ 和 $(2,1)$ 都属于 S. 同理,$A \times A$ 不是反对称的. 其他 3 个关系都是反对称的.

2.127 设 R 是 $A = \{1,2,3,4\}$ 上的关系,定义为

$$R = \{(1,1),(2,2),(2,3),(3,2),(4,2),(4,4)\}.$$

说明 R 既不是(a)自反的,又不是(b)传递的.

解 ☞ (a) 因为 $3 \in A$,但 $3 \not R 3$,即 $(3,3) \notin R$,所以 R 不是自反的.

(b) 因为 $4R2$ 且 $2R3$,但 $4 \not R 3$,即 $(4,2) \in R$ 且 $(2,3) \in R$,但 $(4,3) \notin R$,所以,R 不是传递的.

2.128 说明习题 2.127 中关系 R 既不是(a)对称的,又不是(b)反对称的.

解 ☞ (a) 因为 $4R2$,但 $2 \not R 4$,即 $(4,2) \in R$,但 $(2,4) \notin R$,所以 R 不是对称的.

(b) 因为 $2R3$ 且 $3R2$,但 $2 \neq 3$,所以 R 不是反对称的.

2.129 给出 $A = \{1,2,3\}$ 上的关系 R 的例子,使它具有所述性质:

(a) R 既是对称的又是反对称的;

(b) R 既不是对称的又不是反对称的;

(c) R 是传递的但 $R \cup R^{-1}$ 不是传递的.

解 ☞ 对于每个答案可以有若干例子. 列举一个例子如下:

(a) $R = \{(1,1),(2,2)\}$.

(b) $R = \{(1,2),(2,1),(2,3)\}$.

(c) $R = \{(1,2)\}$.

2.130 设 R,S 和 T 是 $A = \{1,2,3\}$ 上的三个关系,定义为

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3)\} = \Delta_A,$$
$$S = \{(1,2),(2,1),(3,3)\},$$
$$T = \{(1,2),(2,3),(1,3)\}.$$

判定哪些关系是自反的.

解 ☞ S 和 T 不是自反的,因 $1 \not S 1$ 及 $1 \not T 1$. 对角关系 R 是自反的.

2.131 判定习题 2.130 中哪些关系是对称的,

解 ☞ T 不是对称的. 因 $1T2$ 但 $2 \not T 1$. 关系 R 和 S 是对称的.

2.132 判定习题 2.130 中哪些关系是反对称的.

解 ☞ 由于 $1S2$ 且 $2S1$,但 $1 \neq 2$,因此 S 不是反对称的. 关系 R 和 T 是反对称的.

2.133 判定习题2.130中哪些关系是传递的.

解 ☞ 因 $1S2$ 且 $2S1$,但 $1 \not S 1$,因此 S 不是传递的.关系 R 和 T 是传递的.

2.134 考虑欧几里得(Euclid)平面中直线集合 L 上的垂直关系⊥.确定⊥是否自反的,对称的,反对称的或传递的.

解 ☞ 显然,若直线 a 垂直于直线 b,则 b 垂直于 a,即若 $a \perp b$,则 $b \perp a$,因此⊥是对称的.但是,⊥既不是自反的,反对称的,又不是传递的.

2.135 考虑正整数集合 **N** 上的整除关系|.(回忆一下,若存在一个 z 使得 $xz = y$,则 $x|y$,例如,$2|6$,$5|15$,$7|21$.)判定|是否是自反的,对称的,反对称的或传递的.

解 ☞ 显然,|不是对称的,例如,$2|6$ 但 $6 \nmid 2$.但是,因对每一 $n \in \mathbf{N}$,$n|n$,因此|是自反的.若 $n|m$ 且 $m|n$,则 $n = m$,因此|是反对称的.若 $r|s$ 且 $s|t$,则 $r|t$,因而|是传递的.(注意,在整数集 **Z** 上,例如 $2|-2$ 且 $-2|2$,但 $2 \neq -2$,因此|不是反对称的.)

2.136 在正整数集 **N** 上,下面:

$$R: x \text{ 大于 } y,$$

$$S: x + y = 10,$$

$$T: x + 4y = 10$$

的每一个定义 **N** 上的一个关系.判定哪些关系是自反的.

解 ☞ 没有一个关系是自反的,例如,$(1,1)$既不属于 R,S 又不属于 T.

2.137 判定习题2.136中哪些关系是对称的.

解 ☞ R 不是对称的,例如 $6>3$ 但 $3 \not> 6$.T 也不是对称的,因 $6T1$ 但 $1 \not T 6$.然而,S 是对称的.

2.138 判定习题2.136中哪些关系是传递的.

解 ☞ 若 $x>y$,$y>z$,则 $x>z$,因此 R 是传递的.但 S 不是传递的,例如,$3S7$ 且 $7S3$ 但 $3 \not S 3$.另外,$T = \{(6,1),(2,2)\}$是传递的.

2.139 判定习题2.136中哪些关系是反对称的.

解 ☞ 因 $2S8$ 且 $8S2$,但 $2 \neq 8$,因此 S 不是反对称的.然而,R 和 T 都是反对称的.

2.140 设 $P(X)$是至少有3个元素的集合 X 的所有子集的集合.定义 $P(X)$上的下面关系:

$$R: A \subseteq B, \qquad S: A \text{ 与 } B \text{ 不相交}, \qquad T: A \cup B = X.$$

判定上述关系中哪些是自反的.

解 ☞ 由于对任一集合 A,$A \subseteq A$,因此 R 是自反的.然而,S 和 T 都不是自反的.

2.141 判定习题2.140中哪些关系是对称的.

解 ☞ 因 $A \subseteq B$ 不能推得 $B \subseteq A$,因此 R 不是对称的.另一方面,S 和 T 都是对称的.

2.142 判定习题2.140中哪些关系是反对称的.

解 ☞ 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$,则 $A = B$,因此 R 是反对称的.显然 S 和 T 都不是反对称的.

2.143 判定习题2.140中哪些关系是传递的.

解 ☞ 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$,则 $A \subseteq C$,因此 R 是传递的.但是,S 和 T 都不是传递的.

2.144 设 R 是集合 A 上的一个关系.应用对角的 Δ_A,R^{-1}和复合关系重新定义下列性质:
(a) 自反的; (b) 对称的; (c) 反对称的; (d) 传递的

解 ☞ (a) 若 $\Delta_A \subseteq R$,则 R 是自反的.

(b) 若 $R = R^{-1}$,则 R 是对称的.

(c) 若 $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$,则 R 是反对称的.

(d) 若 $R \circ R \subseteq R$,则 R 是传递的.

2.145 设 R 和 S 都是集合 A 上的自反关系.证明 $R \cap S$ 是自反的.

证 ☞ 设 $a\in A$. 由于 R 和 S 都是自反的,因此 $(a,a)\in R$ 且 $(a,a)\in S$. 于是 $(a,a)\in R\cap S$, 故 $R\cap S$ 是自反的.

2.146 设 R 和 S 是集合 A 上的两个对称关系. 则 $R\cap S$ 也是对称的.

证 ☞ 设 $(a,b)\in R\cap S$, 则 (a,b) 同时属于 R 和 S, 由于 R 和 S 都是对称的,因此 (b,a) 同时属于 R 和 S, 因而 $(b,a)\in R\cap S$. 故 $R\cap S$ 是对称的.

2.147 设 R 和 S 都是集合 A 上的传递关系. 证明 $R\cap S$ 是传递的.

证 ☞ 假设 (a,b) 和 (b,c) 都在 $R\cap S$ 中,则 (a,b) 和 (b,c) 同时在 R 和 S 中. 因这两个关系都是传递的,因此 $(a,c)\in R$ 且 $(a,c)\in S$. 于是 $(a,c)\in R\cap S$. 故 $R\cap S$ 是传递的.

2.148 设 R 是集合 A 上的一个自反关系. 证明 R^{-1} 是自反的,并且对于 A 上的任一关系 S, $R\cup S$ 是自反的.

证 ☞ 设 $a\in A$. 由于 R 是自反的,因此 $(a,a)\in R$. 于是 $(a,a)\in R^{-1}$ 且 $(a,a)\in R\cup S$. 故 R^{-1} 和 $R\cup S$ 都是自反的.

2.149 设 R 是集合 A 上的一个反对称关系. 证明(a) R^{-1} 是反对称的;(b)对于集合 A 上的任一关系 S, $R\cap S$ 是反对称的.

证 ☞ (a) 设 (a,b) 和 (b,a) 都属于 R^{-1}, 则 (b,a) 和 (a,b) 都属于 R. 由于 R 是反对称的,因此 $a=b$. 这样, R^{-1} 是反对称的.

(b) 设 (a,b) 和 (b,a) 都属于 $R\cap S$. 那么,特别地, (a,b) 和 (b,a) 都在 R 中. 由于 R 是反对称的,因此 $a=b$. 故 $R\cap S$ 是反对称的

2.150 举一个反例,说明 R 和 S 都是传递关系,但 $R\cup S$ 未必是传递的.

证 ☞ 设 $R=\{(1,2)\}$, $S=\{(2,3)\}$, 则 R 和 S 都是传递的. 但是, $R\cup S=\{(1,2),(2,3)\}$ 不是传递的.

2.151 设 R 是 A 上的任一关系. 证明 $R\cup R^{-1}$ 是对称的.

证 ☞ 假设 $(a,b)\in R\cup R^{-1}$. 若 $(a,b)\in R$, 则 $(b,a)\in R^{-1}$, 因而 $(b,a)\in R\cup R^{-1}$. 同理,若 $(a,b)\in R^{-1}$, 则 $(b,a)\in R$, 因而 $(b,a)\in R\cup R^{-1}$. 故 $R\cup R^{-1}$ 是对称的.

闭包性质

2.152 设 R 是集合 A 上的一个关系. 定义 R 的传递(对称, 自反)闭包.

解 ☞ 设 R 是集合 A 上的一个关系. 若一个关系 R^* 是包含 R 的最小关系, 且是传递(对称, 自反)的, 则 R^* 是 R 的传递(对称, 自反)闭包.

2.153 设 R 是集合 A 上的一个关系. 试给出一个求 R 的对称和自反闭包的方法.

解 ☞ $R\cup R^{-1}$ 是 R 的对称闭包, $R\cup\Delta_A$ 是 R 的自反闭包.

2.154 设 R 是 $A=\{1,2,3\}$ 上的关系, 定义为

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,3)\}.$$

求(a) R 的自反闭包;(b) R 的对称闭包.

解 ☞ (a) $R\cup\Delta_A=\{(1,1),(1,2),(2,3),(2,2),(3,3)\}$ 是 R 的自反闭包.

(b) $R\cup R^{-1}=\{(1,1),(1,2),(2,3),(2,1),(3,2)\}$ 是 R 的对称闭包.

2.155 设 R 是有限集 A 上的一个关系, D 是 R 的有向图. 假设有向图 D 中从 a 到 c 有一条通路, 比方说,

$$a\rightarrow b_1\rightarrow b_2\rightarrow\cdots\rightarrow b_m\rightarrow c.$$

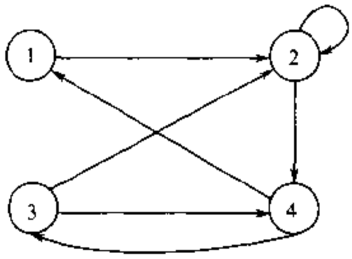
证明 (a,c) 属于 R 的传递闭包 R^*. (事实上, R^* 由 D 中所有的从 x 到 y 有一条通路的有序偶 (x,y) 组成.)

证 ☞ 我们有 (a,b_1) 和 (b_1,b_2) 属于 R 因而属于 R^*. 由于 R^* 是传递的,因此 (a,b_2) 属于 R^*.

由于(a,b_2)属于R^*且(b_2,b_3)属于R因而属于R^*，因此(a,b_3)属于R^*. 如此继续下去，最后，(a,c)属于R^*.

2.156 设集合$A=\{1,2,3,4\}$上的关系R是由图2-27的有向图定义的. 求R的传递闭包R^*.

解 ☞ 从A的每一个点到A的每个其他点都有一条通路且从每个点到其自身也有一条通路. 因此$R^*=A\times A$，它是全关系.



$R=\{(1,2),(2,2),(2,4),(3,2),(3,4),(4,1),(4,3)\}$

图 2-27

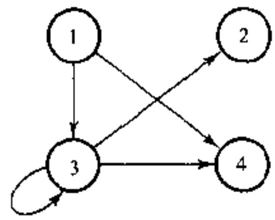


图 2-28

2.157 设集合$A=\{1,2,3,4\}$上的关系R由图2-28的有向图定义. 求R的传递闭包R^*.

解 ☞ 从1到点2,3和4都有一条通路. 从2到任一点没有通路. 从3到点2,3和4都有一条通路. 从4到任一点没有通路. 这样，

$$R^*=\{(1,2),(1,3),(1,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}.$$

2.158 设A有n个元素，比方说，$A=\{1,2,\cdots,n\}$. 求A上的一个关系R，使它具有n个有序偶且其传递闭包R^*是全关系$A\times A$(含n^2个有序偶).

解 ☞ 设$R=\{(1,2),(2,3),(3,4),\cdots,(n-1,n),(n,1)\}$. 那么$R$有$n$个元素，并且从$A$的每个元素到任一其他元素及本身都有一条通路. 故$R^*=A\times A$.

2.6 划分

2.159 定义非空集合S的一个划分.

解 ☞ S的一个**划分**是S的非空子集的一个集合$P=\{A_i\}$，它满足：

(i) S中的每一个元素a属于A_i之一；

(ii) P的集合是互不相交的，即若$A_i\neq A_j$，则$A_i\cap A_j=\varnothing$.

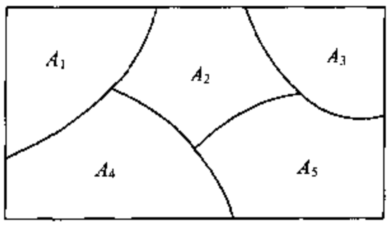


图 2-29

一个划分中的子集称为**块**. 图2-29是矩形点集分成五块的一个划分的文图.

2.160 设$S=\{1,2,3,4,5,6\}$. 判定下列各集合是否是S的一个划分：

(a) $P_1=[\{1,2,3\},\{1,4,5,6\}]$;

(b) $P_2=[\{1,2\},\{3,5,6\}]$;

(c) $P_3=[\{1,3,5\},\{2,4\},\{6\}]$;

(d) $P_4=[\{1,3,5\},\{2,4,6,7\}]$.

解 ☞ (a) 否. 因$1\in S$属于两块.

(b) 否. 因$4\in S$不属于任何一块.

(c) P_3是S的一个划分.

(d) 否. 因$\{2,4,6,7\}$不是S的一个子集.

2.161 设$S=\{$红色,蓝色,绿色,黄色$\}$. 判定下列各个集合是否是S的一个划分：

(a) P_1 = [{红色},{蓝色,绿色}];

(b) P_2 = [{红色,蓝色,绿色,黄色}];

(c) P_3 = [∅,{红色,蓝色},{绿色,黄色}].

解 ☞ (a) 否.因黄色不属于任何一块.

(b) P_2 是 S 的一个划分,它的惟一元素是 S 本身.

(c) 否.因空集∅不能属于一个划分.

2.162 设 $S=\{1,2,\cdots,8,9\}$.判定下列各个集合是否是 S 的一个划分:

(a) [{1,3,5},{2,6},{4,8,9}];

(b) [{1,3,5},{2,4,6,8},{5,7,9}];

(c) [{1,3,5},{2,4,6,8},{7,9}];

(d) [{S}].

解 ☞ (a) 否.因 $7\in S$ 不属于任何一块.

(b) 否.因{1,3,5}和{5,7,9}是相交的.

(c)和(d)都是 S 的划分.

2.163 设 $X=[1,2,\cdots,8,9]$.判定下列集合是否是 S 的划分:

(a) [{1,3,6},{2,8},{5,7,9}];

(b) [{1,5,7},{2,4,8,9},{3,5,6}];

(c) [{2,4,5,8},{1,9},{3,6,7}];

(d) [{1,2,7},{3,5},{4,6,8,9},{3,5}].

解 ☞ (a) 否.因 $4\in X$ 不属于任何一块.换句话说,X 不是这些块的并.

(b) 否.因 $5\in X$ 属于两个不同的块{1,5,7}和{3,5,6}.换句话说,两个不同的块不是不相交的.

(c) 是.因 X 的每个元素恰好属于一块.换句话说,这些块是互不相交的且它们的并是 X.

(d) 是.虽然3和5出现在两处,但这两块是相同的.

2.164 求集合 $S=\{1,2,3\}$的所有划分.

解 ☞ 注意到 S 的每一个划分含有1,2或是3个不同块.这些划分如下:

(1) [S];

(2) [{1},{2,3}],[{2},{1,3}],[{3},{1,2}];

(3) [{1},{2},{3}].

S 有5个不同划分.

2.165 求 $X=\{a,b,c,d\}$的所有划分.

解 ☞ 首先注意 X 的每个划分含有1,2,3或4个不同集合.这些划分如下:

(1) [{a,b,c,d}];

(2) [{a},{b,c,d}],[{b},{a,c,d}],[{c}{a,b,d}],
[{d},{a,b,c}],[{a,b,},{c,d}],[{a,c,},{b,d}],
[{a,d,},{b,c}];

(3) [{a},{b},{c,d}],[{a},{c},{b,d}],[{a},{d},{b,c}],
[{b},{c},{a,d}],[{b},{d},{a,c}],[{c},{d},{a,b}];

(4) [{a},{b},{c},{d}].

X 有15个不同的划分.

2.166 判定下列各个集合是否是正整数集 **N** 的一个划分:

(a) [$\{n:n>5\}$,$\{n:n<5\}$];

(b) [$\{n:n>5\}$,{0},{1,2,3,4,5}];

(c) [$\{n:n^2>11\}$,$\{n:n^2<11\}$].

解 ☞ (a) 否.因 $5\in$ **N** 不属于任何一块.

(b) 否.因$\{0\}$不是$\mathbf{N}$的一个子集.

(c) 是.这两块是不相交的,并且它们的并是$\mathbf{N}$.

2.167 判定下列各个集合是否是实数集$\mathbf{R}$的一个划分:

(a) $[\{x:x>4\},\{x:x<5\}]$;

(b) $[\{x:x>0\},\{0\},\{x:x<0\}]$;

(c) $[\{x:x^2>11\},\{x:x^2<11\}]$.

解 ☞ (a) 否.因两块是相交的,例如4.5同时属于这两块.

(b) 是.因这三块是互不相交的,且它们的并是$\mathbf{R}$.

(c) 否.因$\sqrt{11}$在$\mathbf{R}$中,但它不属这两块的任一块.

2.168 设$[A_1,A_2,\cdots,A_m]$和$[B_1,B_2,\cdots,B_n]$是集合X的两个划分.证明集合的集合

$$P=[A_i\cap B_j:i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,n]\setminus\varnothing$$

亦是X的一个划分(称为**交叉划分**).(注意,我们删去空集$\varnothing$.)

证 ☞ 设$x\in X$,则有一个r使得$x\in A_r$且有一个s使得$x\in B_s$,因此x属于$A_r\cap B_s$.于是$A_r\cap B_s$的并等于X.现设$A_r\cap B_s$和$A_{r'}\cap B_{s'}$是相交的.例如,设y同时属于这两个集合,那么y属于A_r和$A_{r'}$,因此$A_r=A_{r'}$.同理,y属于B_s和$B_{s'}$,因此$B_s=B_{s'}$.于是$A_r\cap B_s=A_{r'}\cap B_{s'}$.这样,这些块是互不相交的或是相等的.故$P$是$X$的一个划分.

2.169 设$S=\{1,2,3,4,5,6\}$.求S的下列划分的交叉划分P:

$$P_1=[\{1,2,3\},\{4,5,6\}],$$

$$P_2=[\{1,3,4,6\},\{2,5\}].$$

解 ☞ 由P_1的每一个块和P_2的每一个块的交得到

$$P=[\{1,3\},\{2\},\{4,6\},\{5\}].$$

2.170 设$X=\{1,2,3,\cdots,8,9\}$.求X的下列划分的交叉划分P:

$$P_1=[\{1,3,5,7,9\},\{2,4,6,8\}],$$

$$P_2=[\{1,2,3,4\},\{5,7\},\{6,8,9\}].$$

解 ☞ 求P_1的每一块和P_2的每一块的交(删去空的交)得到

$$P=[\{1,3\},\{5,7\},\{9\},\{2,4\},\{6,8\}].$$

2.171 设P是一个集合X的划分P_1和P_2的交叉划分.在什么条件下有$P=P_1$?

解 ☞ 若P_1的每一块是P_2的一块的一个子集,则$P=P_1$.

2.172 设P是一个集合X的划分P_1和P_2的交叉划分.设P_1有r块,P_2有s块.求P的块数n的界.

解 ☞ P不可能有多于rs块,且P的块数不能少于P_1或P_2的块数.换句话说,$\max(r,s)\leqslant n\leqslant rs$.

2.173 设集合S有n个元素,$f(n,k)$表示S分成$k(k=1,2,\cdots,n)$块的划分数目.求$f(n,k)$的一个递推公式.

解 ☞ 首先注意到,由于只有一种方法将具有n个元素的集合S划分成一块或n块,因此$f(n,1)=1,f(n,n)=1$.现设$n>1$且$1<k<n$.设b是S的某个元素.若$\{b\}$组成一块,则有$f(n-1,k-1)$种方法能将$S\setminus\{b\}$分成$k-1$块.另一方面,$S\setminus\{b\}$分成k块的每个划分允许b被接纳到一块中,有k种方法.因此我们证得

$$f(n,k)=f(n-1,k-1)+kf(n-1,k).$$

这就是我们要的递推公式.

2.174 考察习题2.173的递推公式.(a)在形成相似帕斯卡(Pascal)三角形中,$n=1,2,3,4,6$时的解;(b)求一个有$n=6$个元素的集合的划分数目m.

解 ☞ (a) 应用该递推公式(例如,$f(6,4)=f(5,3)+4f(5,4)=25+4\times10=65$)得到三角形

1

1 1

1 3 1

1 7 6 1

1 15 25 10 1

1 31 90 65 15 1

(b) $m=1+31+90+65+15+1=203$.

2.7 等价关系

2.175 什么是等价关系？

解 ☞ 设 R 是集合 A 上的一个关系.若它是自反的、对称的和传递的,则称 R 是一个**等价关系**.

2.176 设 L 是欧几里得平面中的直线集合.设 R 是L 上的关系,定义为“平行于($\parallel$)或者重合($=$)”.证明 R 是一个等价关系.

证 ☞ 对于 L 中的任一直线 a,有 $a=a$,因此 R 是自反的.若 $a\parallel b$,则 $b\parallel a$,因此 R 是对称的.若 $a\parallel b$ 且 $b\parallel c$,则 $a\parallel c$ 或 $a=c$,因此 R 是传递的.故 R 是一个等价关系.

2.177 在欧几里得平面的直线集合 L 上,设 S 是关系“有一个公共点”.S 是一个等价关系吗?

解 ☞ 不是.若 a 和 c 是不相同的水平线,b 是一条垂直线,则 aSb 且 bSc,但 $a\not S c$.

2.178 考虑欧几里得平面的直线集合上的垂直关系$\perp$.$\perp$是一个等价关系吗?

解 ☞ 不是.虽然$\perp$是对称的,但它既不是自反的又不是传递的.

2.179 设 T 是欧几里得平面中的三角形集合.证明相似关系 R 是 T 上的一个等价关系.

证 ☞ 每个三角形与自身相似,因此 R 是自反的.若三角形 a 与三角形 b 相似,则 b 与 a 相似,因而 R 是对称的.若 a 与 b 相似且 b 与 c 相似,则 a 与 c 相似.因此 R 是一个等价关系.

2.180 设 R 是正整数集 $\mathbf{N}$ 上的一个关系,定义为

$$R=\{(a,b):a+b\text{ 是偶数}\}.$$

R 是一个等价关系吗?

解 ☞ 是的.显然对任一 $a\in\mathbf{N}$,$a+a$ 是偶数,若 $a+b$ 是偶数,则 $b+a$ 是偶数.因此 R 是自反的和对称的.为了证明 R 是传递的,我们注意到,aRb 的充分必要条件是 a 和 b 同时有相同的奇偶性,即 a 和 b 同时是奇数或同时是偶数.因此,若 aRb 且 bRc,则 a 和 b 有相同的奇偶性且 b 和 c 有相同的奇偶性,因此 a 和 c 有相同的奇偶性,即 aRc.这样,R 亦是传递的.故 R 是一个等价关系.

2.181 设 S 是人的集合 X 上的关系“有血缘关系的”.S 是一个等价关系吗?

解 ☞ 不是.虽然 S 显然是自反的和对称的,但它不是传递的.例如,b 或许有一个母亲家族的表兄弟 a,有一个父亲家族的堂兄弟 c,aSb 且 bSc,但 a 和 c 未必有血缘关系.

2.182 设 $R=\{(1,1),(1,3),(3,1),(3,3)\}$.$R$ 在 $A=\{1,2,3\}$ 上是等价关系吗?在 $B=\{1,3\}$上是等价关系吗?

解 ☞ 显然 R 是对称的和传递的.但是,R 不是 A 上的等价关系,因 $2\not R 2$,从而 R 在 A 上不是自反的.另一方面,R 在B 上是自反的,因此 R 是B 上的一个等价关系.

2.183 证明集合包含关系$\subseteq$不是一个等价关系,例如不是 $\mathbf{N}$ 的子集上的一个等价关系.

证 ☞ 关系$\subseteq$是自反的和传递的,但$\subseteq$不是对称的,就是说,$A\subseteq B$ 不意味着 $B\subseteq A$.

2.184 考虑整数集 $\mathbf{Z}$ 和一个整数 $m>1$.如果 $x-y$ 能被 m 整除,或等价地,存在一个整数 k 使得 $x=y+km$,我们则说 x 和 y 是按模 m 同余的,记作

$$x\equiv y(\bmod m).$$

证明这就是定义 $\mathbf{Z}$ 上的一个等价关系.

证 ☞ 对于 $\mathbf{Z}$ 中的任一个 x,因 $x-x=0$ 可被 m 整除,因此我们有 $x\equiv x(\bmod m)$.于是该关系

是自反的.

设 $x\equiv y(\mathrm{mod}\,m)$,则 $x-y$ 可被 m 整除.那么,$-(x-y)=y-x$ 亦可被 m 整除,因此 $y\equiv x(\mathrm{mod}\,m)$.这样,该关系是对称的.

现设 $x\equiv y(\mathrm{mod}\,m)$和 $y\equiv z(\mathrm{mod}\,m)$,则 $x-y$ 和 $y-z$ 都能被 m 整除.那么,和

$$(x-y)+(y-z)=x-z$$

亦能被 m 整除,因此 $x\equiv z(\mathrm{mod}\,m)$.这样,该关系是传递的.

我们已证明了 **Z** 上按模 m 同余的关系是自反的、对称的和传递的,因此它是一个等价关系.

2.185 设 A 是一个非零整数集合,并设$\simeq$是 $A\times A$ 上的关系,定义为:每当 $ad=bc$ 时,

$$(a,b)\simeq(c,d).$$

证明$\simeq$是一个等价关系.

证 ☞ 我们必须证明$\simeq$是自反的、对称的和传递的.

(i) 自反性.因 $ab=ba$,我们有$(a,b)\simeq(a,b)$.因此$\simeq$是自反的.

(ii)对称性.设$(a,b)\simeq(c,d)$,则 $ad=bc$.因此 $cb=da$,从而$(c,d)\simeq(a,b)$.这样,$\simeq$是对称的.

(iii) 传递性.设$(a,b)\simeq(c,d)$且$(c,d)\simeq(e,f)$,则 $ad=bc$ 且$cf=de$.将这两个等式的对应项相乘得$(ad)(cf)=(bc)(de)$ 因 $c\neq 0$ 且 $d\neq 0$,可将此等式两边的 c,d 消去得$af=be$,因此有$(a,b)\simeq(e,f)$.这样,$\simeq$是传递的.

于是,$\simeq$是一个等价关系.

2.186 设 A 是一个整数集合,并设$\sim$是 $A\times A$ 上的关系,定义为

$$(a,b)\sim(c,d),\text{若 } a+d=b+c$$

证明$\sim$是一个等价关系.

证 ☞ 我们必须证明$\sim$是自反的、对称的和传递的.

(i) 自反性.因 $a+b=b+a$,我们有$(a,b)\sim(a,b)$.因此$\sim$是自反的.

(ii) 对称性.设$(a,b)\sim(c,d)$,则 $a+d=b+c$.因此 $c+b=d+a$,从而$(c,d)\sim(a,b)$.因此$\sim$是对称的.

(iii) 传递性.设$(a,b)\sim(c,d)$且$(c,d)\sim(e,f)$,则 $a+d=b+c$ 且$c+f=d+e$.将这两个等式两端相加,得

$$(a+d)+(c+f)=(b+c)+(d+e).$$

从这个等式两端减去 c 和d 得$a+f=b+e$,因而有$(a,b)\sim(e,f)$.这样,$\sim$是传递的.

于是,$\sim$是一个等价关系.

等价关系和划分

2.187 设 R 是非空集合A 上的一个等价关系.(a)定义元素 $a\in A$ 的**等价类**,用$[a]$表示;(b)定义 A 关于R 的**商集**,用 A/R 表示.

解 ☞ (a) 等价类$[a]$是 A 中 a 与它有关系的元素的集合,即

$$[a]=\{x:(a,x)\in R\}.$$

(b) A/R 是等价类的集合,即

$$A/R=\{[a]:a\in A\}.$$

定理 2.2 设 R 是非空集合A 上的一个关系,则商集 A/R 是A 的一个划分,具体地说,

(i) 对于每一个 $a\in A$,$a\in[a]$;

(ii) 当且仅当$(a,b)\in R$ 时,$[a]=[b]$;

(iii) 若$[a]\neq[b]$,则$[a]$和$[b]$是不相交的.

2.188 证明定理 2.2.

证 ☞ (i)的证明.由于 R 是自反的,因此对每个 $a\in A$,有$(a,a)\in R$,从而 $a\in[a]$.

(ii)的证明.假设$(a,b)\in R$.我们要证明$[a]=[b]$.设 $x\in[b]$,则$(b,x)\in R$.根据假设$(a,b)\in R$,因此,由传递性,$(a,x)\in R$,于是 $x\in[a]$.这样,$[b]\subseteq[a]$.为了证明$[a]\subseteq[b]$,由对称性,我们注意到$(a,b)\in R$ 意指$(b,a)\in R$.于是,用类似的论证,我们得到$[a]\subseteq[b]$,故$[a]=[b]$.另一方面,

若$[a]=[b]$，则由(i)有 $b\in[b]=[a]$，因此$(a,b)\in R$.

(ii)的证明.我们证明等价的逆否陈述：

$$若[a]\cap[b]\neq\varnothing，则[a]=[b].$$

若$[a]\cap[b]\neq\varnothing$，则存在一元素 $x\in A$，使得 $x\in[a]\cap[b]$.因此$(a,x)\in R$ 且$(b,x)\in R$.由对称性，$(x,b)\in R$，又由传递性，$(a,b)\in R$，因此，据(ii)有$[a]=[b]$.

2.189 设 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，R 是 A 上的一个等价关系，定义为

$$R=\{(1,1),(1,5),(2,2),(2,3),(2,6),(3,2),(3,3),(3,6),(4,4),(5,1),(5,5),(6,2),(6,3),(6,6)\}.$$

求由 R 导出的 A 的划分，即求 R 的等价类.

解 ☞ 1 与 1 和 5 有关系，因此

$$[1]=\{1,5\}$$

我们选择一个不属于[1]的元素，例如 2.2 与 2,3,6 有关系，因此

$$[2]=\{2,3,6\}.$$

现在只有 4 不属于[1]和[2]，4 只与 4 有关系，因此

$$[4]=\{4\}.$$

于是，$[\{1,5\},\{2,3,6\},\{4\}]$是由 R 导出的 A 的划分.

2.190 关系 $R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$是集合 $S=\{1,2,3\}$上的一个等价关系.求商集 S/R.

解 ☞ 对于关系 R，$[1]=\{1,2\}$，$[2]=\{1,2\}$和$[3]=\{3\}$.注意到$[1]=[2]$，因此我们有 $S/R=\{[1],[3]\}$.

2.191 设 $A=\{1,2,3,\cdots,13,14,15\}$，并且设 R 是 A 上的关系，定义为按模 4 同余.求由 R 确定的等价类.

解 ☞ 见习题 2.184，若 4 整除 $a-b$ 或等价地，若存在一整数 k 使得 $a=b+4k$，则 $a\equiv b \pmod 4$，于是

(1) 将 4 的倍数加到 1，得到$[1]=\{1,5,9,13\}$.

(2) 将 4 的倍数加到 2，得到$[2]=\{2,6,10,14\}$.

(3) 将 4 的倍数加到 3，得到$[3]=\{3,7,11,15\}$.

(4) 将 4 的倍数加到 4，得到$[4]=\{4,8,12\}$.

由于它们包含 A 的所有元素，因此[1]，[2]，[3]，[4]全都是等价类.

2.192 考虑单词集合 $W=\{$sheet, last, sky, wash, wind, sit$\}$.求 W/R，此处 R 是 W 上的等价关系，定义为(a)有相同的字母数目；(b)开头字母相同.

解 ☞ (a)有相同字母数目的那些单词属于同一块，因此

$$W/R=[\{\text{sheet}\},\{\text{last, wash, wind}\},\{\text{sky, sit}\}].$$

(b)开头字母相同的那些单词属于同一块，因此

$$W/R=[\{\text{sheet, sky, sit}\},\{\text{last}\},\{\text{wash, wind}\}].$$

2.193 设 $A=\{1,2,3,\cdots,14,15\}$.考虑 $A\times A$ 上的等价关系$\simeq$，它定义为：若 $ad=bc$，则$(a,b)\simeq(c,d)$(见习题 2.185).求(3,2)的等价类.

解 ☞ 我们查找使得$(3,2)\simeq(m,n)$，即使得 $3n=2m$ 或 $3/2=m/n$ 的所有(m,n).(换句话说，若将(3,2)写成因子 3/2，则我们查找等价类 3/2 的所有因子 m/n.)于是

$$[(3,2)]=\{(3,2),(6,4),(9,6),(12,8),(15,10)\}.$$

2.194 设 $A=\{1,2,3,\cdots,14,15\}$.考虑 $A\times A$ 上的等价关系$\sim$，它定义为：若 $a+d=b+c$，则$(a,b)\sim(c,d)$.(见习题 2.186.)求(2,11)的等价类.

解 ☞ 我们查找使得$(2,11)\sim(m,n)$，即使得 $2+n=11+m$ 或 $n=9+m$ 的所有(m,n).置 $m=1,2,\cdots$得

$$[(2,11)]=\{(1,10),(2,11),(3,12),(4,13),(5,14),(6,15)\}.$$

2.195 设 R_5 是整数集 **Z** 上的等价关系,定义为 $x \equiv y \pmod 5$.(见习题2.184.)求等价类导出的 $\mathbf{Z}/R_5$.

解 ☞ 在 $\mathbf{Z}/R_5$ 中恰有5个不同的等价类:

$$A_0 = \{\cdots, -10, -5, 0, 5, 10, \cdots\},$$
$$A_1 = \{\cdots, -9, -4, 1, 6, 11, \cdots\},$$
$$A_2 = \{\cdots, -8, -3, 2, 7, 12, \cdots\},$$
$$A_3 = \{\cdots, -7, -2, 3, 8, 13, \cdots\},$$
$$A_4 = \{\cdots, -6, -1, 4, 9, 14, \cdots\}.$$

具体地说,$A_r = [r]$ 是将5的倍数加到 r 得到的.注意,任一个整数 x 是惟一地能表示成形式 $x = 5q + r$,此处 $0 \leqslant r \leqslant 4$ 使得 $x \in A$.

定理 2.3 设 $P = \{A_k\}$ 是集合 S 的一个划分.那么在 S 上有一个等价关系 ~ 使得 $S/\sim$ 是与划分 $P = \{A_k\}$ 相同的.

2.196 证明定理2.3.

证 ☞ 若 a 和 b 属于同一块 A_k,则定义 $a \sim b$.显然,~是自反的和对称的.A_k 相互分离便保证~也是传递的.于是~是一个等价关系.而且

$$[a] = \{x : a \sim x\}$$
$$= \{x : x \text{ 与 } a \text{ 在同一块} A_k \text{ 中}\}.$$

于是关于~的等价类和划分 P 的块相同.

2.8 三元和 n-元关系

2.197 定义一个三元关系并给出一个例子.

解 ☞ 一个**三元关系**是有序三元组的集合.特别地,若 S 是一个集合,则 S^3 的一个子集称为 S 上的一个三元关系.例如,若 L 是一条直线,则"中间"是沿着 L 的点的一个三元关系.

2.198 设 $A = \{1, 2, 3, \cdots, 14, 15\}$.再设 R 是 A 上的用方程 $x^2 + 5y = z$ 定义的三元关系.将 R 写成一个有序三元组的集合.

解 ☞ 由于 $x > 3$ 时,$x^2 > 15$,我们只要当 $x = 1, 2, 3$ 时求解 y 和 z.因此

$$R = \{(1,1,6), (1,2,11), (2,1,9), (2,2,14), (3,1,14)\}.$$

2.199 说明一个二元运算,例如加法(+)怎么可以认为是一个三元关系呢?

解 ☞ 运算+可以定义为有序三元组的集合如下:

$$+ = \{(x, y, z) : x + y = z\}.$$

这样,例如(2,5,7)属于+但(3,4,5)不属于+.

2.200 定义一个 n-元关系并给出一个例子.

解 ☞ 一个 n-元关系是 n-元有序组的一个集合.特别地,若 S 是一个集合,则 S^n 的一个子集称为 S 上的一个 n-元关系.例如,一个方程,比方说

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = 0$$

的解集 W 可以认为是 **R** 上的一个 n 元关系.

2.201 设 $A = \{1, 2, 3, \cdots, 14, 15\}$.设 R 是 A 上的一个元关系,定义为

$$R = \{(x, y, z, t) : 4x + 3y + z^2 = t\}.$$

将 R 写成4-元有序组的集合.

解 ☞ 注意,我们只能有 $x = 1, 2, 3$.因此

$$R = \{(1,1,1,8), (1,1,2,11), (1,2,1,11), (1,2,2,14),$$
$$(1,3,1,14), (2,1,1,12), (2,1,2,15), (2,2,1,15)\}.$$

第三章　函　数

3.1　函数、映射

3.1　定义从一个集合 A 到一个集合 B 的函数.

解　☞ 假设 A 的每一个元素都被赋予 B 的惟一元素，那么这样的赋值集合称为从 A 到 B 的一个**函数(或映射)**.我们用

$$f:A\to B$$

表示从 A 到 B 的一个函数 f.我们将 $f(a)$ 读作"a 的 f". f 赋给 $a\in A$ 的 B 的元素称为 f 在 a 的**值**或 a 在 f 下的**象**.

注　术语函数和映射常常按同义使用,尽管有些教科书对实值或复值映射,即把一个集合映射到 **R** 或 **C** 保留使用函数这个词.

3.2　一个函数 $f:A\to B$ 的(a)定义域,(b)上域,(c)象集是什么?

解　☞ (a) 集合 A 是 f 的**定义域**.

(b) 集合 B 是 f 的**上域**.

(c) f 的所有的象值的集合称为 f 的**象(集)(或值域)**,用 $\mathrm{Im}f$ 或 $f(A)$ 表示,即

$$\mathrm{Im}f=\{b\in B:\text{存在 } a\in A \text{ 使得 } f(a)=b\}.$$

我们看到 $\mathrm{Im}f$ 是 B 的一个子集(也许是真子集).

3.3　考虑函数 $f:A\to B$.(a)设 S 是 A 的一个子集.定义在 f 下 S 的**象(集)**,用 $f(S)$ 表示.(b)设 T 是 B 的一个子集.定义在 f 下 T 的**逆象(集)**或**原象(集)**,用 $f^{-1}(T)$ 表示.

解　☞ (a) $f(S)=\{f(a):a\in S\}=\{b\in B:\exists a\in S \text{ 使 } f(a)=b\}$.换句话说,$f(S)$ 由 S 中所有的元素的象组成.(这里,$\exists$ 是"存在"的缩写).

(b) $f^{-1}(T)=\{a\in A:f(a)\in T\}$.换句话说,$f^{-1}(T)$ 由 A 的元素中其象属于 T 的所有元素组成.

3.4　定义函数相等.

解　☞ 设函数 $f:A\to B$ 和 $g:A\to B$ 对于每个 $a\in A$ 都有 $f(a)=g(a)$,则定义这两个函数**相等**,记作 $f=g$. $f=g$ 的否定记作 $f\neq g$,其含意是存在 $a\in A$ 使得 $f(a)\neq g(a)$.

3.5　定义函数 $f:A\to B$ 的图形.

解　☞ 每一个函数 $f:A\to B$ 对应于由$\{(a,f(a)):a\in A\}$给出的 $A\times B$ 的子集合.我们称这个集合为 f 的**图形**.我们注意到,两个函数 $f:A\to B$ 和 $g:A\to B$ 相等当且仅当它们有相同的图形.这样,我们在一个函数和其图形之间不加以区别.

3.6　考虑图 3-1 定义的从 $A=\{a,b,c,d\}$到 $B=\{x,y,z,w\}$的函数 f.求:(a)A 的每个元素的象;(b)f 的象;(c)f 的图形,即将 f 写成一个有序偶的集合.

解　☞ (a) 箭号指明一个元素的象.因此

$$f(a)=y,\quad f(b)=x,\quad f(c)=z,\quad f(d)=y.$$

(b) f 的象由所有的象值组成.只有 x,y,z 作为象值出现,因此

$$f(A)=\{x,y,z\}.$$

(c) 有序偶$(a,f(a))$形成 f 的图形,此处 $a\in A$.因此

$$f=\{(a,y),(b,x),(c,z),(d,y)\}.$$

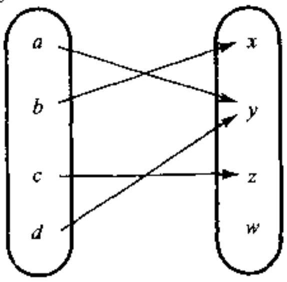


图 3-1

3.7　考虑图 3-1 定义的函数 f.求:(a) $f(S)$,此处 $S=\{a,b,d\}$;(b) $f^{-1}(T)$,此处 $T=\{y,z\}$;(c) $f^{-1}(w)$.

解　☞ (a) $f(S)=f(\{a,b,d\})=\{f(a),f(b),f(d)\}=\{y,x,y\}=\{x,y\}$.

(b) 元素 a, c 和 d 在 T 中有象，因此 $f^{-1}(T)=\{a, c, d\}$.

(c) 没有元素在 f 下有象 w，因此 $f^{-1}(w)=\varnothing$，即空集.

3.8 叙述图 3-2 的各图是否定义从 $A=\{a, b, c\}$ 到 $B=\{x, y, z\}$ 的函数.

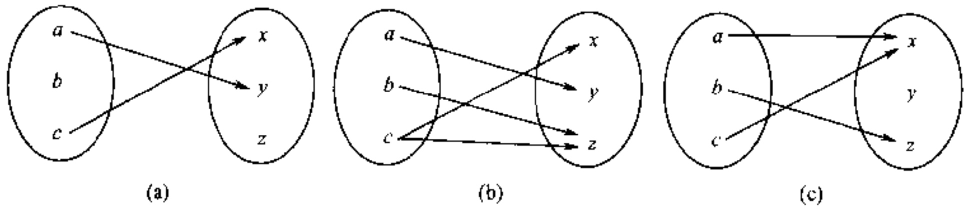


图 3-2

解 ☞ (a) 否. 没有 B 的元素赋予 $b \in A$.

(b) 否. 有两个元素 x 和 z 赋予 $c \in A$.

(c) 是. 因 A 的每个元素都被赋予 B 的惟一元素.

3.9 叙述图 3-3 的各图是否定义从 $C=\{1,2,3\}$ 到 $D=\{4,5,6\}$ 的函数.

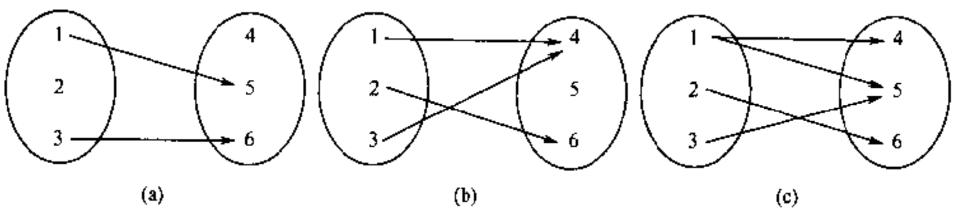


图 3-3

解 ☞ (a) 否. 没有 D 的元素赋予 $2 \in C$.

(b) 是. 因 C 的每一个元素都被赋予 D 的惟一元素.

(c) 否. 有两个元素 4 和 5 赋予 $1 \in C$.

3.10 设 A 是一学校的学生的集合. 判定下列赋值中哪些是定义 A 上的一个函数.

(a) 每个学生注明他或她的年龄;

(b) 每个学生注明他或她的老师;

(c) 每个学生注明他或她的性别;

(d) 每个学生注明他或她的配偶.

解 ☞ (a) 是. 因每个学生有一个且只有一个年龄.

(b) 是. 若每个学生只有一位老师. 否. 若有某个学生有多于一位老师.

(c) 是.

(d) 否. 若有学生没有结婚.

3.11 考虑集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$ 以及图 3-4 定义的函数 $f: A \rightarrow A$. 求(a) A 的每个元素的象;(b)函数 f 的象 $f(A)$.

解 ☞ (a)箭号指明一个元素的象. 因此 $f(1)=3, f(2)=5, f(3)=5, f(4)=2, f(5)=3$.

(b) f 的象 $f(A)$ 由全体象值组成. 现在，只有 2,3 和 5 作为 A 的元素的象出现，因此 $f(A)=\{2,3,5\}$.

3.12 求图 3-4 定义的函数 f 的图形，即把 f 写成一个有序偶的集合.

解 ☞ 有序偶集合 $(a, f(a))$ 形成 f 的图形，此处 $a \in A$. 因此

$$f=\{(1,3),(2,5),(3,5),(4,2),(5,3)\}.$$

3.13 考虑图 3-4 定义的函数 f. 求(a) $f(S)$，此处 $S=\{1,3,5\}$;(b) $f^{-1}(T)$，此处 $T=\{1,2\}$;(c) $f^{-1}(3)$.

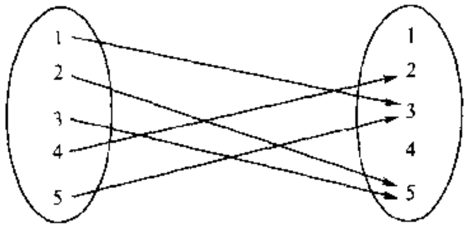


图 3-4

解 ☞ (a) $f(S)=f(\{1,3,5\})=\{f(1),f(3),f(5)\}=\{3,5,3\}=\{3,5\}$.

(b) 只有 4 的象在 $T=\{1,2\}$ 中,因此 $f^{-1}(T)=\{4\}$.

(c) 元素 1 和 5 有象 3,因此 $f^{-1}(3)=\{1,5\}$.

3.14 设 f 是 $A\times B$ 的一个子集.在什么情况下 f 定义一个从 A 到 B 的函数?

解 ☞ $A\times B$ 的一个子集 f 是一个函数 $f:A\to B$ 的充分必要条件是每个 $a\in A$ 作为 f 的恰好一个有序偶的第一个坐标.

3.15 设 $X=\{1,2,3,4\}$.判定 X 上的下列各个关系(有序偶集合)是否是从 X 到 X 的一个函数:

(a) $f=\{(2,3),(1,4),(2,1),(3,2),(4,4)\}$;

(b) $g=\{(3,1),(4,2),(1,1)\}$;

(c) $h=\{(2,1),(3,4),(1,4),(2,1),(4,4)\}$.

解 ☞ 回忆一下,$X\times X$ 的一个子集 f 是一个函数 $f:X\to X$ 的充分必要条件是每个 $a\in X$ 作为 f 的恰好一个有序偶的第一个元素.

(a) 否.f 的两个不同的有序偶有相同的数 2 作为第一个坐标.

(b) 否.元素 $2\in X$ 不作为 g 的任一有序偶的第一个坐标.

(c) 是.虽然 $2\in X$ 作为 h 的两个有序偶的第一个坐标,但是这两个有序偶是相等的.

3.16 设 $W=\{a,b,c,d\}$.判定下列有序偶集合是否是从 W 到 W 的一个函数:

(a) $\{(b,a),(c,d),(d,a),(c,d),(a,d)\}$;

(b) $\{(d,d),(c,a),(a,b),(d,b)\}$;

(c) $\{(a,b),(b,b),(c,b),(d,b)\}$;

(d) $\{(a,a),(b,a),(a,b),(c,d),(d,a)\}$.

解 ☞ (a) 是.虽然 c 作为两个有序偶的第一个坐标,但这两个有序偶是相等的.

(b) 否.元素 b 不作为任何有序偶的第一个坐标.

(c) 是.因 W 的每一个元素作为恰好是一个有序偶的第一个坐标.

(d) 否.元素 a 作为两个不同的有序偶的第一个坐标.

3.17 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是函数,对每个实数 x 赋予它的平方 x^2.叙述定义 f 的不同方法.

解 ☞ 函数 f 可用下列的任一种方法来描述:

$$f(x)=x^2 \quad 或\ x\mapsto x^2 \quad 或\ y=x^2$$

这里,$\mapsto$读作"进到".在最后的记号中,y 的值依赖于 x 的取值,因此 x 称为**自变量**,y 称为**因变量**.

注 每当一个函数 f 用自变量的公式给出时,若无特别申明,我们总是假定 f 是从 $\mathbf{R}$(或者使 f 有意义的 $\mathbf{R}$ 的最大子集)到 $\mathbf{R}$ 的一个函数(见 3.2 节).

3.18 考虑习题 3.17 中的函数 $f(x)=x^2$.求(a) f 在 5, -4 和 0 的值;(b) $f(y+2)$ 和 $f(x+h)$;(c) $[f(x+h)-f(x)]/h$.

解 ☞ (a) $f(5)=5^2=25$, $f(-4)=(-4)^2=16$, $f(0)=0^2=0$.

(b) $f(y+2)=(y+2)^2=y^2+4y+4$, $f(x+h)=(x+h)^2=x^2+2xh+h^2$.

(c) $[f(x+h)-f(x)]/h=(x^2+2xh+h^2-x^2)/h=(2xh+h^2)/h=2x+h$.

3.19 考虑习题 3.17 中的函数 $f(x)=x^2$. 求 f 的象 $\mathrm{Im}f$.

解 ☞ 每个非负实数 a 是 $\sqrt{a}$ 的平方，而每一数的平方不会是负的. 因此，$\mathrm{Im}f=\{x: x\geqslant 0\}$，即非负实数的集合.

3.20 设 f 指定世界各国的首都. 求(a) f 的定义域；(b) f(法国)，f(加拿大)，f(日本).

解 ☞ (a) f 的定义域是世界上的国家组成的集合.

(b) 这里，由于巴黎是法国的首都，因此 f(法国) = 巴黎. 同理，f(加拿大) = 渥太华，f(日本) = 东京.

3.21 设 g 指定英语的每个单词中需要拼读单词的不同字母的数目. 求 g(letter)，g(mathematics)和 g(amour).

解 ☞ 这里，拼"letter"要有四个字母 l，e，t 和 r，因此 g(letter) = 4. 同理，g(mathematics) = 8. 但是，因 g 的定义域是英语单词的集合，而"amour"是法语单词，因此 g(amour)是没有定义的.

3.22 设 A 是平面上多边形的集合. 设 $h: A\to \mathbf{N}$ 指出每个多边形的边数. 求 h(三角形)，h(正方形)，h(六角形)和 h(梯形).

解 ☞ 这里，由于三角形有三条边，因此 h(三角形) = 3. 而且，h(正方形) = 4，h(六角形) = 6，h(梯形) = 4.

3.23 设 $X=\{a,b\}$ 和 $Y=\{1,2,3\}$. 求(a) 从 X 到 Y 和(b)从 Y 到 X 的函数数目.

解 ☞ (a) 对于 a 的象有三种选择：1，2 或 3，以及对 b 的象同样有三种选择. 因此从 X 到 Y 可能有 $n=3\cdot 3=3^2=9$ 个函数.

(b) 对 Y 的三个元素每一个的象有两种选择：a 或 b. 因此，从 Y 到 X 可能有 $n=2\cdot 2\cdot 2=2^3=8$ 个函数.

3.24 设 X 有 $|X|$ 个元素和 Y 有 $|Y|$ 个元素. 证明从 X 到 Y 有 $|Y|^{|X|}$ 个函数. 由于这个缘故，常常把从 X 到 Y 的所有函数的集合记作 Y^X.

证明 ☞ X 的 $|X|$ 个元素的每一个的象有 $|Y|$ 种选择. 因此，从 X 到 Y 可能有 $|Y|^{|X|}$ 个函数.

3.25 设 A 是任一非空集合. (a) 定义 A 上的恒等映射，用 1_A 或 1 表示；(b) 求 $1_A(3)$，$1_A(6)$，$1_A(8)$，此处 $A=\{1,2,3,\cdots,9\}$.

解 ☞ (a) A 上的恒等映射是函数 $1_A: A\to A$，定义为：对每一个 $x\in A$ 都有 $1_A(x)=x$.

(b) 在恒等映射下，任一元素的象是该元素本身. 因此 $I_A(3)=3, 1_A(6)=6, 1_A(8)=8$.

3.26 定义一个常值映射.

解 ☞ 设 f 是定义域为 A 的一个函数. 若每一个 $a\in A$ 都被赋予相同的元素，则 f 是常值映射.

3.27 给定集合 A 和 B. 从 A 到 B 有多少个常值函数?

解 ☞ 对于每一个 $x\in A$，每个 $b\in B$ 定义常值函数 $f(x)=b$. 因此有 $|B|$ 个常值函数，此处 $|B|$ 表示 B 的元素数目.

3.28 设 S 是 A 的一个子集，再设 $f: A\to B$. 定义 f 关于 S 的限制.

解 ☞ f 关于 S 的限制是映射 $\hat{f}: S\to B$，定义为：对于每个 $s\in S$，$\hat{f}(s)=f(s)$. 通常，f 关于 S 的限制记作 $f|_S$.

3.29 设 $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 定义为 $f(x)=x^2$. 设 $\hat{f}: \mathbf{Z}\to\mathbf{R}$ 表示 f 关于 $\mathbf{Z}$ 的限制，即设 $\hat{f}=f|_Z$. 求 $\hat{f}(4)$，$\hat{f}(-3)$ 和 $\hat{f}(1/2)$.

解 ☞ 据定义，对于每个 $n\in \mathbf{Z}$，$\hat{f}(n)=f(n)$. 因此，$\hat{f}(4)=f(4)=4^2=16$，$\hat{f}(-3)=f(-3)=(-3)^2=9$. 但是，1/2 不在 $\hat{f}$ 的定义域中，因此 $\hat{f}(1/2)$ 没有定义.

3.30 设 S 是 A 的一个子集. 定义从 S 到 A 的包含映射.

解 ☞ 从 S 到 A 的包含映射用 $i: S\hookrightarrow A$ 表示，定义为：对于每一个 $x\in S$，$i(x)=x$. 换句话

说，S 到 A 的包含映射是 A 上的恒等映射关于 S 的限制.

3.31 考虑包含映射 $i:\mathbf{N}\hookrightarrow\mathbf{R}$.求 $i(4),i(8),i(23),i(-6)$.

解 ☞ 包含映射送每一个元素给其本身.因此 $i(4)=4,i(8)=8$ 和 $i(23)=23$.但是，-6 不属于 $\mathbf{N}$,因此它不在 $i:\mathbf{N}\hookrightarrow\mathbf{R}$ 的定义域中，故 $i(-6)$没有定义.

3.2 实值函数

这一节涉及实值函数，即将集合映射到 R 的函数 f.通常，f 的定义域是 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{R}$ 的一个区间子集，因此函数 f 可在坐标平面 $R\times R=R^2$ 中绘制成图形.具体地说，若函数是逐段连续和可微的，例如多项式、有理、三角、指数和对数函数，那么这样的函数首先可以近似地绘制它的一些点，然后画一条光滑曲线通过这些点.通常，这些点由赋予 x 各种值然后计算相应的函数值得到的一个表得到.

下面的记号也用于从 a 到 b 的区间，其中 a 和 b 都是实数且 $a<b$：

$[a,b]=\{x:a\leqslant x\leqslant b\}$，称为从 a 到 b 的闭区间；

$[a,b)=\{x:a\leqslant x<b\}$，称为从 a 到 b 的半开区间；

$(a,b]=\{x:a<x\leqslant b\}$，称为从 a 到 b 的半开区间；

$(a,b)=\{x:a<x<b\}$，称为从 a 到 b 的开区间.

3.32 若实数函数 $f(x)$由一个公式给出(此处 x 是一个实变量)，则 $f(x)$的定义域 D 是什么?

解 ☞ 除非另有规定，定义域 D 由使 $f(x)$有意义的和实的 $\mathbf{R}$ 的最大子集组成.

3.33 求下列函数的定义域 D：

(a) $f(x)=1/(x-2)$； (b) $g(x)=x^2-3x-4$； (c) $h(x)=\sqrt{25-x^2}$.

解 ☞ (a) 当 $x-2=0$,即 $x=2$ 时，$f(x)$没有定义，因此 $D=\mathbf{R}\setminus\{2\}$.

(b) 对于每一个实数，g 都有定义，因此 $D=\mathbf{R}$.

(c) 当 $25-x^2$ 为负数时，h 没有定义，因此 $D=[-5,5]=\{x:-5\leqslant x\leqslant 5\}$.

3.34 求函数 $f(x)=x^2$ 的定义域 D，此处 $0\leqslant x\leqslant 2$.

解 ☞ 虽然对于每一个实数，f 有意义，但 f 的定义域已明确给出是 $D=\{x:0\leqslant x\leqslant 2\}$.

3.35 应用公式定义如下的从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的函数：

(a) 设 f 赋予每一个数为该数的三次方；

(b) 设 g 赋予每一个数是数 5；

(c) 设 h 赋予每一个正数为该数的平方，并且 h 赋予每一个非正数为数 6.

解 ☞ (a) 由于 f 赋予任一个数 x 是其三次方 x^3,因此我们可将 f 定义为 $f(x)=x^3$.

(b) 由于 g 赋 5 给予任一个数 x,因此我们可以将 g 定义为 $g=5$.

(c) 两个不同的规律用来定义 h 如下：

$$h(x)=\begin{cases}x^2, & \text{若 } x>0;\\ 6, & \text{若 } x\leqslant 0.\end{cases}$$

3.36 考虑习题 3.35 中的函数 f,g 和 h.求(a) $f(4),f(-2),f(0)$;(b) $g(4),g(-2),g(0)$;(c) $h(4),h(-2),h(0)$.

解 ☞ (a) 现在，对于每个数 $x,f(x)=x^3$,因此 $f(4)=4^3=64,f(-2)=(-2)^3=-8,f(0)=0^3=0$.

(b) 每一个数的象是 5,因此 $g(4)=5,g(-2)=5,g(0)=5$.

(c) 由于 $4>0$,因此 $h(4)=4^2=16$.另一方面，$-2,0\leqslant 0$,因此 $f(-2)=6,f(0)=6$.

3.37 应用公式定义如下的从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的函数：

(a) 设 f 赋予每一个数为其平方加 3；

(b) 设 g 赋予每一个数为其三次方加该数的两倍；

(c) 设 h 赋予每个大于或等于 3 的数为该数的平方，而赋予每个小于 3 的数是数 -2.

解 ☞ (a) $f(x)=x^2+3$.

(b) $g(x)=x^3+2x$.

(c) $$h(x)=\begin{cases}x^2, & 若\ x\geqslant 3;\\ -2, & 若\ x<3.\end{cases}$$

3.38　设 $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，定义为

$$g(x)=\begin{cases}x^2-3x, & 若\ x\geqslant 2;\\ x+2, & 若\ x<2.\end{cases}$$

求(a) $g(5)$，(b) $g(0)$，(c) $g(-2)$.

解 ☞ (a) 由于 $5\geqslant 2$，因此 $g(5)=5^2-3(5)=25-15=10$.

(b) 由于 $0<2$，因此 $g(0)=0+2=2$.

(c) 由于 $-2<2$，因此 $g(-2)=-2+2=0$.

3.39　考虑函数 $f(x)=x^2-3x+2$. 求(a) $f(-3)$；(b) $f(2)-f(-4)$；(c) $f(y)$；(d) $f(a^2)$.

解 ☞ 该函数赋予每个元素为该元素的平方减去该元素的 3 倍再加 2.

(a) $f(-3)=(-3)^2-3(-3)+2=9+9+2=20$.

(b) $f(2)=(2)^2-3(2)+2=0$，$f(-4)=(-4)^2-3(-4)+2=30$，

因此

$$f(2)-f(-4)=0-30=-30.$$

(c) $f(y)=(y)^2-3(y)+2=y^2-3y+2$.

(d) $f(a^2)=(a^2)^2-3(a^2)+2=a^4-3a^2+2$.

3.40　考虑习题 3.39 的函数，求(a) $f(x^2)$；(b) $f(y-z)$；(c) $f(x+3)$；(d) $f(2x-3)$.

解 ☞ (a) $f(x^2)=(x^2)^2-3(x^2)+2=x^4-3x^2+2$.

(b) $f(y-z)=(y-z)^2-3(y-z)+2=y^2-2yz+z^2-3y+3z+2$.

(c) $f(x+3)=(x+3)^2-3(x+3)+2=(x^2+6x+9)-3x-9+2=x^2+3x+2$.

(d) $f(2x-3)=(2x-3)^2-3(2x-3)+2=4x^2-12x+9-6x+9+2=4x^2-18x+20$

3.41　给定习题 3.39 的函数 $f(x)$，求(a) $f(x+h)$；(b) $f(x+h)-f(x)$；(c) $[f(x+h)-f(x)]/h$.

解 ☞ (a) $f(x+h)=(x+h)^2-3(x+h)+2=x^2+2xh+h^2-3x-3h+2$.

(b) 应用(a)，我们有

$$f(x+h)-f(x)=(x^2+2xh+h^2-3x-3h+2)-(x^2-3x+2)=2xh+h^2-3h.$$

(c) 应用(b)，我们有

$$[f(x+h)-f(x)]/h=(2xh+h^2-3h)/h=2x+h-3.$$

3.42　判定图 3-5 中哪些图形是从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的函数.

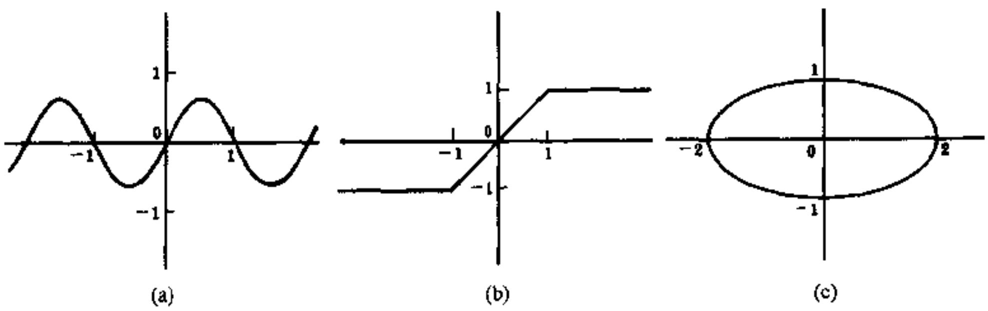


图 3-5

解 ☞ 从几何上讲,在一个坐标图形上的点的一个集合是一个函数的充分必要条件是每条垂直线恰好含有该集合的一个点.(a) 是.(b) 是.(c) 不是.

3.43 判定图 3-6 中哪些图形是从 **R** 到 **R** 的函数.

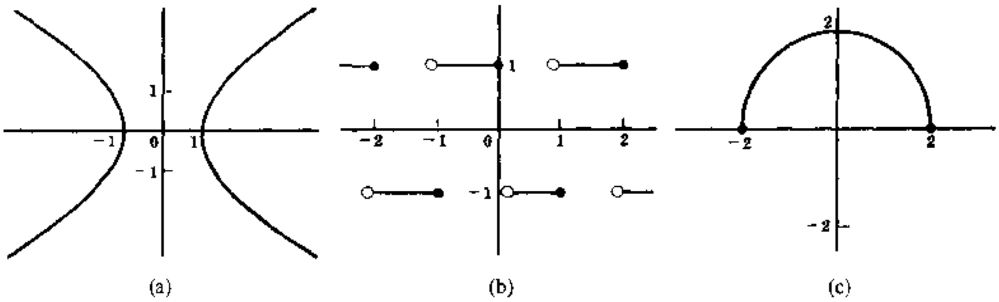


图 3-6

解 ☞ (a) 不是.

(b) 是.

(c) 不是.然而,该图形定义从 D 到 **R** 的一个函数,此处 $D=\{x: -2\leqslant x\leqslant 2\}$.

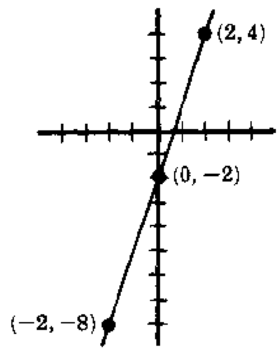
3.44 画 $f(x)=3x-2$ 的草图.

解 ☞ 由于 f 是线性的,因此画它的草图只须两个点(3 个点是为了核对).建立 x 的 3 个值,例如 $x=-2,0,2$ 的表,且求 $f(x)$的相应的值:

$$f(-2)=3(-2)-2=-8,\quad f(0)=3(0)-2=-2,\quad f(2)=3(2)-2=4.$$

通过这些点画一条直线如图 3-7 所示.

x	$f(x)$
−2	−8
0	−2
2	4



f 的图形

图 3-7

3.45 考虑函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,它定义为 $f(x)=x^3$.求(a) $f(3)$和 $f(-5)$,(b) $f(y)$和$f(y+1)$,(c) $f(x+h)$,(d) $[f(x+h)-f(x)]/h$.

解 ☞ (a) $f(3)=3^3=27,\quad f(-5)=(-5)^3=-125$.

(b) $f(y)=(y)^3=y^3,\quad f(y+1)=(y+1)^3=y^3+3y^2+3y+1$.

(c) $f(x+h)=(x+h)^3=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3$.

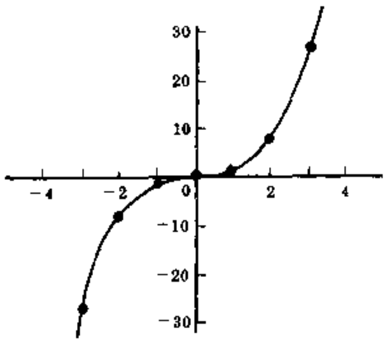
(d) $[f(x+h)-f(x)]/h=(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3)/h=3x^2+3xh+h^2$.

3.46 画习题 3.45 中函数的草图.

解 ☞ 由于 f 是一个多项式函数,因此可先绘制它的图形的一些点,然后画一条光滑曲线通过这些点作出 f 的草图,如图 3-8.

3.47 画函数 $g(x)=x^2+x-6$ 的草图.

x	$f(x)$
−3	−27
−2	−8
−1	−1
0	0
1	1
2	8
3	27

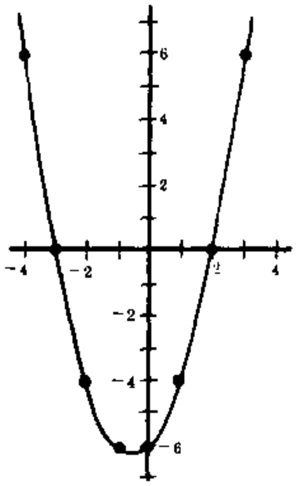


$f(x)=x^3$ 的图形

图 3-8

解 ☞ 建立 x 的值的一个表，并且求其相应的函数值. 在一个坐标平面上绘制这些点，然后画一条光滑曲线通过这些点，如图 3-9.

x	$g(x)$
−4	6
−3	0
−2	−4
−1	−6
0	−6
1	−4
2	0
3	6



g 的图形

图 3-9

3.48　给定习题 3.47 的函数，求(a) $g^{-1}(14)$，(b) $g^{-1}(-8)$.

解 ☞ (a)令 $g(x)=14$，并且从方程

$$x^2+x-6=14,\quad 或\ x^2+x-20=0, 或\quad (x+5)(x-4)=0$$

解 x. 于是 $x=-5$ 和 $x=4$. 换句话说，$g^{-1}(14)=\{-5,4\}$.

(b) 令 $g(x)=-8$，并且解方程 $x^2+x-6=-8$ 或 $x^2+x+2=0$. 应用二次公式，判别式 $D=b^2-4ac=1^2-4(1\cdot2)=-7$ 是负的，因此没有实数解. 故 $g^{-1}(-8)=\varnothing$，即空集.

3.49　画 $h(x)=x^3-3x^2-x+3$ 的草图.

解 ☞ 过 h 的图形的一些点画一条光滑曲线，如图 3-10.

3.50　考虑函数 $h(x)=x^3-3x^2-x+3$(习题 3.49). (a) 求 h 的象 $h(\mathbf{R})$；(b) h 有多少个实根？(c) 求 $h^{-1}(A)$，此处 $A=[-15,15]$.

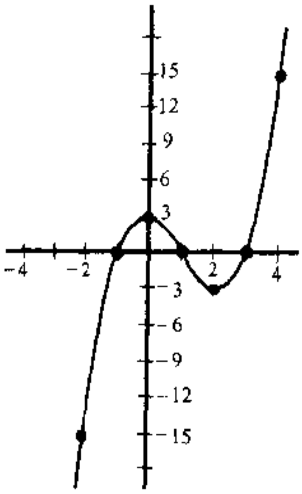
解 ☞ 应用图 3-10 的图形.

(a) 由于水平线都与 h 的图形相交，因此每个实数都是一个象值. 因此 $f(\mathbf{R})=\mathbf{R}$.

(b) 由 h 的图形与 x 轴有三个交点，因此 h 有三个实根，即 $x^3-3x^2-x+3=0$ 有三个实根.

(c) 该图形表明在 −2 和 4 之间的每个 x 值且只有这些 x 值的象在 −15 和 15 之间. 因此

x	$h(x)$
−2	−15
−1	0
0	3
1	0
2	−3
3	0
4	15



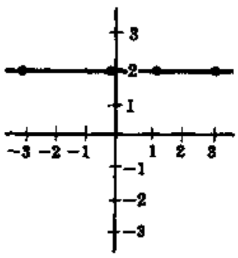
h 的图形

图 3-10

$f^{-1}(A)=[-2,4]$.

3.51　画 $f(x)=2$ 的草图.

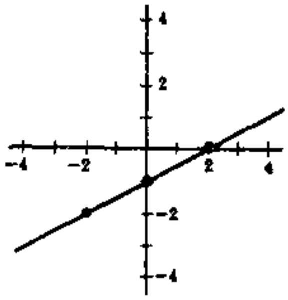
解　☞ 对于任何一个 x 的值,我们有 $f(x)=2$.这样,例如 $(-3,2)$,$(0,2)$,$(1,2)$,$(3,2)$在由水平线 $y=2$ 给出的 f 的图形上,如图 3-11 所示.



f 的图形

图 3-11

x	$g(x)$
−2	−2
0	−1
2	0



g 的图形

图 3-12

3.52　画 $g(x)=(1/2)x-1$ 的草图.

解　☞ 由于 g 是线性的,因此画它的草图只须两个点(3 个点作为核对).建立 3 个 x 的值,例如 $x=-2,0,2$ 的表,并且求 $g(x)$的相应的值:

$$g(-2)=-1-1=-2,\quad g(0)=0-1=-1,\quad g(2)=1-1=0.$$

过这些点画直线,如图 3-12.

3.53　画函数 $h(x)=2x^2-4x-3$ 的草图.

解　☞ 画一条光滑连续曲线通过 h 的图形的一些点,如图 3-13.

3.54　画函数 $f(x)=x^3-3x+2$ 的草图.

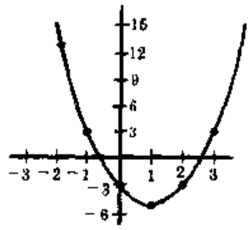
解　☞ 画一条光滑连续曲线通过 f 的图形的一些点,如图 3-14.

3.55　画函数 $g(x)=x^4-10x^2+9$ 的草图.

解　☞ 经过 g 的图形的一些点画一条光滑连续曲线,如图 3-15.

3.56　分别考虑习题 3.54 和 3.55 中的函数 f 和 g.(a) $f(\mathbf{R})=\mathbf{R}$? (b) $g(\mathbf{R})=\mathbf{R}$?

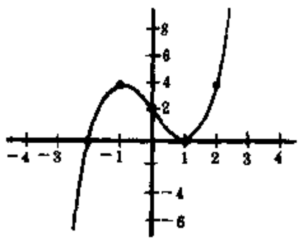
x	$h(x)$
−2	13
−1	3
0	−3
1	−5
2	−3
3	3



h 的图形

图 3-13

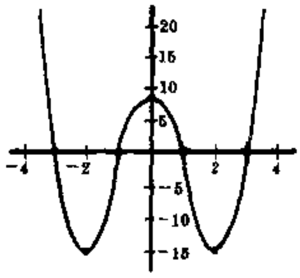
x	$f(x)$
−3	−16
−2	0
−1	4
0	2
1	0
2	4
3	20



f 的图形

图 3-14

x	$g(x)$
−4	105
−3	0
−2	−15
−1	0
0	9
1	0
2	−15
3	0
4	105



g 的图形

图 3-15

解 ☞ (a) 是. 正如图 3-14 所示, 每条水平线都与 f 的图形相交, 因此 y 的每个值都在 f 的象中. 因此 $f(\mathbf{R})=\mathbf{R}$.

(b) 否. 如图 3-15 所示, 有些水平线, 例如 $y=-20$ 不与 g 的图形相交, 因此 $-20\notin g(\mathbf{R})$. 故 $g(\mathbf{R})\neq\mathbf{R}$.

3.57 作

$$h(x)=\begin{cases}0\ \ , 若\ x=0;\\ 1/x, 若\ x\neq 0\end{cases}$$

的草图

解 ☞ 见图 3-16. (注意, 该图形只是分段连续的. 具体地说, 当 $x<0$ 和 $x>0$ 时, h 是连续的.)

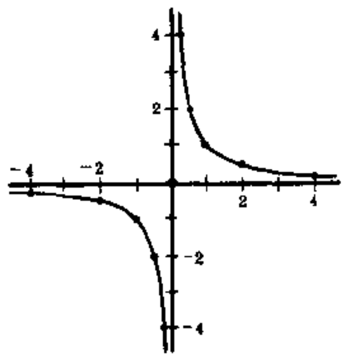
3.58 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是一个函数. 如果 $f(x)\equiv 0$, 零函数, 或 f 可表示成

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

其中 a_i 是实数且 $a_n\neq 0$, 那么 $f(x)$ 是一个多项式函数. 定义: (a) f 的首项系数; (b) 首一多项式; (c) f 的次数, 记作 $\deg f$.

解 ☞ (a) f 的首项系数是 x 的最高次幂的非零系数, 即 a_n.

x	$h(x)$
4	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{2}$
1	1
$\frac{1}{2}$	2
$\frac{1}{4}$	4
0	0
$-\frac{1}{4}$	-4
$-\frac{1}{2}$	-2
-1	-1
-2	$-\frac{1}{2}$
-4	$-\frac{1}{4}$



h 的图形

图 3-16

(b) 若一多项式的首项系数是 1，即若 $a_n=1$，则 f 是首一多项式.

(c) 零多项式 $f(x)=0$ 没有次数定义. 此外，$\deg f=n$，它是具有非零系数的 x 的最高次幂.

3.59　设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是两个多项式函数，且 $\deg f=m$，$\deg g=n$. 求积 $h(x)=f(x)g(x)$ 的次数.

解　☞ 积 h 的次数是其两个因式 f 和 g 的次数之和，即

$$\deg h=\deg f+\deg g=m+n.$$

3.60　设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 是一个奇次多项式，证明 $f(\mathbf{R})=\mathbf{R}$.

证　☞ 我们要证明对于每一个 $k\in\mathbf{R}$，方程 $f(x)=k$ 有一个解 $x\in\mathbf{R}$. 我们总可假设 $a_n=+1$，因此当 $|x|$ 很大时，$f(x)\approx x^n$；于是必存在一个(大的)正实数 a 使得 $f(a)>|k|$ 且 $f(-a)<-|k|$，即

$$f(-a)<k<f(a).\qquad(*)$$

现在 f 的图形是连接点 $P_1=(-a,f(-a))$ 和 $P_2=(a,f(a))$ 的不间断曲线. 因此，它必与过 P_1 和 P_2 的水平线之间的任一水平线相交. 据$(*)$，$y=k$ 恰好是这样的一条水平线. 换句话说，存在某一个 $x(-a<x<a)$ 使得 $f(x)=k$.

3.3　函数的复合

3.61　考虑函数 $f:A\to B$ 和 $g:B\to C$，就是说，f 的值域是 g 的定义域，定义 f 和 g 的复合函数.

解　☞ f 和 g 的**复合**，记作 $g\circ f$，是从 A 到 C 的函数，定义为

$$(g\circ f)(a)\equiv g(f(a)).$$

这就是说，为求在 $g\circ f$ 下 a 的象，我们先求在 f 下 a 的象然后求在 g 下 $f(a)$ 的象.

注　如果我们将 f 和 g 视为关系，那么习题 3.61 的函数与 f 和 g 作为关系的复合是相同的(见 2.4 节)，只不过这里我们关于 f 和 g 的复合使用记号 $g\circ f$ 代替用于关系的复合记号 $f\circ g$.

3.62　设由图 3-17 定义函数 $f:A\to B$ 和 $g:B\to C$. 求复合 $g\circ f:A\to C$.

解　☞ 我们应用复合函数的定义计算：

$$(g\circ f)(a)=g(f(a))=g(y)=t,$$
$$(g\circ f)(b)=g(f(b))=g(x)=s,$$
$$(g\circ f)(c)=g(f(c))=g(y)=t,$$

注意，我们若在图中紧接箭号，则得到相同的结果：

$$a\to y\to t,\ b\to x\to s,\ c\to y\to t.$$

3.63　给出图 3-17 的函数 f 和 g 的象集.

解　☞ 在映射 f 下象值是 x 和 y，在 g 下象值是 r、s 和 t，因此 $\mathrm{Im}f=\{x,y\}$ 和 $\mathrm{Im}g=\{r,s,t\}$.

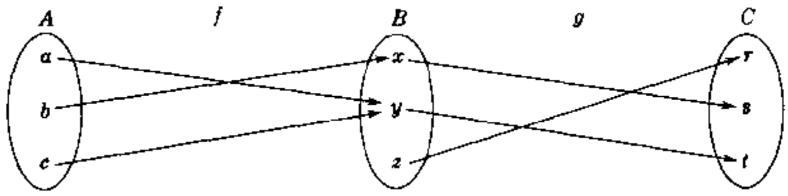


图 3-17

3.64 图 3-18 定义函数 $f:A\to B$, $g:B\to C$, 以及 $h:C\to D$. 求复合函数 $h\circ g\circ f$.

解 ☞ 从 A 到 B 到 C 到 D 紧接箭号如下:

$$1\to y\to 5\to c,\quad 因此(h\circ g\circ f)(1)=c;$$
$$2\to w\to 6\to a,\quad 因此(h\circ g\circ f)(2)=a;$$
$$3\to x\to 4\to b,\quad 因此(h\circ g\circ f)(3)=b.$$

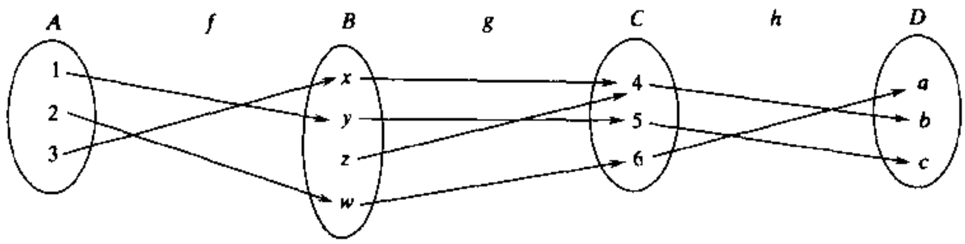


图 3-18

3.65 设函数 f 和 g 分别定义为 $f(x)=2x+1$ 和 $g(x)=x^2-2$. 求(a)$(g\circ f)(4)$和$(f\circ g)(4)$;(b)$(g\circ f)(a+2)$;(c)$(f\circ g)(a+2)$.

解 ☞ (a) $f(4)=2\cdot4+1=9$, 因此

$$(g\circ f)(4)=g(f(4))=g(9)=9^2-2=79.$$

由于 $g(4)=4^2-2=14$, 因此

$$(f\circ g)(4)=f(g(4))=f(14)=2\cdot14+1=29.$$

(b) $f(a+2)=2(a+2)+1=2a+5$, 因此

$$(g\circ f)(a+2)=g(f(a+2))=g(2a+5)$$
$$=(2a+5)^2-2=4a^2+20a+23.$$

(c) $g(a+2)=(a+2)^2-2=a^2+4a+2$, 因此

$$(f\circ g)(a+2)=f(g(a+2))=f(a^2+4a+2)$$
$$=2(a^2+4a+2)+1=2a^2+8a+5.$$

3.66 已知函数 $f(x)=2x+1$ 和 $g(x)=x^2-2$(习题 3.65), 求复合函数(a)$g\circ f$ 和(b)$f\circ g$.

解 ☞ (a) $g\circ f$ 的计算公式如下:

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+1)=(2x+1)^2-2$$
$$=4x^2-4x-1.$$

我们可将 $f(x)$和 $g(x)$分别写成 $y=f(x)=2x+1$ 和 $z=g(y)=y^2-2$, 然后消去 y:

$$z=y^2-2=(2x+1)^2-2=4x^2+4x-1.$$

便得到与上面相同的结果.

(b)

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2-2)=2(x^2-2)+1$$
$$=2x^2-3.$$

3.67 已知函数 $f(x)=2x+1$ 和 $g(x)=x^2-2$(习题 3.65), 求复合函数:(a) $f\circ f$(有时用

f^2 表示);(b) $g\circ g$.

解 ☞ (a) $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(2x+1)=2(2x+1)+1=4x+3$.

(b) $(g\circ g)(x)=g(g(x))=g(x^2-2)=(x^2-2)^2-2=x^4-4x^2$.

3.68 考虑任意的一个函数 $f:A\to B$.在什么情况下,$f\circ f$ 有意义?

解 ☞ 当 f 的定义域等于 f 的上域,即 $A=B$ 时,复合 $f\circ f$ 有定义.

3.69 考虑任一函数 $f:A\to B$.证明:(a) $1_B\circ f=f$;(b) $f\circ 1_A=f$.(这里,$1_B:B\to B$ 和 $1_A:A\to A$ 分别是 B 和 A 上的恒等函数.)(见习题 3.25.)

证 ☞ (a) 对每个 $a\in A$,都有 $(1_B\circ f)(a)=1_B(f(a))=f(a)$.因此 $1_B\circ f=f$.

(b) 对每一个 $a\in A$,都有 $(f\circ 1_A)(a)=f(1_A(a))=f(a)$.因此 $f\circ 1_A=f$.

定理 3.1 设 $f:A\to B$, $g:B\to C$ 和 $h:C\to D$ 是三个函数,则 $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

3.70 定理 3.1 说明函数的复合满足结合律.证明定理 3.1.

证 ☞ 对于任一元素 $a\in A$,有

$$(h\circ(g\circ f))(a)=h((g\circ f)(a))=h(g(f(a)))$$

和

$$((h\circ g)\circ f)(a)=(h\circ g)(f(a))=h(g(f(a))).$$

因此,对每一个 $a\in A$,有 $(h\circ(g\circ f))(a)=((h\circ g)\circ f)(a)$,故 $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

习题 3.71～3.76 考虑图 3-19 的函数 f, g 和 h,此处,每个函数将集合 $A=\{1,2,3,4\}$ 映射到自身.

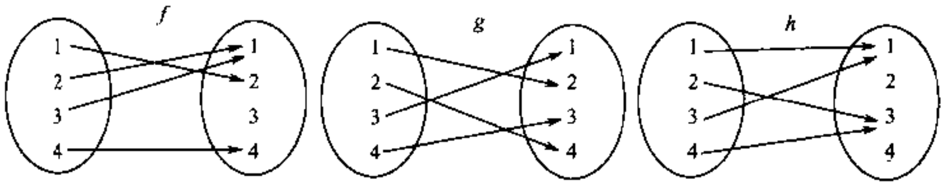


图 3-19

3.71 求复合函数 $f\circ g$.

解 ☞ 首先应用 g 然后应用 f 如下:

$$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(2)=1,\quad (f\circ g)(2)=f(g(2))=f(4)=4,$$
$$(f\circ g)(3)=f(g(3))=f(1)=2,\quad (f\circ g)(4)=f(g(4))=f(3)=1.$$

3.72 求复合函数 $g\circ h$.

解 ☞ 首先用 h 的箭号然后紧接着用 g 的箭号如下:

$$1\to1\to2,\quad 2\to3\to1,\quad 3\to1\to2,\quad 4\to3\to1.$$

于是,$(g\circ h)(1)=2$, $(g\circ h)(2)=1$, $(g\circ h)(3)=2$, $(g\circ h)(4)=1$.

3.73 求复合函数 $g^2=g\circ g$.

解 ☞ 用 g 的箭号紧接两次:

$$1\to2\to4,\quad 2\to4\to3,\quad 3\to1\to2\quad 4\to3\to1.$$

因此 $g^2(1)=4$, $g^2(2)=3$, $g^2(3)=2$, $g^2(4)=1$.

3.74 求复合函数 $h^2=h\circ h$.

解 ☞ 用 h 的箭号紧接两次:

$$1\to1\to1,\quad 2\to3\to1,\quad 3\to1\to1\quad 4\to3\to1.$$

这里 h^2 是常值函数 $h^2(x)=1$.

3.75 求复合函数 $f\circ h\circ g$.

解 ☞ 首先用 g 的箭号然后紧接用 h 的,最后用 f 的箭号,即依反向顺序:

$$1\to2\to3\to1,\quad 2\to4\to3\to1,\quad 3\to1\to1\to2,\quad 4\to3\to1\to2.$$

这样 $f\circ h\circ g=\{(1,1),(2,1),(3,2),(4,2)\}$.

3.76 求复合函数 $f^3=f\circ f\circ f$.

解 ☞ 紧接着用 f 的箭号 3 次如下：

$$1\to2\to1\to2,\quad 2\to1\to2\to1,\quad 3\to1\to2\to1,\quad 4\to4\to4\to4.$$

于是 $f\circ f\circ f=\{(1,2),(2,1),(3,1),(4,4)\}$.

3.77 考虑函数 $f(x)=2x-3$ 和 $g(x)=x^2+3x+5$. 求复合函数(a) $g\circ f$ 和(b) $f\circ g$ 的表达式.

解 ☞ (a) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-3)=(2x-3)^2+3(2x-3)+5$

$$=4x^2-6x+9+6x-9+5=4x^2+5.$$

(b) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2+3x+5)$

$$=2(x^2+3x+5)-3=2x^2+6x+7.$$

3.78 考虑上面的函数 $f(x)=2x-3$. 求复合函数(a) $f^2=f\circ f$ 和(b) $f^3=f\circ f\circ f$ 的表达式.

解 ☞ (a) $f^2(x)=f(f(x))=f(2x-3)=2(2x-3)-3=4x-9$.

(b) $f^3(x)=f(f^2(x))=f(4x-9)=2(4x-9)-3=8x-21$.

映射图

3.79 定义一个映射图.

解 ☞ 一个顶点为集合和边表示集合之间的映射的有向图称为一个**映射图**.

习题 3.80～3.83 考虑映射 $f:A\to B$, $g:B\to A$, $h:C\to B$, $F:B\to C$ 和 $G:A\to C$, 它们画在图3-20的有向图中.

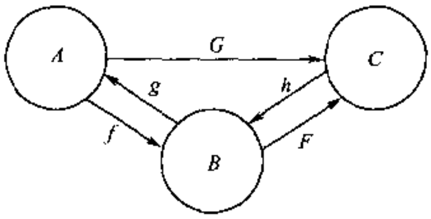


图 3-20

3.80 $g\circ f$ 有定义吗？若有，则其定义域和上域是什么？

解 ☞ 由于 f 从 A 到 B, g 从 B 到 A, 因此 $g\circ f$ 有定义且 A 是定义值和值域.

3.81 $h\circ f$ 有定义吗？若有，则其定义域和上域是什么？

解 ☞ 在该图中, h 不"跟着" f, 就是说, f 的上域 B 不是 h 的定义域. 因此 $h\circ f$ 是没有定义的.

3.82 $F\circ h\circ G$ 有定义吗？若有，则其定义域和上域是什么？

解 ☞ 在该图中, 表示 G, h 和 F 的箭号相互跟随并且指向是从 A 到 C 到 B 到 C. 因此 $F\circ h\circ G$ 是有意义的, 其定义域是 A 而上域是 C. (我们强调复合是从右到左"读"的.)

3.83 $G\circ F\circ h$ 有定义吗？若有，则其定义域和上域是什么？

解 ☞ 在该图中, F 跟着 h, 但 G 不跟着 F, 就是说, F 的上域 C 不是 G 的定义域, 因此 $G\circ F\circ h$ 没有定义.

3.84 定义映射的交换图.

解 ☞ 一个映射图如果具有相同的初始和终止顶点的任意两条通路是相等的, 则该映射图是交换的.

习题3.85～3.90考虑图3-21的交换映射图.

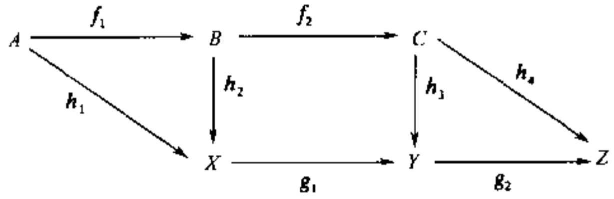


图 3-21

3.85　用一个单一映射表示 $h_2\circ f_1$.

解　☞ 复合映射 $h_2\circ f_1$ 从 A 到 B 到 X. 由于该图是交换的, 因此 $h_2\circ f_1=h_1$.

3.86　用尽可能多种方法表示 $h_3\circ f_2$.

解　☞ 映射 $h_3\circ f_2$ 从 B 到 C 到 Y. 其他只有一条从 B 到 Y 的通路是映射 $g_1\circ h_2$.

3.87　用一个单一映射表示映射 $g_2\circ h_3$.

解　☞ 映射 $g_2\circ h_3$ 从 C 到 Y 到 Z. 图 h_4 从 C 到 Z. 由于该图是交换的, 因此 $g_2\circ h_3=h_4$.

3.88　用一个单一映射表示映射 $g_1\circ h_3$.

解　☞ 由于 h_3 的上域 Y 不是 g_1 的定义域, 因此 $g_1\circ h_3$ 没有定义.

3.89　用尽可能多种方法表示映射 $g_2\circ h_3\circ f_2\circ f_1$.

解　☞ 映射 $g_2\circ h_3\circ f_2\circ f_1$ 从 A 到 B 到 C 到 Y 到 Z. 有三条其他的通路从 A 到 Z:

(i) $g_2\circ g_1\circ h_1$,　(ii) $g_2\circ g_1\circ h_2\circ f_1$,　(iii) $h_4\circ f_2\circ f_1$.

3.90　求所有映射: (a)从 A 到 Y; (b)从 X 到 Z; (c) 从 C 到 X.

解　☞ (a) 有三条通路从 A 到 Y, 它们是 A 到 B 到 C 到 Y, A 到 B 到 X 到 Y, 以及从 A 到 X 到 Y. 于是从 A 到 Y 有三个映射, 它们是 $h_3\circ f_2\circ f_1$, $g_1\circ h_2\circ f_1$ 和 $g_1\circ h_1$.

(b) 从 X 到 Z 只有一条通路, 它是 X 到 Y 到 Z. 这条通路对应于映射 $g_2\circ g_1$.

(c) 从 C 到 X 没有通路, 因而没有映射从 C 到 X.

3.4　一对一、映成和可逆函数

3.91　定义一个一对一(或单射)函数.

解　☞ 设 $f:A\to B$ 是一个函数. 若它的定义域 A 的不同元素有不同的象, 则说 f 是一个**一对一**(写作 1-1)**函数**. 另一个相同的说法是, 若 $f(a)=f(a')$ 意味着 $a=a'$, 则 f 是一对一的.

3.92　定义一个映成(或满射)函数.

解　☞ 设 $f:A\to B$ 是一个函数. 若 B 的每一个元素是 A 的某元素的象, 则说 f 是**一个映成函数**. 换句话说, 若 f 的象是整个上域, 即若 $f(A)=B$, 则 $f:A\to B$ 是一个从 A 到 B 上的函数或 f 将 A 映射到 B 上.

3.93　定义一个一一对应(或双射函数).

解　☞ 设 $f:A\to B$ 是一个函数. 若 f 是一对一且映成的, 则称 f 是 A 和 B 之间的一个**一一对应**或**双射函数**. 这个术语来自于 A 的每一个元素将对应于 B 的惟一元素, 反之亦然.

3.94　定义一个可逆函数.

解　☞ 设 $f:A\to B$ 是一个函数. 如果存在一个函数 $g:B\to A$ 使得 $f\circ g=1_B$ 且 $g\circ f=1_A$(此处 1_A 和 1_B 都是恒等映射), 那么称 f **是可逆函数**. 此时, 函数 g 称为 f 的逆(或反函数), 并用 f^{-1} 表示. 换句话说, 若逆关系 f^{-1} 是一个从 B 到 A 的函数, 则 f 是可逆的, 而且, 若 $b\in B$, 则 $f^{-1}(b)=a$, 此处 a 是 A 的使 $f(a)=b$ 的惟一元素. 下面的定理给出一个简单的判别准则.

定理 3.2 函数 $f:A\to B$ 可逆的充分必要条件是 f 是双射的.

习题 3.95~3.97 考虑图 3-22 定义的函数 $f_1:A\to B$, $f_2:B\to C$, $f_3:C\to D$, $f_4:D\to E$.

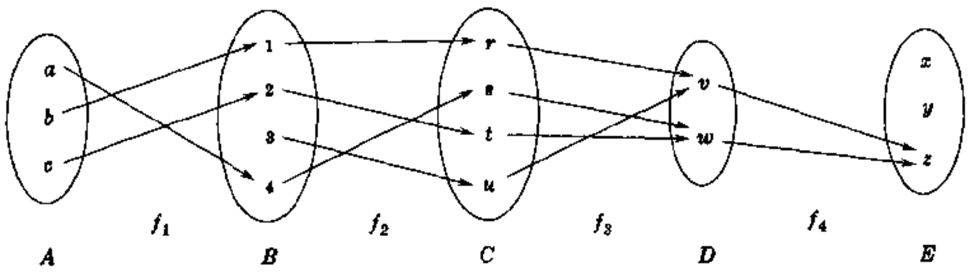


图 3-22

3.95 图 3-22 中哪些函数是一对一的?

解 ☞ 函数 f_1 是一对一的,因没有 B 的元素是 A 的多于一个元素的象.同理,f_2 是一对一的.但是,因 $f_3(r)=f_3(u)$, $f_4(v)=f_4(w)$,因此 f_3 和 f_4 都不是一对一的.

3.96 图 3-22 中哪些函数是映成函数?

解 ☞ 由于 C 的每一个元素是在 f_2 下 B 的一个元素的象,以及 D 的每个元素是在 f_3 下 C 的一个元素的象,即 $f_2(B)=C$, $f_3(C)=D$,因此 f_2 和 f_3 是映成函数.另一方面,因 $3\in B$ 不是在 f_1 下 A 的任一元素的象,因此 f_1 不是映成函数.又因 $x\in E$ 不是在 f_4 下 D 的任一元素的象,因此 f_4 不是映成函数.

3.97 图 3-22 中哪些函数是可逆的?

解 ☞ 函数 f_1 是一对一的但不是映成的,f_3 是映成的但不是一对一的,f_4 既不是一对一的又不是映成的.然而,f_2 是一对一的且是映成的,即 f_2 是 B 和 C 之间的双射函数.因此 f_2 是可逆且 f_2^{-1} 是从 C 到 B 的一个函数.

3.98 设 $A=\{a,b,c,d,e,\}$, B 是字母表中字母的集合.设从 A 到 B 的函数 f, g 和 h 定义如下:

(a)	(b)	(c)
$a\xrightarrow{f}r$	$a\xrightarrow{g}z$	$a\xrightarrow{h}a$
$b\longrightarrow a$	$b\longrightarrow y$	$b\longrightarrow c$
$c\longrightarrow s$	$c\longrightarrow x$	$c\longrightarrow e$
$d\longrightarrow r$	$d\longrightarrow y$	$d\longrightarrow r$
$e\longrightarrow e$	$e\longrightarrow z$	$e\longrightarrow s$

这些函数的任一个是一对一的吗?

解 ☞ 回忆一下,若一个函数赋不同的象给定义域中的不同元素,则该函数是一对一的.

(a) 不是.因 f 赋 r 给两个元素 a 和 d.

(b) 不是.因 g 赋 z 给两个元素 a 和 e.

(c) 是.因 h 赋不同的象给定义域中的不同元素.

3.99 判定各个函数是否一对一的:

(a) 对于地球上的每个人都赋予其对应的年龄数字;

(b) 对于世界上的每个国家都赋予其首都的纬度和经度;

(c) 只有一个作者的每本书都注明作者;

(d) 世界上有总统的各个国家都注明她的总统.

解 ☞ (a) 否.世界上多人有相同的年龄.

(b) 是.

(c) 否.同一作者著有不同的书.

(d) 是.世界上不同的国家有不同的总统.

3.100　设函数 $f:A\to B$, $g:B\to C$ 和 $h:C\to D$, 由图 3-23 定义.判定哪些函数是映成函数.

解 ☞ 由于 $3\in B$ 不是 A 的任何元素的象,因此 $f:A\to B$ 不是映成函数.因 $z\in C$ 不是 B 的任一元素的象,因此函数 $g:B\to C$ 不是映成的.由于 D 的每个元素是 C 的元素的象,因此 $h:C\to D$ 是映成函数.

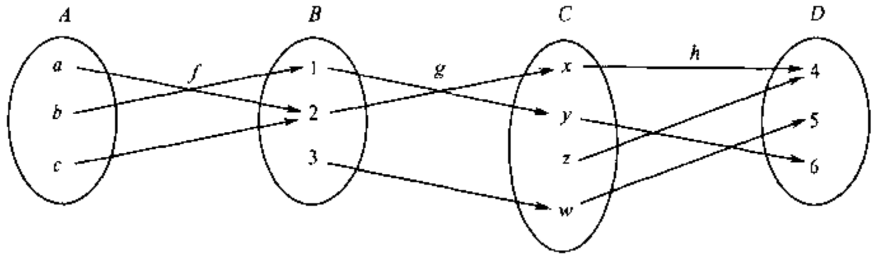


图 3-23

3.101　判别图 3-23 中哪些函数是一对一的.

解 ☞ 因 $f(a)=f(c)=2$,因此 f 不是一对一函数.因 $h(x)=h(z)=4$,因此函数 h 不是一对一的.由于 1,2 和 3 的象是不同的,因此函数 g 是一对一的.

3.102　图 3-23 中哪些函数是可逆的?

解 ☞ f 既不是一对一的也不是映成的,g 是一对一但不是映成函数,h 是映成函数但不是一对一的.这样,图 3-23 中没有一个函数是双射的,因而没有一个函数是可逆的.

3.103　求图 3-23 中的复合函数 $h\circ g\circ f$.

解 ☞ 现在 $a\to2\to x\to4$, $b\to1\to y\to6$, $c\to2\to x\to4$.因此

$$h\circ g\circ f=\{(a,4),(b,6),(c,4)\}.$$

3.104　回忆起一个函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 可用其图形表示.给出等价性质(a) f 是一对一的,(b) f 是映成的和(c) f 是可逆的几何解释.

解 (a) f 是一对一的含义是在 f 的图中没有两个不同点(a_1,b)和(a_2,b),因此每条水平线与 f 的图至多只能有一个交点.

(b) f 是映成函数的含义是对于每个 $b\in\mathbf{R}$ 至少有一个 $a\in\mathbf{R}$ 使得(a,b)属于 f 的图,因此每条水平线与 f 的图至少有一个交点.

(c) 若 f 是可逆的,即一对一且映成的,则每条水平线与 f 的图形恰好有一个交点.

3.105　考虑函数 $f(x)=2^x$, $g(x)=x^3-x$ 和 $h(x)=x^2$,它们的图在图 3-24 中.判定哪些函数是一对一的.

解 ☞ 由于有水平线含 g 的图的点多于一个,例如,$y=0$ 含 g 的 3 个点,因此 g 不是一对一的.由于 $h(2)=h(-2)=4$,即水平线 $y=4$ 含 h 的两个点,因此函数 h 不是一对一的.然而,没有水平线含 f 的点多于一个,因此 f 是一对一函数.

3.106　判定图 3-24 的函数 f, g 和 h 中哪些是映成函数.

解 ☞ 由于一些水平线(在 x 轴以下那些)不含 f 的点,因此 f 不是映成函数.同理,h 不是映成函数,因为 $y=-16$(以及任何其他的负数)没有原象,即水平线 $y=-16$ 不含 h 的点.然而,每条水平线至少含 g 的一个点,因此 g 是映成函数.

3.107　图 3-24 的函数 f, g 和 h 中哪些是可逆的.

解 ☞ 函数 f, g 和 h 中没有一个是一对一且映成的,因此它们中没有一个函数是可逆的.

3.108　有些教科书说 $f(x)=2^x$ 是一个可逆函数,为什么?

解 ☞ 函数 $f(x)=2^x$ 是一对一的,它的象集 $D=\{x:x>0\}$是正实数集.假定我们重新定义 f

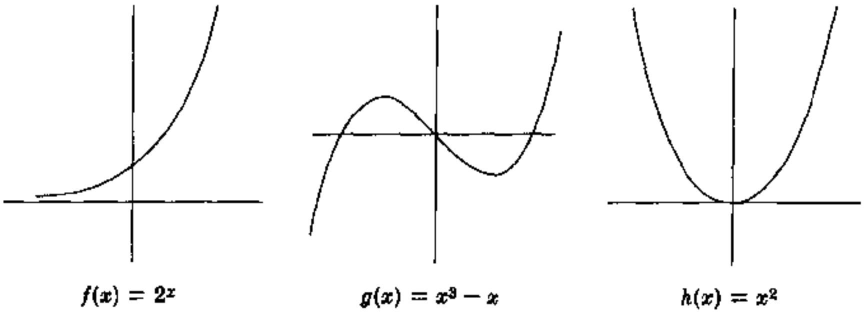


图 3-24

是函数 $f:\mathbf{R}\to D$,即 D 作为上域,那么 f 是双射的(一对一且映成的),因此有一个反函数 $f^{-1}:D\to\mathbf{R}$(见定理 3.2).

3.109 设 $W=\{1,2,3,4,5\}$,$f:W\to W$,$g:W\to W$,$h:W\to W$ 由图 3-25 的图来定义.判别每个函数是否可逆,若是,则求其反函数.

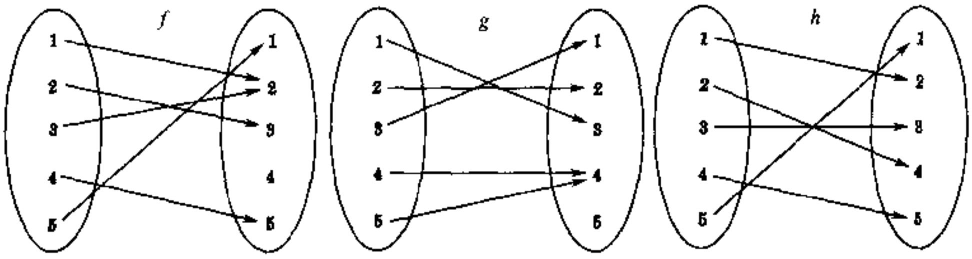


图 3-25

解 ☞ 欲使一个函数是可逆的,它必须是一对一且映成的函数,只有 h 是一对一且映成的函数,因此只有 h 是可逆的.为求 h 的反函数 h^{-1},只要将属于 h 的有序偶的顺序颠倒.由于

$$h=\{(1,2),(2,4),(3,3),(4,5),(5,1)\},$$

因此

$$h^{-1}=\{(2,1),(4,2),(3,3),(5,4),(1,5)\}.$$

我们看到 h^{-1}可在 h 的图中将箭头方向颠倒得到.

3.110 设 $f:A\to B$,$g:B\to C$ 和 $h:C\to D$ 为图 3-26 定义的函数.判定这些函数中哪些是一对一的.

解 ☞ 因 $g(1)=g(3)=r$,因此函数 g 不是一对一的.其他两个函数 f 和 h 是一对一的.

3.111 判别图 3-26 的函数 f,g 和 h 中哪些是映成函数.

解 ☞ 由于 f 的上域中的 3 没有原象,因此 f 不是映成函数.其他两个函数 g 和 h 是映成函数,即 $g(B)=C$ 和 $h(C)=D$.

3.112 判别图 3-26 的函数 f,g 和 h 是否可逆,若是,则求其反函数.

解 ☞ 只有 h 是一对一且映成函数,因此 h 是可逆的.改变 h 的有序偶顺序得到 h 的反函数 h^{-1}.于是,由于

$$h=\{(r,y),(s,z),(t,x)\},$$

因此

$$h^{-1}=\{(y,r),(z,s),(x,t)\}.$$

3.113 求图 3-26 中函数 f,g 和 h 的复合函数$h\circ g\circ f$.

解 ☞ 从 A 到 B 到 C 到 D 紧接箭号如下:

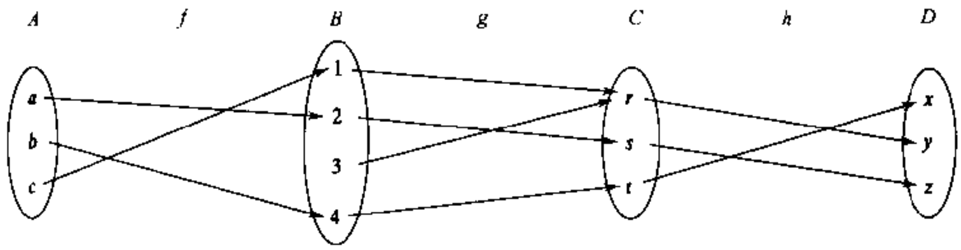


图 3-26

$$a \to 2 \to s \to z,\quad b \to 4 \to t \to x,\quad c \to 1 \to r \to y.$$

因此 $h \circ g \circ f = \{(a,z),(b,x),(c,y)\}$.

3.114　设 $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 定义为 $f(x)=2x-3$. 现在 f 是一对一且映成函数,因此 f 有一个逆映射 f^{-1}. 求 f^{-1}的一个表达式.

解　☞ 设 y 是在映射 f 下 x 的象,即令 $y=2x-3$. 交换 x 和 y 得到 $x=2y-3$. 解出 y 用 x 表示得到 $y=(x+3)/2$. 于是,定义逆映射的表达式是 $f^{-1}(x)=(x+3)/2$.

3.115　求 $g(x)=x^2-1$ 的反函数的表达式.

解　☞ 令 $y=x^2-1$. 交换 x 和 y 得到 $x=y^2-1$. 解出 y 得到 $y=\pm\sqrt{x+1}$. g 的反函数不存在,除非限制 g^{-1}的定义域为 $x \geqslant -1$. 在这种情况下,仅仅假定取正值 $\sqrt{x+1}$,因此 $g^{-1}(x)=\sqrt{x+1}$.

3.116　求 $h(x)=\dfrac{2x-3}{5x-7}$的反函数的一个表达式.

解　☞ 令 $y=h(x)$,并如下交换 x 和 y:

$$y=\frac{2x-3}{5x-7},$$

因此

$$x=\frac{2y-3}{5y-7}.$$

现在解出 y 用 x 表示:

$$5xy-7x=2y-3$$

或

$$5xy-2y=7x-3$$

或

$$(5x-2)y=7x-3.$$

因此

$$y=\frac{7x-3}{5x-2},$$

而且

$$h^{-1}(x)=\frac{7x-3}{5x-2}.$$

(这里 h^{-1}的定义域不包含 $x=2/5$.)

3.117　设 $f:A \to B$ 和 $g:B \to C$ 都是一对一函数. 证明 $g \circ f:A \to C$ 是一对一的.

证　☞ 设$(g \circ f)(x)=(g \circ f)(y)$,则 $g(f(x))=g(f(y))$. 由于 g 是一对一的,因此有 $f(x)=f(y)$. 又因 f 是一对一的,因此 $x=y$. 我们证得$(g \circ f)(x)=(g \circ f)(y)$意指 $x=y$. 因此 $g \circ f$ 是一对一函数.

3.118　设 $f:A \to B$ 和 $g:B \to C$ 都是映成函数. 证明 $g \circ f:A \to C$ 是映成函数.

证　☞ 设 $c \in C$. 由于 g 是映成函数,因此存在 $b \in B$ 使得 $g(b)=c$. 由于 f 是映成函数,因此存在 $a \in A$ 使得 $f(a)=b$. 于是$(g \circ f)(a)=g(f(a))=g(b)=c$. 故 $g \circ f$ 是映成函数.

3.119 给定 $f:A\to B$ 和 $g:B\to C$.证明,若 $g\circ f$ 是一对一函数,则 f 是一对一函数.

证 ☞ 设 f 不是一对一的,则存在不同的 $x,y\in A$ 使得 $f(x)=f(y)$.于是,$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(f(y))=(g\circ f)(y)$,从而 $g\circ h$ 不是一对一的.因此,若 $g\circ f$ 是一对一的,则 f 必是一对一的.

3.120 给定 $f:A\to B$ 和 $g:B\to C$.证明,若 $g\circ f$ 是映成函数,则 g 是映成函数.

证 ☞ 若 $a\in A$,则 $(g\circ f)(a)=g(f(a))\in g(B)$,因此 $(g\circ f)(A)\subseteq g(B)$.假设 g 不是映成函数,则 $g(B)$ 真包含在 C 中,因而 $(g\circ f)(A)$ 真包含在 C 中,这样,$g\circ f$ 不是映成函数.因此,若 $g\circ f$ 是映成函数,则 g 必是映成函数.

3.121 证明定理3.2.一个函数有反函数的充分必要条件为 f 是双射(一对一且映成)函数.

证 ☞ 设 f 有一个反函数,即存在一个函数 $f^{-1}:B\to A$ 使得 $f^{-1}\circ f=1_A$ 且 $f\circ f^{-1}=1_B$.由于 1_A 是一对一函数,因此根据习题3.119知 f 是一对一函数.又因 1_B 是映成函数,因此根据习题3.120知 f 是一个映成函数.这就是说,f 是一对一且映成函数.

现在,设 f 是一对一且映成函数,则每一个 $b\in B$ 是 A 的惟一元素的象,比方说 $\hat{b}$.于是,若 $f(a)=b$,则 $a=\hat{b}$,因此 $f(\hat{b})=b$.现设 g 表示从 B 到 A 的映射,定义为 $g(b)=\hat{b}$.我们有

(i) 对于每一个 $a\in A$,$(g\circ f)(a)=g(f(a))=g(b)=\hat{b}=a$,因此 $g\circ f=1_A$.

(ii) 对于每一个 $b\in B$,$(f\circ g)(b)=f(g(b))=f(\hat{b})=b$,因此 $f\circ g=1_B$.

于是,f 有反函数.它的反函数是映射 g.

3.122 设 $P=\{A_i\}$ 是集合 S 的一个划分.(a) 定义从 S 到 P 的一个自然(或标准)映射;(b) 证明自然映射是一个满映射.

解 ☞ (a) 设 $s\in S$.由于 P 是 S 的一个划分,因此有惟一的指标 i_0 使得 $s\in A_{i_0}$.定义 $f:S\to P$ 为

$$f(s)=A_{i_0}.$$

这是**自然映射**.

(b) 设 $A_i\in P$,则 $A_i\neq\varnothing$.于是存在 $s\in S$ 使得 $s\in A_i$,因而 $f(s)=A_i$.故 f 是一个满映射.

3.123 设 S 是 A 的一个子集,$i:S\hookrightarrow A$ 是包含映射(习题3.30).证明包含映射 i 是一对一的.

证 ☞ 设 $i(x)=i(y)$.由于 $i(x)=x$ 和 $i(y)=y$,因此 $x=y$ 且 i 是一对一的.

3.124 判别一个常值函数能否是(a)一对一函数;(b) 映成函数.

解 ☞ (a) 一个常值函数是一对一的充分必要条件是其定义域恰好由一个元素组成.

(b) 一个常值函数是映成函数的充分必要条件是其上域恰好由一个元素组成.

3.125 在什么样的集合 A 上,恒等函数 $1_A:A\to A$ 将是(a)一对一;(b) 映成函数?

解 ☞ 对于任何一个集合 A,恒等函数既是一对一又是映成函数(因此它是可逆的).

3.126 求"最大"区间 D,使得在该区间上表达式 $f(x)=x^2$ 定义一个一对一函数.

解 ☞ 只要区间 D 含正数或负数,但不同时含正数和负数,该函数将是一对一的.因此 D 是无穷区间

$$[0,\infty)=\{x:x\geqslant 0\}$$

或

$$(-\infty,0]=\{x:x\leqslant 0\}.$$

可能有其他的区间,在该区间上 f 是一对一的,但它们是这两个区间之一的子集.

3.127 描述函数 $y=f(x)$ 的图形和反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形之间的关系.

解 ☞ 有序偶 (a,b) 属于 f 的图形的充分必要条件是反向序偶 (b,a) 属于 f^{-1} 的图形,因此 f^{-1} 的图形可以从 f 的图形关于直线 $y=x$ 将 f 反射得到,如图3-27所示.

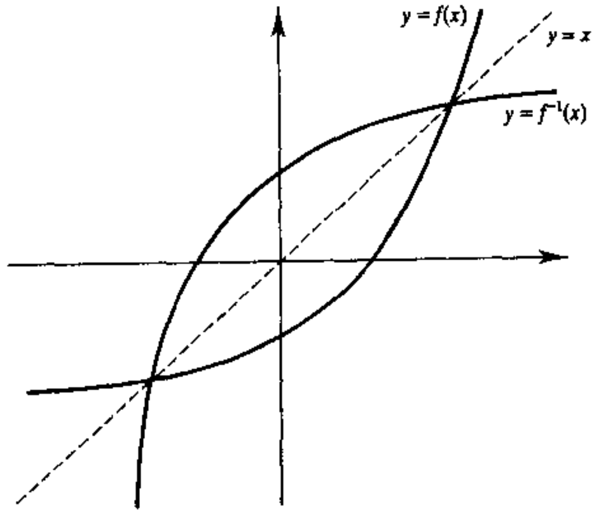


图 3-27

3.128 作图 2-24 的草图中函数 $f(x)=2^x$, $g(x)=x^2-x$ 和 $h(x)=x^2$ 的逆的图形.这些图形中哪些定义一个函数?

解 ☞ 将每个图形关于直线 $y=x$ 反射如图 3-28.图形 g^{-1} 和 h^{-1} 不是函数,因有垂直线与图形多于一个交点.然而,正如习题 3.108 所述,f^{-1} 定义一个其定义域为 $D=\{x:x>0\}$ 的函数.

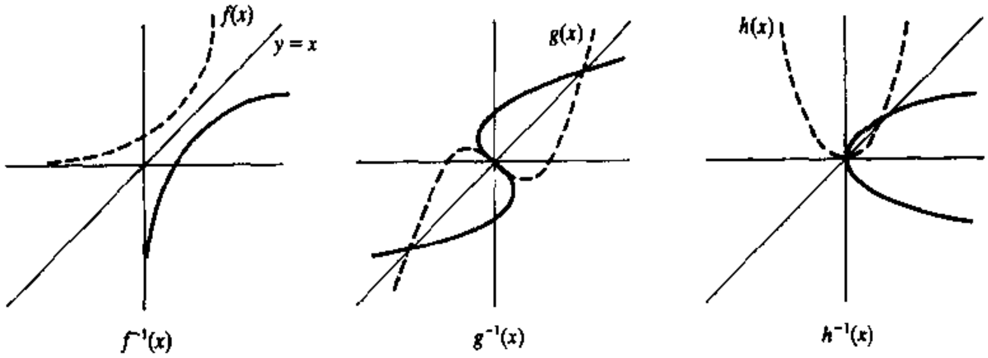


图 3-28

3.5 数学函数和计算机科学

这一节给出各种数学函数及其记号,它们也出现在计算机科学中.

弱取整和强取整函数

3.129 定义弱取整和强取整函数.

解 ☞ 设 x 是任一实数,则 x 位于两个称为 x 的弱取整和强取整的整数之间.具体地说,$\lfloor x\rfloor$ 称为 x 的**弱取整**,表示不超过 x 的最大整数.$\lceil x\rceil$ 称为 x 的**强取整**,表示不小于 x 的最小整数.若 x 本身是一个整数,则 $\lfloor x\rfloor=\lceil x\rceil$,否则,$\lfloor x\rfloor+1=\lceil x\rceil$.

3.130 求(a) $\lfloor 7.5\rfloor$, $\lfloor -7.5\rfloor$, $\lfloor -18\rfloor$;(b) $\lceil 7.5\rceil$, $\lceil -7.5\rceil$, $\lceil -18\rceil$.

解 ☞ (a)根据定义,$\lfloor x\rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数,因此 $\lfloor 7.5\rfloor=7$, $\lfloor -7.5\rfloor=-8$, $\lfloor -18\rfloor=-18$.

(b) 根据定义,$\lceil x\rceil$ 表示不小于 x 的最小整数,因此 $\lceil 7.5\rceil=8$, $\lceil -7.5\rceil=-7$, $\lceil -18\rceil=-18$.

3.131　求：(a)$\lfloor 3.14\rfloor,\lfloor\sqrt{5}\rfloor,\lfloor -8.5\rfloor,\lfloor 7\rfloor$；(b)$\lceil 3.14\rceil,\lceil\sqrt{5}\rceil,\lceil -8.5\rceil,\lceil 7\rceil$.

解　☞ (a) $\lfloor 3.14\rfloor=3,\lfloor\sqrt{5}\rfloor=2,\lfloor -8.5\rfloor=-9,\lfloor 7\rfloor=7$.

(b) $\lceil 3.14\rceil=4,\lceil\sqrt{5}\rceil=3,\lceil -8.5\rceil=-8,\lceil 7\rceil=7$.

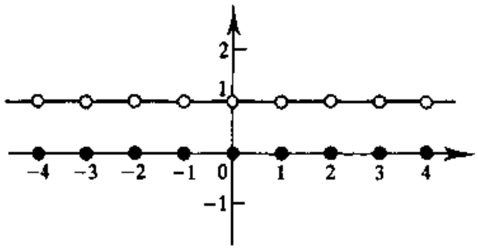
3.132　求：(a) $\lfloor\sqrt{30}\rfloor,\lfloor\sqrt[3]{30}\rfloor,\lfloor\pi\rfloor$；(b)$\lceil\sqrt{30}\rceil,\lceil\sqrt[3]{30}\rceil,\lceil\pi\rceil$.

解　☞ (a) $\lfloor\sqrt{30}\rfloor=5,\lfloor\sqrt[3]{30}\rfloor=3,\lfloor\pi\rfloor=3$.

(b) $\lceil\sqrt{30}\rceil=6,\lceil\sqrt[3]{30}\rceil=4,\lceil\pi\rceil=4$.

3.133　作 $f(x)=\lceil x\rceil-\lfloor x\rfloor$的图形.

解　☞ 这里，若 x 是一个整数，则 $f(x)=0$，否则 $f(x)=1$，如图 3-29 所示.



$f(x)=\lceil x\rceil-\lfloor x\rfloor$

图 3-29

余项函数，模算术

3.134　设 k 是任一整数，M 是一个正整数. 定义 $k(\mathrm{mod}\ M)$，读作"k 模M".

解　☞ $k(\mathrm{mod}\ M)$表示 k 被 M 除得到的剩余整数，更确切地，$k(\mathrm{mod}\ M)$是使 $k=Mq+r$ 的惟一整数 r，此处 $0\leqslant r<M$，q 是商.

3.135　求 25(mod 7)，25(mod 5)，35(mod 11)，3(mod 8).

解　☞ 当 k 是正数时，只要用 M 除 k 得到余数 r. 那么 $r=k(\mathrm{mod}\ M)$. 因此

$$25\ (\mathrm{mod}\ 7)=4,\quad 25(\mathrm{mod}\ 5)=0,$$
$$35(\mathrm{mod}\ 11)=2,\quad 3(\mathrm{mod}\ 8)=3.$$

3.136　求 26(mod 7)，34(mod 8)，2345(mod 6)，495 (mod 11).

解　☞ 由于 k 是正的，因此只要用 M 除 k 得余数 r. 于是 $r=k(\mathrm{mod}\ M)$，从而

$$26\ (\mathrm{mod}\ 7)=5,\qquad 34(\mathrm{mod}\ 8)=2,$$
$$2345\ (\mathrm{mod}\ 6)=5,\qquad 495(\mathrm{mod}\ 11)=0.$$

3.137　求 −26(mod 7)，−2345 (mod 6)，−371 (mod 6)，−39(mod 3).

解　☞ 由于 k 是负的，用模除$|k|$得余数 r'. 那么当 $r'\neq 0$ 时，$k(\mathrm{mod}\ M)=M-r'$. 于是

$$-26(\mathrm{mod}\ 7)=7-5=2,\qquad -2345(\mathrm{mod}\ 6)=6-5=1,$$
$$-371(\mathrm{mod}\ 8)=8-3=5,\qquad -39(\mathrm{mod}\ 3)=0.$$

注　"mod"也用于数字同余关系，表示并且定义如下：

$$a\equiv b(\mathrm{mod}\ M),\qquad \text{当且仅当 } M \text{ 整除} b-a.$$

M 称为**模**，且 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ M)$读作"$a$ 与 b 对模M 是同余的". 下面的同余关系是很有用的：

$$0\equiv M(\mathrm{mod}\ M),\quad a\pm M\equiv a(\mathrm{mod}\ M).$$

3.138　解释表示式"算术模 M"的含义.

解　☞ **算术模** M 系指加法、乘法和减法算术运算，这里算术值是用集合

$$\{0,1,2,\cdots,M-1\}$$

或集合

$$\{1,2,\cdots,M-1\}$$

中它的等价值来替代.例如,在算术模 12,有时称为"钟"算术中,

$$6+9\equiv3,\quad 7\times5\equiv11,\quad 1-5\equiv8,$$
$$2+10\equiv0\equiv12.$$

(用 0 或 M 依赖于应用.)

3.139 用算术模 15 计算 $9+13,7+11,4-9,2-10$.

解 ☞ $9+13=22\equiv22-15=7,\qquad 7+11=18\equiv18-15=3,$

$4-9=-5\equiv-5+15=10,\quad 2-10=-8\equiv-8+15=7.$

3.140 解下列线性同余方程:(a) $3x\equiv2(\bmod 8)$;(b) $6x\equiv5(\bmod 9)$;(c)$4x\equiv6(\bmod 10)$.

解 ☞ 由于每个模较小,因此我们用试验求所有的解.

(a) 以 $0,1,2,\cdots,7$ 试之,我们求得 $3\times6=18\equiv2(\bmod 8)$且只有 6 是解.

(b) 以 $0,1,2,\cdots,8$ 试之,我们发现没有解.

(c) 以 $0,1,2,\cdots,9$ 试之,我们看到

$$4\times4=16\equiv6(\bmod 10)$$

以及

$$4\times9=36\equiv6(\bmod 10)$$

且只有 4 和 9 是解.

阶乘函数

3.141 定义阶乘函数.

解 ☞ 从 1 到 n 的所有正整数的乘积用 $n!$ (读作"n 阶乘")表示,即

$$n!=1\cdot2\cdot3\cdots(n-2)(n-1)n.$$

定义 $0!=1$ 亦是方便的.

3.142 求 $2!,3!$ 和 $4!$.

解 ☞ 从 1 到 n 的整数相乘:

$$2!=1\cdot2=2,\quad 3!=1\cdot2\cdot3=6,\quad 4!=1\cdot2\cdot3\cdot4=24.$$

3.143 求 $5!,6!,7!$ 和 $8!$.

解 ☞ 对于 $n>1$,我们有 $n!=n(n-1)!$.因此

$$5!=5\cdot4!=5\cdot24=120,\qquad 6!=6\cdot5!=6\cdot120=720,$$
$$7!=7\cdot6!=7\cdot720=5040,\quad 8!=8\cdot7!=8\cdot5040=40320.$$

3.144 计算:(a)$\frac{13!}{11!}$ 和 (b)$\frac{7!}{10!}$.

解 ☞ (a)

$$\frac{13!}{11!}=\frac{13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=13\cdot12=156$$

或

$$\frac{13!}{11!}=\frac{13\cdot12\cdot11!}{11!}=13\cdot12=156.$$

(b)

$$\frac{7!}{10!}=\frac{7!}{10\cdot9\cdot8\cdot7!}=\frac{1}{10\cdot9\cdot8}=\frac{1}{720}.$$

3.145 求$(n!)!=(2n)!$ 的所有解.

解 ☞ 由试验:$n=0$(是);$n=1$(否);$n=2$(否);$n=3$(是).对于 $n\geqslant4$,

$$n!=n[(n-1)\cdots3]2\geqslant n[3]2>2n,$$

因此$(n!)!>(2n)!$,再没有解存在.

3.146 简化:(a)$\frac{n!}{(n-1)!}$ 和 (b)$\frac{(n+2)!}{n!}$.

解 ☞ (a)

$$\frac{n!}{(n-1)!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1}{(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1}=n$$

或简单地

$$\frac{n!}{(n-1)!}=\frac{n(n-1)!}{(n-1)!}=n.$$

(b)

$$\frac{(n+2)!}{n!}=\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1}{n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1}$$
$$=(n+2)(n+1)=n^2+3n+2$$

或简单地

$$\frac{(n+2)!}{n!}=\frac{(n+2)(n+1)\cdot n!}{n!}=(n+2)(n+1)=n^2+3n+2.$$

3.147 简化:(a) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ 和 (b)$\frac{(n-1)!}{(n+2)!}$.

解 ☞ (a)

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1}{(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1}=(n+1)\cdot n=n^2+n$$

或简单地

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=\frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!}{(n-1)!}=(n+1)\cdot n=n^2+n.$$

(b)

$$\frac{(n-1)!}{(n+2)!}=\frac{(n-1)!}{(n+2)(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!}=\frac{1}{(n+2)(n+1)\cdot n}=\frac{1}{n^3+3n^2+2n}.$$

指数和对数函数

3.148 解释指数函数 $f(x)=a^x$ 是如何定义的.

解 ☞ 对于整数指数(此处 m 是一个正整数),函数 $f(x)=a^x$ 定义为

$$a^m=a\cdot a\cdot\cdots\cdot a(m\text{ 次}),$$
$$a^0=1,$$
$$a^{-m}=\frac{1}{a^m}.$$

指数扩展到包括所有的有理数时,对任一有理数 m/n,它则定义为

$$a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m.$$

指数扩展到包括所有的实数时,对任一实数 x,它定义为

$$a^x=\lim_{r\to x}a^r,$$

此处 r 通过有理数值趋于 x.

3.149 计算 $2^4,2^{-4},125^{2/3}$.

解 ☞ 根据定义,

$$2^4=2\cdot2\cdot2\cdot2=16,\quad 2^{-4}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16},$$
$$125^{2/3}=(\sqrt[3]{125})^2=5^2=25.$$

3.150 计算 2^{-5},$8^{2/3}$和 $25^{-3/2}$.

解 ☞ 根据定义,

$$2^{-5}=1/2^5=1/32,\quad 8^{2/3}=(\sqrt[3]{8})^2=2^2=4,$$
$$25^{-3/2}=1/25^{3/2}=1/5^3=1/125.$$

3.151 解释对数函数 $g(x)=\log_b(x)$是如何定义的.

解 ☞ 对数和指数的关系如下:设 b 是一个正数.以 b 为底的任一正数 x 的对数记作 $\log_b x$,表

示以它为指数的 b 的幂为 x. 这就是说,

$$y = \log_b x \text{ 和 } b^y = x$$

是等价的陈述. 于是,由于 $b^0=1$,因此对于任一底 b, $\log_b 1=0$, 以及由于 $b^1=b$, 因此 $\log_b b=1$.

负数的对数和 0 的对数是没有定义的.

3.152 计算:(a) $\log_2 8$;(b) $\log_2 64$;(c) $\log_{10}100$;(d) $\log_{10}0.001$.

解 ☞ (a) 由于 $2^3=8$, 因此 $\log_2 8=3$.

(b) 由于 $2^6=64$, 因此 $\log_2 64=6$.

(c) 由于 $10^2=100$, 因此 $\log_{10}100=2$.

(d) 由于 $10^{-3}=0.001$, 因此 $\log_{10}0.001=-3$.

注 通常对数用近似值来表示. 例如,使用数表或计算器,我们得到

$$\log_{10}300 = 2.4771, \quad \log_e 40 = 3.6889$$

作为近似解答. (此处 $e=2.718281\cdots$)

3.153 计算:(a) $\log_2 32$;(b) $\log_{10}1000$;(c) $\log_2(1/16)$.

解 ☞ (a) 由于 $2^5=32$, 因此 $\log_2 32=5$.

(b) 由于 $10^3=1000$, 因此 $\log_{10}1000=3$.

(c) 因 $2^{-4}=1/2^4=1/16$, 因此 $\log_2(1/16)=-4$.

3.154 求(a) $\lfloor\log_2 1000\rfloor$;(b) $\lfloor\log_2 0.01\rfloor$.

解 ☞ (a) 由于 $2^9=512$, 但 $2^{10}=1024$, 因此 $\lfloor\log_2 1000\rfloor=9$.

(b) 由于 $2^{-7}=1/128<0.01<2^{-6}=1/64$, 因此 $\lfloor\log_2 0.01\rfloor=-7$.

注 指数函数和对数函数 $f(x)=b^x$ 和 $g(x)=\log_b x$ 也可认为是互为反函数. 因此这两个函数的图形关系如习题 3.155 所解释的.

3.155 在相同的坐标轴上,作指数函数 $f(x)=2^x$ 和对数函数 $g(x)=\log_2 x$ 以及线性函数 $h(x)=x$ 的图形. (a) 描述图形 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的几何性质;(b) 对任一正数 c, $f(c)$, $g(c)$ 和 $h(c)$ 有何关系?

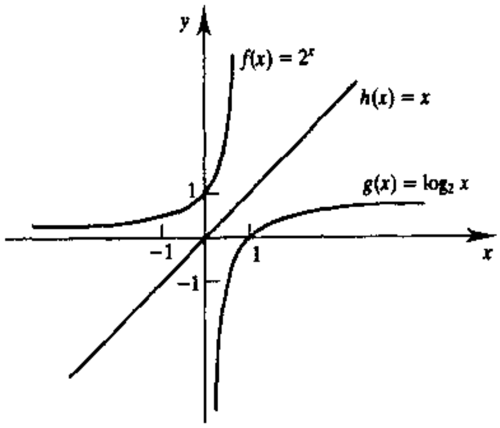


图 3-30

解 ☞ 这三个函数的图形如图 3-30 所示.

(a) $f(x)=2^x$ 和 $g(x)=\log_2 x$ 是互为反函数,因此它们的图形关于直线 $y=x$ 对称.

(b) 对于任一正数 c, 我们有

$$g(c) < h(c) < f(c).$$

事实上,当 c 增大时,垂直距离 $h(c)-g(c)$ 和 $f(c)-h(c)$ 随之增大. 而且,对数函数 $g(x)$ 与线性函数 $h(x)$ 相比增加得很慢,而指数函数 $f(x)$ 与线性函数 $h(x)$ 相比则增加得很快.

增长速度,O 记号

3.156 讨论下列标准函数的增长速度：

$$\log_2 n,\ n,\ n\log_2 n,\ n^2,\ n^3,\ 2^n.$$

解 ☞ 这些标准函数的增长速度在图 3-31 中表明.那里,对某个 n,给出它的近似值.我们看到这些函数是按它们的增长速度列表,对数函数 $\log_2 n$ 增长最慢,指数函数 2^n 增长最快,多项式函数 n^c 依指数 c 增加.

$g(n)$ \ n	$\log_2 n$	n	$n\log_2 n$	n^2	n^3	2^n
5	3	5	15	25	125	32
10	4	10	40	100	10^3	10^3
100	7	100	700	10^4	10^6	10^{30}
1000	10	10^3	10^4	10^6	10^9	100^{300}

图 3-31 标准函数的增长速度

3.157 说明任意的一个函数 $f(x)$ 的增长速度.

解 ☞ 通常将 $f(n)$ 与某一个标准函数,如习题 3.156 的一个函数进行比较.作这种比较的一个方法是应用习题 3.158 中定义的函数的"O"记号.

3.158 解释"O"记号的含义.

解 ☞ 设 $f(n)$ 和 $g(n)$ 是定义在正整数集的函数,具有性质:几乎对所有的 n,$f(n)$ 以 $g(n)$ 的某一倍数为界.这说是说,假设存在一个正整数 n_0 及一个正数 M,使得对一切 $n>n_0$,我们有

$$|f(n)|\leqslant M|g(n)|.$$

此时,我们记

$$f(n)=O(g(n)),$$

此处读作"$f(n)$ 是 $g(n)$ 阶的".当 $f(n)-h(n)=O(g(n))$ 时,我们亦写成

$$f(n)=h(n)+O(g(n)).$$

(这叫做大"O"记号是因为 $f(n)=o(g(n))$ 有一个与之完全不同的含义.)

3.159 设 $p(n)=a_0+a_1n+a_2n^2+\cdots+a_mn^m$,即设 $p(n)$ 的次数 $=m$.证明 $p(n)=O(n^m)$.

证 ☞ 设 $b_0=|a_0|,b_1=|a_1|,\cdots,b_m=|a_m|$.那么,对 $n\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}p(n)&\leqslant b_0+b_1n+b_2n^2+\cdots+b_mn^m\\&=\left(\frac{b_0}{n^m}+\frac{b_1}{n^{m-1}}+\cdots+b_m\right)n^m\\&\leqslant(b_0+b_1+\cdots+b_m)n^m=Mn^m,\end{aligned}$$

此处 $M=|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_m|$.于是 $p(n)=O(n^m)$.

(回顾一下习题 3.60.)例如,$5x^3+3x=O(x^3)$ 以及 $x^5-4000000x^2=O(x^5)$.

3.160 比较阶乘函数 $f(n)=n!$ 和图 3-31 中的函数的增长速度.

解 ☞ 阶乘函数 $f(n)=n!$ 较指数函数 2^n 增长得快.显然,对 $n\geqslant 4$,

$$2^n=2\cdot 2\cdots 2\leqslant 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)n.$$

事实上,$f(n)=n!$ 比任一常数 c 的指数函数 c^n 增长得快.

3.6 递归定义的函数

3.161 用递归定义的函数是什么含义?

解 ☞ 若函数定义归结到其自身定义,则说该函数是**递归定义**的.为了使定义不致于循环,它必须有下面两个性质:

(1) 必须有确定的自变量,称为**基本值**,对此,函数不归结到其自身定义;

(2) 每次函数归结到自身定义,函数的自变量必须更接近于基本值.

一个递归定义函数具有这两个性质,也说它是意义明确的.

3.162 考虑下面的 n 阶乘函数:

定义(阶乘函数):(a) 若 $n=0$,则 $n!=1$;

(b) 若 $n>1$,则 $n!=n(n-1)!$.

证明这个定义是递归的并且该函数是意义明确的.

证 ☞ 这个 $n!$ 函数归结到使用 $(n-1)!$ 的定义,因此它是递归的.而且,(a)当 $n=0$ 时(这样0是基本值) $n!$ 的值是明确给出的;(b)对于任意的 n,用 n 的较小的值,它更接近于基本值0,来定义 $n!$ 的值.因此该定义是不循环的,或者换句话说,阶乘函数是意义明确的.

3.163 用习题3.162的递归定义计算4!.

解 ☞ 这个计算要求下列九步:

(1) $4!=4\cdot 3!$

(2) $\quad 3!=3\cdot 2!$

(3) $\quad\quad 2!=2\cdot 1!$

(4) $\quad\quad\quad 1!=1\cdot 0!$

(5) $\quad\quad\quad\quad 0!=1$

(6) $\quad\quad\quad 1!=1\cdot 1=1$

(7) $\quad\quad 2!=2\cdot 1=2$

(8) $\quad 3!=3\cdot 2=6$

(9) $4!=4\cdot 6=24$

这就是

第1步:用3! 来定义4!,因此我们必须推迟计算4!,直到我们计算3!.在下一步缩进几格来表明这种推迟.

第2步:这里用2! 定义3!.因此我们必须推迟计算3!,直到我们计算2!.

第3步:用1! 定义2!.

第4步:用0! 定义1!.

第5步:因0是递归定义的基本值,这一步能明确地计算0!.

第6步到第9步:我们回头用0! 去求1!,用1! 求2!,用2! 求3!,最后用3! 求4!.这样,用"反向缩进几格表明后退.

3.164 设 a 和 b 表示正整数,函数 Q 递归定义如下:

$$Q(a,b)=\begin{cases}0, & \text{若 } a<b;\\ Q(a-b,b)+1, & \text{若 } b\leqslant a.\end{cases}$$

(a) 求 $Q(2,3)$ 和 $Q(14,3)$ 的值.

(b) 这个函数做什么用? 求 $Q(5861,7)$.

解 ☞ (a) 由于 $2<3$,因此

$$\begin{aligned}Q(2,3)&=0\\ Q(14,3)&=Q(11,3)+1\\ &=[Q(8,3)+1]+1=Q(8,3)+2\\ &=[Q(5,3)+1]+2=Q(5,3)+3\\ &=[Q(2,3)+1]+3=Q(2,3)+4\\ &=0+4=4.\end{aligned}$$

(b) 每次从 a 减去 b,Q 的值增加1.因此 $Q(a,b)$ 求 b 除 a 得的商.这样 $Q(5861,7)=837$.

3.165 设 n 表示一个正整数,函数 L 定义如下:

$$L(n)=\begin{cases}0, & \text{若 } n=1;\\ L(\lfloor n/2\rfloor)+1, & \text{若 } n>1.\end{cases}$$

(这里 $\lfloor k\rfloor$ 表示 k 的弱取整,即不超过 k 的最大整数.)

(a) 求 $L(25)$.

(b) 这个函数做什么用?

解 ☞ (a)

$$\begin{aligned} L(25) &= L(12)+1 \\ &= [L(6)+1]+1 = L(6)+2 \\ &= [L(3)+1]+2 = L(3)+3 \\ &= [L(1)+1]+3 = L(1)+4 \\ &= 0+4 = 4. \end{aligned}$$

(b) 每次用 2 除 n, L 的值增加 1, 因此 L 是使得

$$2^L \leqslant n$$

的最大整数. 故 $L(n)=\lfloor \log_2 n \rfloor$.

斐波那契(Fibonacci)序列

3.166 受人称赞的斐波那契序列(通常用 $F_0, F_1, F_2, \cdots$表示)如下:

$$0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,\cdots.$$

即是, $F_0=0$ 和 $F_1=1$, 以及随后的每一项是其前两项之和. 这个函数的一个公式定义如下:

定义(斐波那契序列):(a) 若 $n=0$ 或 $n=1$, 则 $F_n=n$;

(b) 若 $n>1$, 则 $F_n=F_{n-2}+F_{n-1}$.

证明这个定义是递归的并且该函数是意义明确的.

证 ☞ 由于该定义用 F_{n-2}和 F_{n-1}归结到自身定义, 因此它是递归的. 这里, (a)基本值是 0 和 1, (b)F_n 的值是用更接近基本值的 n 的较小的值来定义的. 因此这个函数是意义明确的.

3.167 求习题 3.166 中斐波那契序列的下两项, 即求 55 以后的两项.

解 ☞ 我们有 $F_{11}=34+55=89$, $F_{12}=55+89=144$.

3.168 求斐波那契序列中的 F_{16}.

解 ☞ 虽然 F_n 是递归定义的, 但用迭代法(即倒过来计算)计算是比较容易的. 我们还是应用递归法(即从上往下计算), 开始时 $F_{11}=89$ 和 $F_{12}=144$(见习题 3.167). 我们有

$$F_{13}=89+144=233, \quad F_{14}=144+233=377, \quad F_{15}=233+377=610,$$

因此 $F_{16}=377+610=987$.

阿克曼(Ackermann)函数

3.169 阿克曼函数是一个有两个自变量的函数, 每个自变量可取任一非负整数: $0,1,2,\cdots$. 这个函数定义如下:

定义(阿克曼函数):(a) 若 $m=0$, 则 $A(m,n)=n+1$;

(b) 若 $m\neq 0$, 但 $n=0$, 则 $A(m,n)=A(n-1,1)$;

(c) 若 $m\neq 0$ 且 $n\neq 0$, 则 $A(m,n)=A(m-1,A(m,n-1))$.

证明这个函数是递归定义的. 基本值是什么?

证 ☞ 由于这个定义用(b)和(c)归结到自身定义, 因此它是一个递归定义. 我们看到 $A(m,n)$ 只有当 $m=0$ 时明确地给出. 这样, 基本值是偶

$$(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),\cdots,(0,n),\cdots.$$

虽然从这个定义 $A(m,n)$不是很明显的, 但是任一 $A(m,n)$的值最后可以用函数在一个或更多个基本偶的值来表示.

注 $A(1,3)$的值在习题 3.170 中计算. 即使这样简单的情形要求 15 步. 一般地说, 除非简单的情形, 阿克曼函数是太复杂以致很难计算. 它在数理逻辑中有重要的应用.

3.170　应用阿克曼函数的定义计算 $A(1,3)$.

解　☞ 我们有下面的 15 步：

(1) $A(1,3)=A(0,A(1,2))$

(2)　$A(1,2)=A(0,A(1,1))$

(3)　　$A(1,1)=A(0,A(1,0))$

(4)　　　$A(1,0)=A(0,1)$

(5)　　　　$A(0,1)=1+1=2$

(6)　　　$A(1,0)=2$

(7)　　$A(1,1)=A(0,2)$

(8)　　　$A(0,2)=2+1=3$

(9)　　$A(1,1)=3$

(10)　$A(1,2)=A(0,3)$

(11)　　$A(0,3)=3+1=4$

(12)　$A(1,2)=4$

(13) $A(1,3)=A(0,4)$

(14)　$A(0,4)=4+1=5$

(15) $A(1,3)=5$.

向前移格表明我们在推迟计算并且回到定义，向后缩格表明我们在后退.

我们观察到在第 5, 8, 11 和 14 步应用定义(a)，在第 1, 2, 3 步应用(c). 在其他步中，我们进行回代.

3.7　加标集合类

3.171　解释指标函数的含义.

解　☞ 设 I 是一个非空集合，S 是一个集合的集合. 从 I 到 S 的指标函数是一个函数 $f: I\to S$. 对于任一 $i\in I$，我们用 A_i 表示象 $f(i)$. 这样，指标函数 f 通常表示为

$$\{A_i: i\in I\}\text{ 或 }\{A_i\}_{i\in I}\text{ 或简单地 }\{A_i\}.$$

集合 I 称为**指标集**，I 的元素称为**指标**，若 f 是一对一映成函数，我们则说 S 用 I 加标.

3.172　说明对于集合类如何定义并和交的集合运算.

解　☞ 一个加标集合类，例如 $\{A_i: i\in I\}$ 的并和交分别定义如下：

$$\bigcup_{i\in I}A_i=\{x: x\in A_i,\text{对某个 } i\in I\}$$

和

$$\bigcap_{i\in I}A_i=\{x: x\in A_i,\text{对所有 } i\in I\}.$$

在 I 是有限集合的情形，它们正好和我们原先的并和交的定义相同. 某 I 是 $\mathbf{N}$，我们则可分别用

$$A_1\cup A_2\cup\cdots$$

和

$$A_1\cap A_2\cap\cdots$$

表示并和交.

3.173　对于 $\mathbf{N}$ 中的每个 n，设 D_n 表示 $\mathbf{N}$ 的如下子集：

$$D_n=\{n,2n,3n,4n,\cdots\}=\{n\text{ 的倍数}\}.$$

求(a) $D_3\cap D_5$；(b) $D_4\cup D_8$；(c) $D_3\cap D_6$.

解　☞ (a) $D_3\cap D_5$ 由既是 3 的倍数又是 5 的倍数组成，因此由 15 的倍数组成. 于是 $D_3\cap D_5=D_{15}$.

(b) 因 8 的倍数也是 4 的倍数，因此 $D_8\subseteq D_4$. 于是 $D_4\cup D_8=D_4$.

(c) 因 6 的倍数也是 3 的倍数，因此 $D_6\subseteq D_3$. 于是 $D_3\cap D_6=D_6$.

3.174　就习题 3.173 中的集合 $D_n=\{n,2n,3n,\cdots\}$，求(a) $\bigcup\{D_n: n\in\mathbf{N}\}$；(b) $\bigcap\{D_n: n\in\mathbf{N}\}$；(c) $\bigcup\{D_p: p\text{ 是质数}\}$.

解 ☞ (a)每个 $m\in\mathbf{N}$ 属于 D_m，因此 $\bigcup\{D_n:n\in\mathbf{N}\}=\mathbf{N}$.

(b) 对任一 $m\in\mathbf{N}$，我们有 $m\notin D_{m+1}$. 因此 $\bigcap\{D_n:n\in\mathbf{N}\}=\varnothing$.

(c) 除 1 之外，每个正数是一个质数的倍数，因此 $\bigcup_p D_p=\{2,3,\cdots\}=\mathbf{N}\setminus\{1\}$.

3.175 设 I 是整数集 $\mathbf{Z}$. 对每个整数 n，我们指定 $\mathbf{R}$ 的如下子集：

$$A_n=\{x:x\leqslant n\}.$$

(换句话说，A_n 是无穷区间 $(-\infty,n]$.) 求 $\bigcup_n A_n$ 和 $\bigcap_n A_n$.

解 ☞ 对于任一实数 a，存在整数 n_1 和 n_2 使得 $n_1<a<n_2$，因此 $a\in A_{n_2}$，但 $a\notin A_{n_1}$. 于是

$$a\in\bigcup_n A_n \text{ 但 } a\notin\bigcap_n A_n.$$

故

$$\bigcup_n A_n=\mathbf{R} \text{ 但 } \bigcap_n A_n=\varnothing.$$

3.176 对于任一个 $i\in\mathbf{Z}$，令 $B_i=[i,i+1]$，它是从 i 到 $i+1$ 的闭区间. 求(a) $B_1\cup B_2$；(b) $B_3\cap B_4$；(c) $\bigcup_{i=7}^{18}B_i$；(d) $U_{i\in\mathbf{Z}}B_i$.

解 ☞ (a) $B_1\cup B_2$ 由区间 $[1,2]$ 和 $[2,3]$ 上的所有点组成，因此

$$B_1\cup B_2=[1,3].$$

(b) $B_3\cap B_4$ 由同时在区间 $[3,4]$ 和 $[4,5]$ 上的点组成，因此

$$B_3\cap B_4=\{4\}.$$

(c) $\bigcup_{i=7}^{18}B_i$ 是集合 $[7,8],[8,9],\cdots,[18,19]$ 的并，因此

$$\bigcup_{i=7}^{18}B_i=[7,19].$$

(d) 由于每个实数至少属于区间 $[i,i+1]$ 之一，因此 $\bigcup_{i\in\mathbf{Z}}B_i=\mathbf{R}$.

3.177 对于任一个 $n\in\mathbf{N}$，令 $D_n=(0,1/n)$，它是从 0 到 $1/n$ 的开区间. 求(a) $D_3\cup D_7$；(b) $D_3\cap D_{20}$；(c) $D_s\cup D_t$；(d) $D_s\cap D_t$.

解 ☞ (a) 由于 $(0,1/3)$ 是 $(0,1/7)$ 的一个超集，因此 $D_3\cup D_7=D_3$.

(b) 因 $(0,1/20)$ 是 $(0,1/3)$ 的一个子集，因此 $D_3\cap D_{20}=D_{20}$.

(c) 令 $m=\min(s,t)$，即两个数 s 和 t 中较小的一个，则 D_m 等于 D_s 或 D_t，并且包含另一个作为它的子集. 因此 $D_s\cup D_t=D_m$.

(d) 令 $M=\max(s,t)$，即两个数 s 和 t 中较大的一个. 因此 $D_s\cap D_t=D_M$.

3.178 就习题 3.177 中的开区间 $D_n=(0,1/n)$，求(a) $\bigcup_{n\in A}D_n$，此处 A 是 $\mathbf{N}$ 的一个子集；(b) $\bigcap_{n\in\mathbf{N}}D_n$.

解 ☞ (a) 设 a 是 A 的最小的数，则 $\bigcup_{n\in A}D_n=D_a$.

(b) 如果 x 是一个实数，那么至少存在一个自然数 n 使得 $x\notin(0,1/n)$，因此 $\bigcap_{n\in\mathbf{N}}D_n=\varnothing$.

3.179 说明任何一个集合的集合 $\mathscr{B}$ 怎么可以认为是一个加标集合类.

解 ☞ 集合的集合 $\mathscr{B}$ 可用其自身加标. 具体地说，恒等函数 $i:\mathscr{B}\to\mathscr{B}$ 是一个加标集合类 $\{A_i\}_{i\in\mathscr{B}}$，此处 $A_i\in\mathscr{B}$ 且 $i=A_i$. 换句话说，在 $\mathscr{B}$ 中任一集合的指标是该集合本身.

3.180 证明 $B\cap(\bigcup_{i\in I}A_i)=\bigcup_{i\in I}(B\cap A_i)$.

解 ☞ 设 x 属于 $B\cap(\bigcup_{i\in I}A_i)$. 那么 $x\in B$ 且 $x\in(\bigcup_{i\in I}A_i)$，因此存在一个 i_0 使得 $x\in A_{i_0}$. 于是 x 属于 $B\cap A_{i_0}$，这就意味着 x 属于 $\bigcup_{i\in I}(B\cap A_i)$. 因此

$$B\cap(\bigcup_{i\in I}A_i)\subseteq\bigcup_{i\in I}(B\cap A_i).$$

设 y 属于 $\bigcup_{i\in I}(B\cap A_i)$. 那么存在一个 i_0 使得 $y\in B\cap A_{i_0}$，这样 $y\in B$ 且 $y\in A_{i_0}$. 因此 y 是 $\bigcup_{i\in I}A_i$ 的一个成员. 由于 $y\in B$ 且 $y\in\bigcup_{i\in I}A_i$，因此 y 属于 $B\cap(\bigcup_{i\in I}A_i)$，于是

$$\bigcup_{i\in I}(B\cap A_i)\subseteq B\cap(\bigcup_{i\in I}A_i).$$

由此二结论推得

$$B\cap(\bigcup_{i\in I}A_i)=\bigcup_{i\in I}(B\cap A_i).$$

3.181 设$\{A_i\}_{i\in I}$是任一加标集合类，$i_0\in I$，证明

$$\bigcap_{i\in I}A_i\subseteq A_{i_0}\subseteq\bigcup_{i\in I}A_i.$$

证 ☞ 设$x\in\bigcap_{i\in I}A_i$，则对于每一个$i\in I$，$x\in A_i$. 特别地，$x\in A_{i_0}$. 因此

$$\bigcap_{i\in I}A_i\subseteq A_{i_0}.$$

设$y\in A_{i_0}$. 由于$i_0\in I$，因此$y\in\bigcup_{i\in I}A_i$. 于是$A_{i_0}\subseteq\bigcup_{i\in I}A_i$.

3.182 证明下面的德·摩根定律的推广：对任一集合类$\{A_i\}$，我们有

$$(\bigcup_i A_i)^c=\bigcap_i A_i^c.$$

证 ☞ 我们有

$$\begin{aligned}x\in(\bigcup_i A_i)^c &\text{ iff } x\notin\bigcup_i A_i\\ &\text{ iff } \forall i\in I, x\notin A_i\\ &\text{ iff } \forall i\in I, x\in A_i^c\\ &\text{ iff } x\in\bigcap_i A_i^c.\end{aligned}$$

因此，$(\bigcup_i A_i)^c=\bigcap_i A_i^c$.（这里，我们应用逻辑记号 iff，即"当且仅当"，以及$\forall$，即"对于所有的".）

3.8 基数

3.183 解释两个集合"有相同的元素个数"的含义. 这与一个基数的记号是怎样联系的？

解 ☞ 设A和B是两个集合. 若存在一个一一对应关系$f:A\to B$. 则说A和B有相同的元素个数或相同的基数，或者说它们是**等势**的，记作

$$|A|=|B| \quad 或 \quad \mathrm{Card}(A)=\mathrm{Card}(B).$$

这是关于集合的集合的一个等价关系，一个基数可以认为是由这个关系确定的等价类，或简单地作为联系等价类的一个符号.

3.184 定义有限集和无限集. 给出无限集的例子.

解 ☞ 设A是一个集合. 如果A是空的，或者A与集合$\{1,2,\cdots,n\}$有相同的基数，n为某个正整数，那么集合A是有限的. 若一个集合不是有限的，则它是无限的.（换句话说，若一个集合与它自身的一个真子集等势，则它是无限的.）常见的无限集的例子是自然数集**N**，整数集**Z**，有理数集**Q**和实数集**R**.

注 (a)关于有限集的基数，我们用明显的记号. 这就是说，0 赋予空集$\varnothing$，以及n赋予集合$\{1,2,\cdots,n\}$. 这样$|A|=n$当且仅当A与$\{1,2,\cdots,n\}$有相同的基数，这就意味着A有n个元素.

(b) 无限的正整数集**N**的基数是$\aleph_0$（读作"aleph 零"）. 这个记号是康托尔(Canton)引进的. 这样，$|A|=\aleph_0$当且仅当A与**N**有相同的基数. 一个有基数$\aleph_0$的集合称为**可列的**或**可数无限集**. 一个集合是有限的或可列的统称为**可数的**.

(c) 实数集**R**的基数用C表示. 我们将证明（习题 3.196）$|I|=|\mathbf{R}|=C$，此处$I=[0,1]$是闭的单位区间，并且$\aleph_0\neq C$. 我们说一个有基数C的集合A有连续统的势.

3.185 设$E=\{2,4,6,\cdots\}$，它是偶的正整数集合. 证明$|E|=\aleph_0$.

证 ☞ 函数$f:\mathbf{N}\to E$定义为$f(n)=2n$. 它是正整数集**N**和E之间的一个一一对应关系. 因此E和**N**有相同的基数，因而我们可记$|E|=\aleph_0$.

3.186 求集合：(a) $A=\{a,b,c,\cdots,y,z\}$；(b) $B=\{1,-3,5,11,-28\}$；(c) $C=\{x:x\in\mathbf{N},x^2=5\}$的基数.

解 ☞ (a) 在英语字母表中有 26 个字母，因此$|A|=26$.

(b) $|B|=5$.

(c) 没有一个正数的平方是 5，因此$|C|=0$，即C是空集.

3.187 求集合:(a) $A=\{10,20,30,40,\cdots\}$和(b) $B=\{6,7,8,9,\cdots\}$的基数.

解 ☞ (a) 设 $f:\mathbf{N}\to A$ 定义为 $f(n)=10n$,则它是 N 和 A 之间的一一对应关系.因此 $|A|=\aleph_0$.

(b) 设 $g:\mathbf{N}\to B$ 定义为 $g(n)=n+5$,则它是 N 和 B 之间的一一对应关系.因此 $|B|=\aleph_0$.

3.188 求下列集合的基数:

(a) $A=\{$星期一,星期二,$\cdots$,星期天$\}$;

(b) $B=\{x:x^2=25,3x=6\}$;

(c) $A=\{1,4,5,9\}$的幂集 $P(A)$.

解 ☞ (a) 一周有 7 天,因此 $|A|=7$.

(b) 没有元素既满足 $x^2=25$ 又满足 $3x=6$,因此 B 是空集.故 $|B|=0$.

(c) 这里,A 有 4 个元素,因此 $P(A)$有 $2^4=16$ 个元素,或 $|P(A)|=16$.

3.189 求集合:(a) 从 $A=\{a,b,c\}$到 $B=\{1,2,3,4\}$的函数的集合 X 和(b) 在 $A=\{a,b,c\}$上所有的关系的集合 Y 的基数.

解 ☞ (a) A 有 3 个元素且 B 有 4 个元素,因此 X 有 $4^3=64$ 个元素.这样,$|X|=64$.

(b) 由于 A 有 3 个元素,因此 $A\times A$ 有 9 个元素.于是 $A\times A$ 有 $2^9=512$ 个子集,即 A 上有 512 个关系.故 $|Y|=512$.

3.190 证明整数集 **Z** 有基数$\aleph_0$.

解 ☞ 下面的图表明 N 和 Z 之间的一个一一对应关系:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathbf{N} & = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \mathbf{Z} & = & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 & \cdots \end{array}$$

这就是说,下面的函数 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{Z}$ 是一对一映成函数:

$$f(n)=\begin{cases} n/2, & \text{若 } n \text{ 是偶数;} \\ (1-n)/2, & \text{若 } n \text{ 是奇数.} \end{cases}$$

因此,$|\mathbf{Z}|=|\mathbf{N}|=\aleph_0$.

3.191 设 $A_1,A_2,\cdots$是可数个有限集.证明并 $S=\bigcup_i A_i$ 是可数的.

证 ☞ 其实,我们列出 A_1 的元素,然后列出 A_2 的不属于 A_1 的元素,再列出 A_3 的不属于 A_1 或 A_2 的元素,即不曾列出的元素,等等.由于 A_i 是有限的,我们总可以列出各个集合的元素.我们用公式进行该过程如下:

首先我们定义集合 $B_1,B_2,\cdots$,此处 B_i 含有A_i 的不属于前面的集合的元素,就是说,我们定义

$$B_1=A_1$$

以及

$$B_k=A_k\setminus(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{k-1}).$$

于是 B_i 和$S=\bigcup_i B_i$ 不相交.设 $b_{i_1},b_{i_2},\cdots,b_{im_i}$是$B_i$ 的元素,则 $S=\{b_{ij}\}$,设 $f:S\to\mathbf{N}$ 定义如下:

$$f(b_{ij})=m_1+m_2+\cdots+m_{i-1}+j.$$

若 S 是有限的,则 S 是可数的.若 S 是无限的,则 f 是S 和 N 之间的一一对应关系.因此 S 是可数的.

定理 3.3 可数集的一个可数的并是可数的.

3.192 证明定理 3.3.

证 ☞ 设 $A_1,A_2,A_3\cdots$是可数个可数集合.特别地,设 $a_{i1},a_{i2},a_{i3},\cdots$是 A_i 的元素.定义集合 $B_2,B_3,B_4,\cdots$如下:

$$B_k=\{a_{ij}:i+j=k\}.$$

我们看到每个 B_k 是有限的,并且

$$S=\bigcup_i A_i=\bigcup_k B_k.$$

根据习题 3.191 可知, $\bigcup_k B_k$ 是可数的. 因此 $S=\bigcup_i A_i$ 是可数的, 定理得证.

3.193 设 $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}$ 是一个不同元素的无穷序列. 证明 $|A|=\aleph_0$.

证 ☞ 设函数 $f:\mathbf{N}\to A$ 定义为 $f(n)=a_n$, 则它是一对一映成函数. 因此 $|A|=|\mathbf{N}|=\aleph_0$.

3.194 证明积集 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 有基数 $\aleph_0$.

证 ☞ 图 3-32 表明集合 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 可以写成一个不同元素的无穷序列如下:

$$\{(1,1),(2,1),(1,2),(1,3),(2,2),\cdots\}.$$

(具体地说, 该序列是由图 3-32 中的"紧跟箭号"确定的.) 于是, 根据习题 3.193 可知 $|\mathbf{N}\times\mathbf{N}|=\aleph_0$.

定理 3.4 在 0 和 1 之间的所有实数的集合 $I=[0,1]$ 是不可数的.

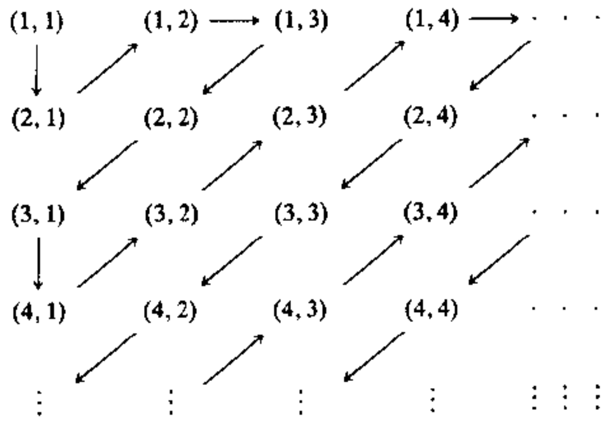


图 3-32

3.195 证明定理 3.4.

证 ☞ 集合 I 显然是无限集, 因它含有 $1,1/2,1/3,\cdots$. 假设 I 是可列的, 则存在一个一一对应关系 $f:\mathbf{N}\to I$. 令 $f(1)=a_1, f(2)=a_2,\cdots$, 即 $I=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}$. 我们按一列列出元素 $a_1,a_2,\cdots$, 并且用十进制小数展开式表示各个元素:

$$a_1=0.x_{11}x_{12}x_{13}x_{14}\cdots,$$
$$a_2=0.x_{21}x_{22}x_{23}x_{24}\cdots,$$
$$a_3=0.x_{31}x_{32}x_{33}x_{34}\cdots,$$
$$a_4=0.x_{41}x_{42}x_{43}x_{44}\cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

此处 $x_{ij}\in\{0,1,2,\cdots,9\}$. (对于那些可以用两个不同的十进制小数展开式表示的数, 例如, $0.200000\cdots=0.199999\cdots$, 我们选取以 9 结尾的展开式.)

令 $b=0.y_1y_2y_3y_4\cdots$ 是由

$$y_i=\begin{cases}1, & \text{若 } x_{ii}\neq 1,\\ 2, & \text{若 } x_{ii}=1\end{cases}$$

得到的实数. 现在 $b\in I$. 但

$$b\neq a_1, \text{因 } y_1\neq x_{11},$$
$$b\neq a_2, \text{因 } y_2\neq x_{22},$$
$$b\neq a_3, \text{因 } y_3\neq x_{33},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

因此 b 不属于 $I=\{a_1,a_2,\cdots\}$. 这与 $b\in I$ 矛盾. 因此假设 I 是可列的必错无疑, 故 I 是不可数的.

3.196 考虑闭单位区间 $I=[0,1]$ 和开单位区间 $I'=(0,1)$. 证明: (a) $|I|=|I'|$, (b) $|\mathbf{R}|=|I'|=|I|$. (这样, 据定理 3.4, 我们有 $c\neq\aleph_0$.)

证 ☞ (a) 注意到

$$I = [0,1] = \{0,1,1/2,1/3,\cdots\} \cup A$$

和

$$I' = (0,1) = \{1/2,1/3,1/4,\cdots\} \cup A,$$

其中 $A = [0,1] - \{0,1,1/2,1/3,\cdots\} = (0,1) - \{1/2,1/3,\cdots\}$. 考虑由图 3-33 定义的函数 $f: I \to I'$, 即

$$f(x) = \begin{cases} 1/2, & 若\ x = 0; \\ 1/(n+2), & 若\ x = 1/n\ (n \in \mathbf{N}); \\ x, & 若\ x \neq 0, 1/n\ (n \in \mathbf{N}). \end{cases}$$

那么 f 是一对一映成函数. 因此 $|I| = |I'|$

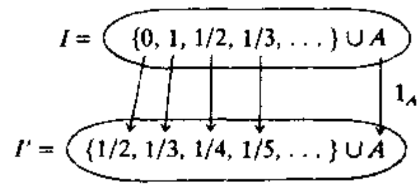


图 3-33

(b) 设三角函数 $f: I' \to \mathbf{R}$ 定义为

$$f(x) = \tan(\pi x - \pi/2),$$

则它是一对一映成函数, 这样 $|\mathbf{R}| = |I'| = |I|$.

3.197 设 P 是全体整系数多项式

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$$

构成的集合, 此处 $a_0, a_1, \cdots, a_m$ 都是整数. 证明 P 是可列的.

证 ☞ 对于每一自然数对 (n, m), 令 $P_{(n,m)}$ 是具有

$$|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_m| = n$$

的 m 次多项式集合. 注意到 $P_{(n,m)}$ 是有限集. 由于 $P = \bigcup_{i \in \mathbf{N}\times\mathbf{N}} P_i$ 是可数集合的可数族, 因此它是可数的. 但 P 不是有限的, 因此 P 是可列的.

3.198 如果一个实数 r 是一个整系数多项式方程

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$$

的一个解, 那么 r 称为一个**代数数**. 证明代数数的集合 A 是可列的.

证 ☞ 根据习题 3.197 可知, 多项式方程的集合 E:

$$E = \{p_1(x) = 0, p_2(x) = 0, p_3(x) = 0, \cdots\}$$

是可列的. 定义

$$A_i = \{x \mid x\ 是\ p_i(x) = 0\ 的一个解\}.$$

由于一个 n 次多项式至多能有 n 个根, 因此 A_i 是有限集. 因此 $A = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} A_i$ 是可数集合的可数族. 于是 A 是可数的. 并且由于 A 不是有限的, 因而是可列的.

3.199 证明一个可列集的子集或是有限的或是可列的. (因此, 一个可数集的子集是可数的.)

证 ☞ 设

$$A = \{a_1, a_2, \cdots\} \tag{1}$$

是任一可列集, B 是 A 的一个子集. 若 $B = \varnothing$, 则 B 是有限集. 若 $B \neq \varnothing$, 则设 a_{n_1} 是序列(1)的第一个使 $a_{n_1} \in B$ 的元素, a_{n_2} 是(1)中 a_{n_1} 之后第一个使得 $a_{n_2} \in B$ 的元素, 等等. 于是

$$B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots\}.$$

若整数的集合 $\{n_1, n_2, \cdots\}$ 是有界的, 则 B 是有限的; 否则 B 是可列的.

3.200　证明有理数集 $\mathbf{Q}$ 是可列的，即 $|\mathbf{Q}| = \aleph_0$.

证 ☞ 设 Q^+ 表示正有理数集和 Q^- 表示负有理数集.于是

$$\mathbf{Q} = Q^- \cup \{0\} \cup Q^+$$

是有理数集.设函数 $f: Q^+ \to \mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 定义为

$$f(p/q) = (p, q),$$

此处 p/q 是 Q^+ 的任一个数，它表示成两个互质的正整数的比.因此 f 是一对一映成函数，因而 Q^+ 与 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 的一个子集有相同的基数.根据习题 3.199 知，Q^+ 是可列集.同理 Q^- 是可列的.因此，因有理数集 $\mathbf{Q}$ 是 Q^+，$\{0\}$ 和 Q^- 的并，因而也是可列的.

3.201　设 A 和 B 是任两个集合.习题 3.183 用一个双射函数定义关系 $\text{Card}(A) = |A| = |B|$.

(a) 如何定义关系 $|A| \leqslant |B|$ 和关系 $|A| < |B|$？

(b) 叙述关于基数的古典的施罗德-伯恩斯坦(Schroeder-Bernstein)定理和三分律.

解 ☞ (a)设存在一个单射函数 $f: A \to B$.我们则记 $|A| \leqslant |B|$.而且，若 $|A| \leqslant |B|$ 但 $|A| \neq |B|$，我们则记作 $|A| < |B|$.

(b) 施罗德-伯恩斯坦定理述及，若 $|A| \leqslant |B|$ 且 $|B| \leqslant |A|$，则 $|A| = |B|$.三分律是说，对任两个集合，我们有 $|A| < |B|$，$|B| < |A|$ 或 $|A| = |B|$.

定理 3.5(康托尔)　对任一集合 A，我们有 $|A| < |P(A)|$，此处 $P(A)$ 是 A 的幂集.

3.202　证明定理 3.5.

解 ☞ 设函数 $g: A \to P(A)$ 定义为 $g(a) = \{a\}$.则它是单射函数.因此 $|A| \leqslant |P(A)|$.我们只须证明 $|A| \neq |P(A)|$，便可证得该定理.

我们作相反假设，即 $|A| = |P(A)|$，则存在一个函数 $f: A \to P(A)$，它是一对一映成函数.若 $a \in A$ 不属于其象的集合，即若 $a \notin f(a)$，则称 a 是一个"坏"元素.设 B 是"坏"元素的集合，具体地，

$$B = \{x : x \in, x \notin f(x)\}.$$

现在 B 是 A 的一个子集.由于 $f: A \to P(A)$ 是映成函数，因此存在一个 $b \in A$ 使得 $f(b) = B$.b 是"坏的"还是"好的"？若 $b \notin B$，则 $b \notin f(b) = B$，这是一个矛盾.若 $b \notin B$，则 $b \in f(b) = B$，这也是一个矛盾.这样，原先假定 $|A| = |P(A)|$ 便导出一个矛盾.因此 $|A| \neq |P(A)|$，定理得证.

第四章 向量和矩阵

4.1 $\mathbf{R}^n$ 中的向量

这一节考虑下面的向量运算：

向量加法： $u+v=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$,

数乘： $ku=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$,

负向量： $-u=(-1)u=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$,

此处 $u=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$和 $v=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$是 $\mathbf{R}^n$ 中的向量,以及 k 是一个实数(纯量).

4.1 设 $u_1=(1,3,5)$, $u_2=(3,5,1)$, $u_3=(1,5,3)$, $u_4=(3,5,1)$是 $\mathbf{R}^3$ 的向量.哪些向量是相等的?

解 ☞ 只有 u_2 和 u_4 的对应分量都相等,因此只有 $u_2=u_4$.

4.2 设 $u=(2,-7,1)$, $v=(-3,0,4)$, $w=(0,5,-8)$.求(a)$u+v$,(b)$v+w$,(c)$-3u$,(d)$-w$.

解 ☞ (a)对应分量相加:

$$u+v=(2,-7,1)+(-3,0,4)=(2-3,-7+0,1+4)=(-1,-7,5).$$

(b)对应分量相加:

$$v+w=(-3,0,4)+(0,5,-8)=(-3+0,0+5,4-8)=(-3,5,-4).$$

(c)纯量 -3 乘 u 的各个分量:

$$-3u=-3(2,-7,1)=(-6,21,-3).$$

(d)用 -1 乘 w 的各分量,即改变各分量的符号:

$$-w=-(0,5,-8)=(0,-5,8).$$

4.3 设 u, v 和 w 是习题 4.2 的向量.求(a)$3u-4v$ 和(b)$2u+3v-5w$.

解 ☞ 首先作数乘然后作向量加法运算.

(a) $3u-4v=3(2,-7,1)-4(-3,0,4)=(6,-21,3)+(12,0,-16)=(18,-21,-13)$

(b) $2u+3v-5w=2(2,-7,1)+3(-3,0,4)-5(0,5,-8)=(4,-14,2)+(-9,0,12)+(0,-25,40)=(4-9+0,-14+0-25,2+12+40)=(-5,-39,54)$.

4.4 设 $u=(2,3,-4)$和 $v=(1,-5,8)$.求(a)$u+v$,(b)$5u$,(c)$-v$.

解 ☞ (a)$u+v=(2+1,3-5,-4+8)=(3,-2,4)$

(b)$5u=(5\cdot2,5\cdot3,5\cdot(-4))=(10,15,-20)$,

(c)$-v=-1\cdot(1,-5,8)=(-1,5,-8)$.

4.5 设 u 和 v 是习题 4.4 的向量.求(a)$2u-3v$ 和(b)$3u+5v$.

解 ☞ (a)$2u-3v=(4,6,-8)+(-3,15,-24)=(1,21,-32)$.

(b)$3u+5v=(6,9,-12)+(5,-25,40)=(11,-16,28)$.

4.6 设 $u=(3,-2,1,4)$和 $v=(7,1,-3,6)$.求(a)$u+v$,(b)$4u$,(c)$2u-3v$.

解 ☞ (a)$u+v=(3+7,-2+1,1-3,4+6)=(10,-1,-2,10)$.

(b)$4u=(4\cdot3,4\cdot(-2),4\cdot1,4\cdot4)=(12,-8,4,16)$.

(c)$2u-3v=(6,-4,2,8)+(-21,-3,9,-18)=(-15,-7,11,-10)$.

4.7 定义 $\mathbf{R}^n$ 的零向量 0.

解 ☞ 零向量是它的分量都是零的向量,即 $0=(0,0,\cdots,0)$.

4.8 举例说明列向量和行向量之间的差别.

解 ☞ 一个列向量是其分量为竖写的向量,例如

$$\begin{pmatrix}7\\-4\\5\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}3\\-7\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2\\-3\\0\\6\end{pmatrix}$$

是分别有 3,2 和 4 个分量的列向量.一个行向量是其分量为横写的向量,如前面习题所给出的.(向量常写成行向量.)

4.9 计算:

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix};\quad \text{(b)}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix};\text{(c)}-3\begin{pmatrix}4\\-5\\-6\end{pmatrix};\quad \text{(d)}-\begin{pmatrix}-6\\7\\-8\end{pmatrix}.$$

解 ☞ (a)对应分量相加:

$$\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+1\\-4+1\\5-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-3\\3\end{pmatrix}.$$

(b)由于两个列向量有不同的分量数目,因此其和没有定义.

(c)用数 -3 乘每个分量:

$$-3\begin{pmatrix}4\\-5\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\cdot4\\-3\cdot(-5)\\-3\cdot(-6)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\15\\18\end{pmatrix}.$$

(d)用 -1 乘每个分量,即改变每个分量的符号:

$$-\begin{pmatrix}-6\\7\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-7\\8\end{pmatrix}.$$

4.10 计算:

$$\text{(a)}\ 2\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix};\quad \text{(b)}-2\begin{pmatrix}5\\3\\-4\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}-1\\5\\2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

解 ☞ 首先作数乘然后将向量相加:

$$\text{(a)}\ 2\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6\\-9\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-11\\18\end{pmatrix}.$$

$$\text{(b)}\ -2\begin{pmatrix}5\\3\\-4\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}-1\\5\\2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\-6\\8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\20\\8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-9\\3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-23\\17\\19\end{pmatrix}.$$

4.11 设 $(x,3)=(2,x+y)$,求 x 和 y.

解 ☞ 由于两个向量相等,因此对应分量彼此相等:

$$x=2,\qquad 3=x+y.$$

将 $x=2$ 代入第二个方程得 $y=1$.因此 $x=2$ 和 $y=1$.

4.12 设 $(4,y)=x(2,3)$,求 x 和 y.

解 ☞ 用 x 乘 $(2,3)$ 得

$$(4, y) = x(2,3) - (2x, 3x).$$

令对应分量彼此相等得

$$4 = 2x, \qquad y = 3x.$$

解此线性方程组得 $x=2$ 和 $y=6$.

4.13 设$(2x,3,y)=(4,x+z,2z)$,求 x, y 和 z.

解 ☞ 令对应分量彼此相等得方程组:

$$2x = 4, \qquad 3 = x + z, \qquad y = 2z.$$

于是, $x=2$, $z=1$ 和 $y=2$.

4.14 设 $x(1,1)+y(2,-1)=(1,4)$,求 x 和 y.

解 ☞ 首先用 x 和 y 分别乘$(1,1)$和$(2,-1)$然后相加得:

$$\begin{aligned} x(1,1) + y(2,-1) &= (x,x) + (2y,-y) \\ &= (x+2y, x-y) = (1,4). \end{aligned}$$

现在,令对应分量彼此相等得:

$$x + 2y = 1, \qquad x - y = 4.$$

解此方程组得 $x=3$ 和 $y=-1$.

4.15 解释一个向量是其他向量的线性组合的含义是什么.

解 ☞ 若存在数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 使得

$$v = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nv_n,$$

则向量 v 是向量 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 的一个线性组合.

4.16 将 $v=(1,4)$表示成 $u_1=(1,1)$和 $u_2=(2,-1)$的线性组合.

解 ☞ 我们欲将 v 表示成形式

$$v = xu_1 + yu_2, \tag{1}$$

x 和 y 尚为未知的.这样,我们要求

$$(1,4) = x(1,1) + y(2,-1).$$

根据习题 4.14, $x=3$ 和 $y=-1$.因此将它们代入(1),得

$$v = 3u_1 - u_2.$$

4.17 将向量 $v=(1,-2,5)$写成向量 $u_1=(1,1,1)$, $u_2=(1,2,3)$和 $u_3=(2,-1,1)$的一个线性组合.

解 ☞ 我们欲将 v 表示成 $v=xu_1+yu_2+zu_3$, x, y 和 z 尚为未知数.于是,我们有

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+2z \\ x+2y-z \\ x+3y+z \end{pmatrix}.$$

(在形成线性组合时,写成列向量则更为方便.)令相应的分量彼此相等,我们得到

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1, \\ x + 2y - z &= -2, \\ x + 3y + z &= 5 \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1, \\ y - 3z &= -3, \\ 2y - z &= 4 \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1, \\ y - 3z &= -3, \\ 5z &= 10. \end{aligned}$$

该三角方程组的惟一解是 $x=-6$, $y=3$, $z=2$,因此 $v=-6u_1+3u_2+2u_3$.

4.18 将 $v=(2,3,-5)$写成 $u_1=(1,2,-3)$, $u_2=(2,-1,-4)$和 $u_3=(1,7,-5)$的线性组

合.

解 ☞ 求方程组的等价方程组然后求解,这样

$$\begin{pmatrix}2\\3\\-5\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\-1\\-4\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\7\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-2y+z\\2x-y+7z\\-3x-4y-5z\end{pmatrix}.$$

令对应分量彼此相等,得

$$\begin{aligned}x+2y+z&=2,\\2x-y+7z&=3,\\-3-4y-5z&=-5\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}x+2y+z&=2,\\-5y+5z&=-1,\\2y-2z&=1\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}x+2y+z&=2,\\-5y+5z&=-1,\\0&=3.\end{aligned}$$

第三个方程 0=3 表明该方程组无解.这样,v 不能写成向量 u_1,u_2 和 u_3 的线性组合.

定理4.1 对于 $\mathbf{R}^n$ 中的任何向量 $u=(u_i)$, $v=(v_i)$ 和 $w=(w_i)$ 以及 $\mathbf{R}$ 中的任意数 k, k',有

(i) $(u+v)+w=u+(v+w)$,

(ii) $u+0=u$,

(iii) $u+(-u)=0$,

(iv) $u+v=v+u$,

(v) $k(u+v)=ku+kv$,

(vi) $(k+k')u=ku+k'u$,

(vii) $(kk')u=k(k'u)$,

(viii) $1u=u$.

4.19 证明定理 4.1(i): $(u+v)+w=u+(v+w)$.

证 ☞ 据定义,u_i+v_i 是 $u+v$ 的第 i 个分量,因而 $(u_i+v_i)+w_i$ 是 $(u+v)+w$ 的第 i 个分量.另一方面,v_i+w_i 是 $v+w$ 的第 i 个分量,$u_i+(v_i+w_i)$ 是 $u+(v+w)$ 的第 i 个分量.但 u_i,v_i 和 w_i 都是实数,结合律成立,即

$$(u_i+v_i)+w_i=u_i+(v_i+w_i),\qquad i=1,\cdots,n.$$

因此,$(u+v)+w$ 和 $u+(v+w)$ 的对应分量相等,故 $(u+v)+w=u+(v+w)$.

4.20 证明定理 4.1(ii): $u+0=u$.

证 ☞
$$\begin{aligned}u+0&=(u_1,u_2,\cdots,u_n)+(0,0,\cdots,0)\\&=(u_1+0,u_2+0,\cdots,u_n+0)\\&=(u_1,u_2,\cdots,u_n)=u.\end{aligned}$$

4.21 证明定理 4.1(iii): $u+(-u)=0$.

证 ☞
$$\begin{aligned}u+(-u)&=(u_1,u_2,\cdots,u_n)+(-u_1,-u_2,\cdots,-u_n)\\&=(u_1-u_1,u_2-u_2,\cdots,u_n-u_n)\\&=(0,0,\cdots,0)=0.\end{aligned}$$

4.22 证明定理 4.1(iv): $u+v=v+u$.

证 ☞ 根据定义,u_i+v_i 是 $u+v$ 的第 i 个分量,以及 v_i+u_i 是 $v+u$ 的第 i 个分量,但 u_i 和 v_i 是实数,对此结合律成立,即

$$u_i + v_i = v_i + u_i, \qquad i = 1, \cdots, n.$$

由于 $u+v$ 和 $v+u$ 的对应分量相等，因此 $u+v=v+u$.

4.23　证明定理 4.1(v)：$k(u+v)=ku-kv$.

证　☞ 由于 u_i+v_i 是 $u+v$ 的第 i 个分量，因此 $k(u_i+v_i)$ 是 $k(u+v)$ 的第 i 个分量. 由于 ku_i 和 kv_i 分别是 ku 和 kv 的第 i 个分量，因此 ku_i+kv_i 是 $ku+kv$ 的第 i 个分量. 但 k, u_i 和 v_i 都是实数，因此

$$k(u_i + v_i) - ku_i + v_i, \qquad i = 1, \cdots, n.$$

于是 $k(u+v)$ 和 $ku+kv$ 的对应分量相等，故 $k(u+v)=ku+kv$.

4.24　证明定理 4.1(vi)：$(k+k')u=ku+k'u$.

证　☞ 根据定义，$(k+k')u_i$ 是 $(k+k')u$ 的第 i 个分量. 由于 ku_i 和 $k'u_i$ 分别是 ku 和 $k'u$ 的第 i 个分量，因此 $ku_i+k'u_i$ 是 $ku+k'u$ 的第 i 个分量. 但 k, k' 和 u_i 都是实数，因此

$$(k + k')u_i = ku_i + k'u_i, \qquad i = 1, \cdots, n.$$

于是 $(k+k')u$ 和 $ku+k'u$ 的对应分量相等，从而 $(k+k')u=ku+k'u$.

4.25　证明定理 4.1(vii)：$(kk')u=k(k'u)$.

证　☞ 由于 $k'u_i$ 是 $k'u$ 的第 i 个分量，因此 $k(k'u_i)$ 是 $k(k'u)$ 的第 i 个分量. 但 $(kk')u_i$ 是 $(kk')u$ 的第 i 个分量. 并且，由于 k, k' 和 u_i 都是实数，因此

$$(kk')u_i = k(k'u_i), \qquad i = 1, \cdots, n.$$

$(kk')u$ 和 $k(k'u)$ 的对应分量相等，故 $(kk')u=k(k'u)$.

4.26　证明定理 4.1(viii)：$1u=u$.

证　☞

$$\begin{aligned} 1 \cdot u &= 1(u_1, u_2, \cdots, u_n) \\ &= (1u_1, 1u_2, \cdots, 1u_n) \\ &= (u_1, u_2, \cdots, u_n) = u. \end{aligned}$$

4.27　证明(a)对于任一向量 u，都有 $0u=\mathbf{0}$，(b)对任一实数 k，都有 $k\mathbf{0}=\mathbf{0}$. 此处 $\mathbf{0}$ = 零向量.

证　☞ (a) $0u=0(u_1,u_2,\cdots,u_n)=(0u_1,0u_2,\cdots,0u_n)=(0,0,\cdots,0)=\mathbf{0}$.

(b) $k\mathbf{0}=k(0,0,\cdots,0)=(k\cdot0,k\cdot0,\cdots,k\cdot0)=(0,0,\cdots,0)=\mathbf{0}$.

4.28　证明 $(-1)u=-u$.

证　☞ 从前面证明的性质，有

$$u + (-u) = 0 = 0u = (1 + (-1))u = 1u + (-1)u = u + (-1)u,$$

即有

$$u + (-1)u = 0.$$

上式两边加上 $-u$ 便得 $(-1)u=-u$.

点乘(内)积和范数

这一小节考虑下面的向量运算：

点乘(内)积：$u \cdot v = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$,

范数(长度)：$\| u \| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$,

其中 $u=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 和 $v=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的向量.

4.29　计算 $u\cdot v$，其中(a) $u=(2,-3,6)$, $v=(8,2,-3)$；(b) $u=(1,-8,0,5)$, $v=(3,6,4)$.

解　☞ (a)对应分量相乘和相加：

$$u \cdot v = (2)(8) + (-3)(2) + (6)(-3) = 16 - 6 - 18 = -8.$$

(b)在分量数目不同的向量之间点乘积是没有定义的.

4.30　计算 $u\cdot v$，其中(a) $u=(3,-5,2,1)$, $v=(4,1,-2,5)$；(b) $u=(1,-2,3,-4)$, $v=(6,7,1,-2)$.

解 ☞ 对应分量相乘和相加.

(a)$u \cdot v = 3 \times 4 + (-5) \times 1 + 2 \times (-2) + 1 \times 5 = 12 - 5 - 4 + 5 = 8$.

(b)$u \cdot v = 6 - 14 + 3 + 8 = 3$.

4.31 设 $u = (2, -7, 1)$, $v = (-3, 0, 4)$, $w(0, 5, -8)$. 求(a)$u \cdot v$, (b)$u \cdot w$, (c)$v \cdot w$.

解 ☞ 对应分量相乘然后相加.

(a)$u \cdot v = 2 \cdot (-3) + (-7) \cdot 0 + 1 \cdot 4 = -6 + 0 + 4 = 2$.

(b)$u \cdot w = 0 - 35 - 8 = -43$.

(c)$v \cdot w = 0 + 0 - 32 = -32$.

4.32 设 $u = (3, 2, 1)$, $v = (5, -3, 4)$, $w = (1, 6, -7)$. 求(a)$(u + v) \cdot w$, (b)$u \cdot w + v \cdot w$.

解 ☞ (a)首先由对应分量相加计算 $u + v$:

$$u + v = (3 + 5, 2 - 3, 1 + 4) = (8, -1, 5).$$

然后计算

$$(u + v) \cdot w = 8 \times 1 + (-1) \times 6 + 5 \times (-7) = 8 - 6 - 35 = -33.$$

(b)首先计算 $u \cdot w = 3 + 12 - 7 = 8$ 和 $v \cdot w = 5 - 18 - 28 = -41$. 于是

$$u \cdot w + v \cdot w = 8 - 41 = -33.$$

注意:不出定理4.2(i)所料,二者相等.

4.33 设 $u = (1, 2, 3, -4)$, $v = (5, -6, 7, 8)$, $k = 3$. 求(a)$k(u \cdot v)$;(b)$(ku) \cdot v$;(c)$u \cdot (kv)$.

解 ☞ (a)先求得 $u \cdot v = 5 - 12 + 21 - 32 = -18$. 于是

$$k(u \cdot v) = 3 \times (-8) = -54.$$

(b)先求得 $ku = (3(1), 3(2), 3(3), 3(-4)) = (3, 6, 9, -12)$. 于是

$$\begin{aligned}(ku) \cdot v &= 3 \times 5 + 6 \times (-6) + 9 \times 7 + (-12) \times 8 \\ &= 15 - 36 + 63 - 96 = -54.\end{aligned}$$

(c)先求得 $kv = (15, -18, 21, 24)$. 于是

$$\begin{aligned}u \cdot (kv) &= 1 \times 15 + 2 \times (-18) + 3 \times 21 + (-4) \times 24 \\ &= 15 - 36 + 63 - 96 = -54.\end{aligned}$$

注意:正如定理4.2(ii)和(iii)所料,所有三个值相等.

4.34 求(a) $\|u\|$, 设 $u = (3, -12, -4)$;(b) $\|v\|$, 设 $v = (2, -3, 8, -5)$.

解 ☞ (a)先由 u 的分量的平方和求 $\|u\|^2 = u \cdot u$:

$$\|u\|^2 = 3^2 + (-12)^2 + (-4)^2 = 9 + 144 + 16 = 169.$$

因此 $\|u\| = \sqrt{169} = 13$.

(b)v 的各分量平方然后相加得 $\|v\|^2 = v \cdot v$:

$$\|v\|^2 = 2^2 + (-3)^2 + 8^2 + (-5)^2 = 4 + 9 + 64 + 25 = 102.$$

因此 $\|v\| = \sqrt{102}$.

4.35 设 $w = (-3, 1, -2, 4, -5)$, 求 $\|w\|$.

解 ☞ 我们有 $\|w\|^2 = 9 + 1 + 4 + 16 + 25 = 55$, 因此 $\|w\| = \sqrt{55}$.

4.36 求 k 使得 $\|u\| = \sqrt{39}$, 此处 $u = (1, k, -2, 5)$.

解 ☞ $\|u\|^2 = 1^2 + k^2 + (-2)^2 + 5^2 = k^2 + 30$. 现在解 $k^2 + 30 = 39$ 得 $k = 3, -3$.

4.37 设 v 是一个非零向量. 证明 $\hat{v} = \frac{1}{\|v\|} v = \frac{v}{\|v\|}$ 是与 v 有相同方向的一个单位向量. (求 $\hat{v}$ 的过程称为将 v **规格化**.)

解 ☞ 由于

$$\hat{v} \cdot \hat{v} = \left(\frac{v}{\|v\|}\right) \cdot \left(\frac{v}{\|v\|}\right) = \left(\frac{1}{\|v\|^2}\right)(v \cdot v) = \frac{1}{\|v\|^2}\|v\|^2 = 1,$$

因此 $\hat{v}$ 是一个单位向量. 而且, 由于 $\hat{v}$ 是 v 的一个正数倍, 因此 $\hat{v}$ 和 v 的方向相同.

4.38 规格化:(a)$v = (12, -3, -4)$;(b)$w = (4, -2, -3, 8)$.

解 ☞ (a)先求得

$$\|v\|^2 = v\cdot v = 12^2+(-3)^2+(-4)^2 = 144+9+6 = 169.$$

于是,用 $\|v\| = \sqrt{169} = 13$ 除 v 的每个分量得

$$\hat{v} = \frac{v}{\|v\|} = \left(\frac{12}{13},\frac{-3}{13},\frac{-4}{13}\right).$$

(b)先求得

$$\|w\|^2 = w\cdot w = 4^2+(-2)^2+(-3)^2+8^2 = 16+4+9+64 = 93.$$

于是 w 的各个分量除以 $\|w\| = \sqrt{93}$ 得

$$\hat{w} = \frac{w}{\|w\|} = \left(\frac{4}{\sqrt{93}},\frac{-2}{\sqrt{93}},\frac{-3}{\sqrt{93}},\frac{8}{\sqrt{93}}\right).$$

4.39 将 $v=(1/2,2/3,-1/4)$规格化.

解 ☞ 注意 v 和 v 的任一正数倍有相同的规格化形式.因此,先用 12 乘 v 以"清除"分母:$12v=(6,8,-3)$.于是

$$\|12v\|^2 = 36+64+9 = 109$$

以及

$$\hat{v} = \widehat{12v} = \frac{12v}{\|12v\|} = \left(\frac{6}{\sqrt{109}},\frac{8}{\sqrt{109}},\frac{-3}{\sqrt{109}}\right).$$

4.40 设 $u=(2,-7,1)$, $v=(-3,0,4)$, $w=(0,5,-8)$.求(a) $\|u\|$;(b) $\|v\|$;(c) $\|w\|$.

解 ☞ (a) $\|u\| = \sqrt{2^2+(-7)^2+1^2} = \sqrt{4+49+1} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$.

(b) $\|v\| = \sqrt{9+0+16} = \sqrt{25} = 5$.

(c) $\|w\| = \sqrt{0+25+64} = \sqrt{89}$.

4.41 定义 $\mathbf{R}^n$ 中的正交向量.

解 ☞ 设 u 和 v 是 $\mathbf{R}^n$ 的向量.若它们的点乘积是零,即若 $u\cdot v=0$,则称 u 和 v 是**正交的**(或**垂直的**).(注意,在物理中,$\mathbf{R}^3$ 的两个非零向量 u 和 v 的点乘积定义为 $u\cdot v=|u||v|\cos\theta$.其中 θ 是 u 和 v 之间的角度.当两个向量互相垂直时,$\theta=90°$,因此 $u\cdot v=0$,这与上面的陈述一致.)

4.42 设 $u=(5,4,1)$, $v=(3,-4,1)$, $w=(1,-2,3)$.哪些向量是正交的?

解 ☞ 求每对向量的点乘积:

$$u\cdot v = 15-16+1 = 0,\qquad v\cdot w = 3+8-3 = 14,$$
$$u\cdot w = 5-8+3 = 0.$$

因此 u 和 v 是正交的,u 和 w 是正交的,但 v 和 w 不是正交的.

4.43 求 k 使得向量 u 和 v 是正交的,此处

(a) $u=(1,k,-3)$和 $v=(2,-5,4)$;

(b) $u=(2,3k,-4,1,5)$和 $v=(6,-1,3,7,2k)$.

解 ☞ 在每种情形中,计算 $u\cdot v$,令它等于 0,再解出 k.

(a) $u\cdot v=(1)(2)+(k)(-5)+(-3)(4)=2-5k-12=0$,即 $-5k-10=0$.解之,得 $k=-2$.

(b) $u\cdot v=12-3k-12+7+10k=7k-7=0$.解之,得 $k=-1$.

求和符号,定理和证明.

4.44 设 $f(k)$是含有一个整数变量 k 的一个代数式.

(a)定义表达式 $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$,此处 $n\geqslant 1$.(这里,1 称为**下限**,n 称为**上限**,希腊字母 $\sum$ 作**求和符号**用.)

(b)设 n_1 和 n_2 是任两个整数使得 $n_1\leqslant n_2$.定义 $\sum_{k=n_1}^{n_2} f(k)$.

解 ☞ (a)

$$S_n = f(1) + f(2) \cdots + f(n-1) + f(n).$$

从这个定义我们看到，对于 $n \geqslant 2$，

$$S_n = S_{n-1} + f(n).$$

(b)

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} f(k) = f(n_1) + f(n_1+1) + f(n_1+2) + \cdots + f(n_2).$$

对于 $n_2 \leqslant n_1$，通常，该和定义为零.

4.45 求(a) $\sum_{k=1}^{4} k^3$；(b) $\sum_{j=2}^{5} j^2$；(c) $\sum_{k=1}^{5} x_k$.

解 ☞ (a) $\sum_{k=1}^{4} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100.$

(b) $\sum_{j=2}^{5} j^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 4 + 9 + 16 + 25 = 54.$

(c) $\sum_{k=1}^{5} x_k = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5.$

4.46 用求和记号重新表示：

(a) $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$；

(b) $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$；

(c) $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$.

解 ☞ (a) $\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$,　(b) $\sum_{i=0}^{n} a_ix^i$,　(c) $\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$.

4.47 证明：$\sum_{k=1}^{n}[f(k) + g(k)] = \sum_{k=1}^{n} f(k) + \sum_{k=1}^{n} g(k)$.

证 ☞ 对 n 用归纳法证明.对于 $n = 1$,

$$\sum_{k=1}^{1}[f(k) + g(k)] = f(1) + g(1) = \sum_{k=1}^{1} f(k) + \sum_{k=1}^{1} g(k).$$

设 $n > 1$，并且对 $n-1$ 定理成立，即

$$\sum_{k=1}^{n-1}[f(k) + g(k)] = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \sum_{k=1}^{n-1} g(k).$$

于是(见习题 4.44(a))，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}[f(k) + g(k)] &= \sum_{k=1}^{n-1}[f(k) + g(k)] + [f(n) + g(n)] \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \sum_{k=1}^{n-1} g(k) + f(n) + g(n) \\ &= \left[\sum_{k=1}^{n-1} f(k) + f(n)\right] + \left[\sum_{k=1}^{n-1} g(k) + g(n)\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(k) + \sum_{k=1}^{n} g(k).\end{aligned}$$

定理得证.

4.48 证明：$\sum_{k=1}^{n} cf(k) = c\sum_{k=1}^{n} f(k)$.

证 ☞ 该证明直接从实数的分配律

$$a(b + c + \cdots) = ab + ac + \cdots$$

得到.

定理 4.2　对于 $\mathbf{R}^n$ 的任意向量 $u = (u_i)$，$v = (v_i)$ 和 $w = (w_i)$，以及 $\mathbf{R}$ 的任一数 k：

(i) $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$,

(ii) $(ku) \cdot v = k(u \cdot v)$,

(iii) $u \cdot v = v \cdot u$,

(iv) $u \cdot u \geqslant 0$, 并且 $u \cdot u = 0$ 当且仅当 $u = 0$.

4.49　证明定理 4.2(i): $(u+v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$.

证　☞ 应用习题4.47,

$$(u+w)\cdot w = \sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i)w_i = \sum_{i=1}^{n}(u_iw_i+v_iw_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}u_iw_i + \sum_{i=1}^{n}v_iw_i = u\cdot w + v\cdot w.$$

4.50　证明定理 4.2(ii): $(ku)\cdot v = k(u\cdot v)$.

证　☞ 应用习题4.48,

$$(ku)\cdot v = \sum_{i=1}^{n}(ku_i)v_i = \sum_{i=1}^{n}k(u_iv_i)$$

$$= k\sum_{i=1}^{n}u_iv_i = k(u\cdot v).$$

4.51　证明定理 4.2(iii): $u\cdot v = v\cdot u$.

证　☞

$$u\cdot v = \sum_{i=1}^{n}u_iv_i = \sum_{i=1}^{n}v_iu_i = v\cdot u.$$

4.52　证明定理 4.2(iv): $u\cdot u \geqslant 0$, 并且 $u\cdot u = 0$ iff $u = 0$.

证　☞ 因为对于每一个 i, u_i^2 是非负的, 因此 $u\cdot u = u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2 \geqslant 0$. 并且, $u\cdot u = 0$ 当且仅当对每一个 i, $u_i = 0$, 即当且仅当 $u = 0$.

定理 4.3(柯西-施瓦兹(Cauchy-Schwarz)不等式)　对于 $\mathbf{R}^n$ 的任意向量 u 和 v, $|u\cdot v| \leqslant \|u\|\|v\|$.

4.53　证明定理 4.3.

证　☞ 我们将证明下面更强的陈述:

$$|u\cdot v| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|u_iv_i| \leqslant \|u\|\|v\|.$$

首先, 若 $u = 0$ 或 $v = 0$, 则不等式归结为 $0\leqslant 0\leqslant 0$, 从而结论成立. 因此, 我们只要考虑 $u\neq 0$ 且 $v\neq 0$ 的情形, 即此时 $\|u\|\neq 0$, 且 $\|v\|\neq 0$. 而且, 由于

$$|u\cdot v| = \left|\sum_{i=1}^{n}u_iv_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|u_iv_i|,$$

我们只须证明第二个不等式.

现在, 对于任何实数 $x, y\in\mathbf{R}$, 有

$$0 \leqslant (x-y)^2 = x^2 - 2x + y^2$$

或等价地,

$$2xy \leqslant x^2 + y^2. \tag{1}$$

在(1)中令 $x = |u_i|/\|u\|$ 和 $y = |v_i|/\|v\|$ 得到, 对任一 i,

$$2\frac{|u_i|}{\|u\|}\frac{|v_i|}{\|v\|} \leqslant \frac{|u_i|^2}{\|u\|^2} + \frac{|v_i|^2}{\|v\|^2}. \tag{2}$$

根据向量范数的定义, $\|u\|^2 = \sum u_i^2 = \sum|u_i|^2$, $\|v\|^2 = \sum v_i^2 = \sum|v_i|^2$. 于是, (2)对 i 求和并利用 $|u_iv_i| = |u_i||v_i|$, 我们有

$$2\frac{\sum|u_iv_i|}{\|u\|\|v\|} \leqslant \frac{\sum|u_i|^2}{\|u\|^2} + \frac{\sum|v_i|^2}{\|v\|^2} = \frac{\|u\|^2}{\|u\|^2} + \frac{\|v\|^2}{\|v\|^2} = 2,$$

从而

$$\frac{\sum|u_iv_i|}{\|u\|\|v\|} \leqslant 1.$$

用 $\|u\|\|v\|$ 乘上式两端, 我们得到所要求的不等式.

定理 4.4(闵可夫斯基(Minkowski)不等式)　对 $\mathbf{R}^n$ 的任意两个向量 u 和 v, $\|u+v\| \leqslant \|u\|+\|v\|$.

4.54　证明定理 4.4.

证　☞ 由柯西-施瓦兹不等式和内积的其他性质,

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= (u+v)\cdot(u+v) = u\cdot u + 2(u\cdot v) + v\cdot v \\ &\leqslant \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2.\end{aligned}$$

上式两端开方便得所要求的不等式.

4.55　证明 $\mathbf{R}^n$ 中的范数满足下面的定律:

$[N_1]$:对于任一向量 u, $\|u\| \geqslant 0$, 且 $\|u\| = 0$ 当且仅当 $u=0$.

$[N_2]$:对于任一向量 u 和任一实数 k, $\|ku\| = |k|\|u\|$.

$[N_3]$:对于任二向量 u 和 v, $\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.

证　☞ $[N_1]$由定理 4.2(iv)以及 $\|u\| = \sqrt{u\cdot u}$ 这一事实得到.$[N_3]$是闵可夫斯基不等式,因此我们只须证明$[N_2]$成立.假设 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$,则 $ku=(ku_1,ku_2,\cdots,ku_n)$.于是

$$\begin{aligned}\|ku\|^2 &= (ku_1)^2 + (ku_2)^2 + \cdots + (ku_n)^2 \\ &= k^2(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2) = k^2\|u\|^2.\end{aligned}$$

上式两端取平方根得到$[N_2]$.

4.2　矩阵、矩阵加法和数乘

这一章,我们用大写字母 $A,B,C,\cdots$表示矩阵,小写字母 $a,b,c,x,y,\cdots$表示数.除非特别申明,所考虑的数是实数.换句话说,所考虑的矩阵将是 $\mathbf{R}$ 上的矩阵.

4.56　设 A 是任意的一个矩阵(长方形数组),比方说

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

(a)什么是 A 的行和列?(b)什么是 A 的大小?(c)两个矩阵何时相等?

解　☞ (a)m 个水平 n 元组

$$(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}),(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n}),\cdots,(a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mn})$$

称为 A 的**行**以及 n 个垂直 m 元组

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 A 的**列**.

(b)由于 A 有 m 行和 n 列,因此我们说它是一个 m 行 n 列矩阵,或 $m\times n$ 矩阵.数偶 m 和 n 称为矩阵的**大小**.

(c)若两个矩阵 A 和 B 的大小相同并且它们的对应元素相等,则 A 与 B 相等,记作 $A=B$.

4.57　记号 $A=(a_{ij})$用来表示习题 4.56 的矩阵(或者,在 A 的大小不明确时,表示成 $A=(a_{ij})_{m\times n}$).第一个下标 i 和第二个下标 j 是什么含义?

解　☞ 数 a_{ij}是矩阵 A 的 i 行和 j 列元素,于是第一个下标告诉我们该元素所在的行,第二个下标告诉我们该元素所在的列.

4.58　求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

的行、列和大小.

解 ☞ A 的行是水平数线,有两行,它们是(1,2,3)和(4,5,6).A 的列是垂直数线,有三列,它们是

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}.$$

A 的大小是 2×3,表示 A 的行数和列数.

4.59 下列矩阵中哪些是相等的?

$$A=\begin{pmatrix}4&1\\2&3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&3\\4&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}4&2\\1&3\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}4&1\\3&2\end{pmatrix},E=\begin{pmatrix}2&3\\4&1\end{pmatrix}.$$

解 ☞ 虽然所有 5 个矩阵有相同大小并且含有数 1,2,3,4,但是只有 B 和 E 含有相等的对应元素.因此只有 $B=E$.

4.60 设

$$\begin{pmatrix}x+y&2z+w\\x-y&z-w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5\\1&4\end{pmatrix}.$$

求 x,y,z,w.

解 ☞ 由对应元素相等得方程组

$$x+y=3,x-y=1,2z+w=5,z-w=4.$$

该方程组的解是 $x=2,y=1,z=3,w=-1$.

4.61 $m\times n$ 零矩阵用 $\mathbf{0}_{m\times n}$或简单地用 $\mathbf{0}$ 表示,它是所有元素都是零的矩阵.写出 2×2,2×3 和 1×4 零矩阵.

解 ☞ 只要令各个元素为 0:

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},(0,0,0,0).$$

4.62 一个 $m\times n$ 矩阵$A=(a_{ij})$的负矩阵是 $m\times n$ 矩阵$-A=(-a_{ij})$.求

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&4&7\\2&-5&0&-8\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&-3\\-6&1\end{pmatrix}$$

的负矩阵.

解 ☞ 各个元素取负的:

$$-A=\begin{pmatrix}-1&-(-3)&-4&-7\\-2&-(-5)&-0&-(-8)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3&-4&-7\\-2&5&0&8\end{pmatrix},-B=\begin{pmatrix}-2&3\\6&-1\end{pmatrix}.$$

4.63 只有一行的矩阵 A 称为**行矩阵**或**行向量**并且常常表示成$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.因它的元素的第一下标必为 1,因此我们略去它.类似地,只有一列的矩阵 B 称为**列矩阵**或**列向量**并且常常表示成

$$B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

(这里,因第二个下标必为 1,因此我们还是略去它).讨论 $u=(1,2,3)$和

$$v=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

之间有何不同.

解 ☞ 把它们视为 $\mathbf{R}^3$ 中的向量,可以考虑 u 和 v 是相同的.但是,若作为矩阵,则因它们的大小

不同而不能相等.

矩阵加法和数乘

这一小节考虑下面的矩阵加法和数乘运算,其中 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$ 是有相同大小的矩阵以及 k 是一个数:

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

以及

$$kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

这就是说,$A+B$ 是由 A 和 B 的对应元素相加得到的矩阵,kA 是 A 的每一个元素乘 k 得到的矩阵.

4.64 求 $A+B$,此处

(a) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$;

(b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

解 ☞ (a)将 A 和 B 的对应元素相加得:

$$A+B=\begin{pmatrix} 1+3 & -2+0 & 3+2 \\ 4-7 & 5+1 & -6+8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b)由于这两个矩阵的大小不同,因此它们的和没有定义。

4.65 求 $C+D$,此处(a) $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$;

(b) $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

解 ☞ (a)将 C 和 D 的对应元素相加:

$$C+D=\begin{pmatrix} 1+1 & 2+(-1) & 3+2 \\ 4+0 & 5+3 & 6+(-5) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$C+D=\begin{pmatrix} 1+3 & 2+(-5) & (-3)+6 & 4+(-1) \\ 0+2 & (-5)+0 & 1+(-2) & (-1)+(-3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 & 3 \\ 2 & -5 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

4.66 求 $3A$ 和 $-5A$,其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

解 ☞ 用给定的数乘每个元素:

$$3A=\begin{pmatrix} 3\cdot1 & 3\cdot(-2) & 3\cdot3 \\ 3\cdot4 & 3\cdot5 & 3\cdot(-6) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 12 & 15 & -18 \end{pmatrix},$$

$$-5A=\begin{pmatrix} -5\cdot1 & -5\cdot(-2) & -5\cdot3 \\ -5\cdot4 & -5\cdot5 & -5\cdot(-6) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 10 & -15 \\ -20 & -25 & 30 \end{pmatrix}.$$

4.67 计算:

(a) $3\begin{pmatrix}2 & 4\\-3 & 1\end{pmatrix}$； (b) $-2\begin{pmatrix}1 & 7\\2 & -3\\0 & -1\end{pmatrix}$.

解 ☞ (a)

$$3\begin{pmatrix}2 & 4\\-3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 2 & 3\cdot 4\\3\cdot(-3) & 3\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 12\\-9 & 3\end{pmatrix}.$$

(b)

$$-2\begin{pmatrix}1 & 7\\2 & -3\\0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-2)\cdot 1 & (-2)\cdot 7\\(-2)\cdot 2 & (-2)\cdot(-3)\\(-2)\cdot 0 & (-2)\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -14\\-4 & 6\\0 & 2\end{pmatrix}.$$

4.68 两个大小相同的矩阵 A 和 B 的差 $A-B$ 定义为 $A-B=A+(-B)$. 设

$$A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 6\\2 & 3 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 8\\1 & -2 & -6\end{pmatrix},$$

求 $A-B$.

解 ☞

$$\begin{aligned}A-B&=A+(-B)\\&=\begin{pmatrix}4 & -5 & 6\\2 & 3 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 3 & -8\\-1 & 2 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2 & -2\\1 & 5 & 5\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

4.69 求 $2A-3B$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\4 & 5 & -6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\-7 & 1 & 8\end{pmatrix}.$$

解 ☞ 首先求矩阵的数乘然后作矩阵加法运算：

$$2A-3B=\begin{pmatrix}2 & -4 & 6\\8 & 10 & -12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-9 & 0 & -6\\21 & -3 & -24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & -4 & 0\\29 & 7 & -36\end{pmatrix}.$$

(注意，我们用 -3 乘 B 然后相加，而不用 3 乘 B 然后相减. 通常这可避免出错.)

4.70 设

$$A=\begin{pmatrix}2 & -5 & 1\\3 & 0 & -4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\0 & -1 & 5\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

求 $3A+4B-2C$.

解 ☞ 首先作数乘然后将矩阵相加：

$$\begin{aligned}3A+4B-2C&=\begin{pmatrix}6 & -15 & 3\\9 & 0 & -12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & -8 & -12\\0 & -4 & 20\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -2 & 4\\-2 & 2 & 2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}10 & -25 & -5\\7 & -2 & 10\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

4.71 求 $2A+5B$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & -5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & -3 & -6\\3 & 7 & 8\end{pmatrix}.$$

解 ☞ 虽然 $2A$ 和 $5B$ 有定义，但 $2A$ 和 $5B$ 的大小不同，因此和 $2A+5B$ 没有定义.

4.72 设

$$3\begin{pmatrix}x & y\\z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & 6\\-1 & 2t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & x+y\\z+t & 3\end{pmatrix},$$

求 x, y, z 和 t.

解 ☞ 先将每边写成一个单个矩阵：

$$\begin{pmatrix}3x & 3y\\3z & 3t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+4 & x+y+6\\z+t-1 & 2t+3\end{pmatrix}.$$

令对应元素彼此相等得到 4 个方程的方程组

$$\begin{cases}3x = x+4,\\3y = x+y+6,\\3z = z+t-1\\3t = 2t+3,\end{cases}\quad 或 \quad \begin{cases}2x = 4,\\2y = 6+x,\\2z = t-1,\\t = 3.\end{cases}$$

它的解是 $x=2, y=4, z=1, t=3$.

定理 4.5　设 **M** 是 **R** 上全体 $m\times n$ 矩阵的集合.那么,对于 **M** 中任意矩阵 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$和 $C=(c_{ij})$,以及 **R** 中的任二数 k_1, k_2,有

(i) $(A+B)+C=A+(B+C)$,

(ii) $A+0=A$,

(iii) $A+(-A)=0$,

(iv) $A+B=B+A$,

(v) $k_1(A+B)=k_1A+k_1B$,

(vi) $(k_1+k_2)A=k_1A+k_2A$,

(vii) $(k_1k_2)A=k_1(k_2A)$,

(viii) $1A=A$.

4.73　证明定理 4.5.

证　☞ 该证明可由习题 4.19～4.26 中定理 4.1 的证明直接得到,只要分别用 a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} 替代定理 4.1 的证明中的 u_i, v_i, w_i.(事实上,把定理 4.1 中的向量 u, v 和 w 视为行矩阵,定理 4.1 可以视为定理 4.5 的特殊情形.)

4.74　评述定理 4.5(vi)中两个符号 + 之间的区别.

解　☞ 左边的 + 号是 **R** 中的数相加;右边的 + 号则是 **M** 中的矩阵相加.

4.3　矩阵乘法

这一节我们考虑矩阵乘法运算.设 A 和 B 是两个矩阵使得 A 的列数等于 B 的行数,比方说 A 是一个 $m\times p$ 矩阵和 B 是一个 $p\times n$ 矩阵.那么 A 和 B 的乘积记作 AB,是一个 $m\times n$ 矩阵,它的 ij 元素是 A 的第 i 行元素与 B 的第 j 列的相应元素的乘积之和:

$$\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1p}\\ \cdot & \cdots & \cdot\\ \boxed{a_{i1} \;\cdots\; a_{ip}} & & \\ \cdot & \cdots & \cdot\\ a_{m1} & \cdots & a_{mp}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n}\\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot\\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot\\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot\\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11} & \cdots & c_{1n}\\ \cdot & \cdots & \cdot\\ \cdot & \boxed{c_{ij}} & \cdot\\ \cdot & \cdots & \cdot\\ c_{m1} & \cdots & c_{mn}\end{pmatrix},$$

此处

$$\begin{aligned}c_{ij} &= a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}\\ &= \sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}.\end{aligned}$$

特别地,具有相同元素个数的一个行矩阵和一个列矩阵的乘积是 4.1 节定义的点乘积:

$$\begin{aligned}(a_1, a_2, \cdots, a_n)\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix} &= a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\\ &= \sum_{k=1}^{n}a_kb_k.\end{aligned}$$

如果 A 的列数不等于 B 的行数,例如 A 是 $m\times p$ 矩阵而 B 是 $q\times n$ 矩阵,此处 $p\neq q$,那么乘

积 AB 是没有定义的.

4.75 计算：

(a) $(8,-4,5)\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$； (b) $(6,-1,7,5)\begin{pmatrix}4\\-9\\-3\\2\end{pmatrix}$；(c) $(3,8,-2,4)\begin{pmatrix}5\\-1\\6\end{pmatrix}$.

解 ☞ (a)对应元素相乘后相加：

$$(8,-4,5)\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}=(8)(3)+(-4)(2)+(5)(-1)$$
$$=24-8-5=11.$$

(b)对应元素相乘后相加：

$$(6,-1,7,5)\begin{pmatrix}4\\-9\\-3\\2\end{pmatrix}=24+9-21+10=22.$$

(c)由于行矩阵和列矩阵的元素数目不同，因此该乘积没有定义.

4.76 设$(r\times s)$表示有大小为 $r\times s$ 的矩阵.求下面的各乘积的大小：

(a)$(2\times3)(3\times4)$；　(b)$(4\times1)(1\times2)$；　(c)$(1\times2)(3\times1)$；

(d)$(5\times2)(2\times3)$；　(e)$(3\times4)(3\times4)$；　(f)$(2\times2)(2\times4)$.

解 ☞ 只有当 $p=q$ 时，即仅当“内层”数相等时，一个 $m\times p$ 矩阵方可用一个 $q\times n$ 矩阵右乘之.在这种情况下，乘积是一个 $m\times n$ 矩阵，即它的大小是给定顺序的“外层”数.于是，(a)2×4，(b)4×2，(c)因内层数 2 与 3 不等，因此它没有定义，(d)5×3，(e)因内层数 4 和 3 不同，因此乘积没有意义，(f)2×4.

4.77 求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\end{pmatrix}$$

和

$$B=\begin{pmatrix}2&0&-4\\3&-2&6\end{pmatrix}$$

的乘积 AB.

解 ☞ 由于 A 是2×2的且 B 是2×3的，因此 AB 是一个2×3矩阵.为了得到 AB 的第一行元素，分别用 B 的列

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$$

来(右)乘 A 的第一行(1,3)：

$$\begin{pmatrix}\boxed{1\quad 3}\\2\quad -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}2\\3\end{matrix}}&\boxed{\begin{matrix}0\\-2\end{matrix}}&\boxed{\begin{matrix}-4\\6\end{matrix}}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}(1)(2)+(3)(3)&(1)(0)+(3)(-2)&(1)(-4)+(3)(6)\\ & & \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2+9&0-6&-4+18\\ & & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&-6&14\\ & & \end{pmatrix}.$$

为了得到 AB 的第二行元素，用 B 的列分别(右)乘 A 的第二行$(2,-1)$：

$$\begin{pmatrix}1\quad 3\\\boxed{2\quad -1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}2\\3\end{matrix}}&\boxed{\begin{matrix}0\\-2\end{matrix}}&\boxed{\begin{matrix}-4\\6\end{matrix}}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -6 & 14 \\ (2)(2)+(-1)(3) & (2)(0)+(-1)(-2) & (2)(-4)+(-1)(6) \end{pmatrix}.$$

因此

$$AB = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 1 & 2 & -14 \end{pmatrix}.$$

4.78 求习题 4.77 中矩阵 A 和 B 的乘积 BA.

解 ☞ 注意到 B 是 2×3 的和 A 是 2×2 的，由于内层数 3 和 2 不相等，因此乘积 BA 没有定义.

4.79 求乘积 AB，其中

$$A = (2,1),\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

解 ☞ 由于 A 是 1×2 的和 B 是 2×3 的，因此乘积 AB 定义为一个 1×3 矩阵，或是有 3 个分量的行向量. 为得到 AB 的分量，A 的行与 B 的各列相乘：

$$AB = \left(\boxed{2,1}\right)\left(\boxed{\begin{matrix}1\\4\end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix}-2\\5\end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix}0\\-3\end{matrix}}\right)$$

$$= (2+4,\ -4+5, 0-3) = (6, 1, -3).$$

4.80 求 AB，其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix},\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

解 ☞ 现在 A 是 3×2 的和 B 是 2×3 的，因此 AB 有定义且是 3×3 矩阵. 为了得到乘积矩阵 AB 的第一行，将 A 的第一行和 B 的各列分别相乘：

$$\begin{pmatrix} \boxed{2 \quad -1} \\ 1 \quad 0 \\ -3 \quad 4 \end{pmatrix}\left(\boxed{\begin{matrix}1\\3\end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix}-2\\4\end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix}-5\\0\end{matrix}}\right) = \begin{pmatrix} 2-3 & -4-4 & -10+0 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

为得到乘积矩阵 AB 的第二行，将 A 的第二行和 B 的各列分别相乘：

$$\begin{pmatrix} 2 \quad -1 \\ \boxed{1 \quad 0} \\ -3 \quad 4 \end{pmatrix}\left(\boxed{\begin{matrix}1\\3\end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix}-2\\4\end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix}-5\\0\end{matrix}}\right) = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1+0 & -2+0 & -5+0 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ & & \end{pmatrix}.$$

为得到乘积矩阵 AB 的第三行，将 A 的第三行和 B 的各列分别相乘：

$$\begin{pmatrix} 2 \quad -1 \\ 1 \quad 0 \\ \boxed{-3 \quad 4} \end{pmatrix}\left(\boxed{\begin{matrix}1\\3\end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix}-2\\4\end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix}-5\\0\end{matrix}}\right) = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ -3+12 & 6+16 & 15+0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{pmatrix}.$$

于是

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{pmatrix}.$$

4.81　求乘积 BA，其中 A 和 B 是习题 4.80 的矩阵.

解　☞ 由于 B 是 2×3 的以及 A 是 3×2 的，因此乘积 BA 有定义且是 2×2 矩阵. 为了得到 BA 的第一行，将 B 的第一行和 A 的各列分别相乘：

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2+15 & -1+0-20 \\ & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 15 & -21 \\ & \end{pmatrix}.$$

为得到 BA 的第二行，将 B 的第二行和 A 的各列分别相乘：

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -21 \\ 6+4+0 & -3+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -21 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}.$$

于是

$$BA = \begin{pmatrix} 15 & -21 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}.$$

4.82　计算 AB，其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

解　☞ 由于 A 是 2×3 的，B 是 3×4 的，因此乘积 AB 定义为一个 2×4 矩阵. 把 A 的行和 B 的相应列相乘得到

$$AB = \begin{pmatrix} 4+3-4 & -2+9-1 & 0-15+2 & 12+3-2 \\ 8-2+20 & -4-6+5 & 0+10-10 & 24-2+10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 6 & -13 & 13 \\ 26 & -5 & 0 & 32 \end{pmatrix}.$$

4.83　求乘积 AB 的大小，其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix},\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

并且，设 $AB=(c_{ij})$，求(a)c_{23}，(b)c_{14}，(c)c_{21}，(d)c_{32}.

解　☞ 由于 A 是 2×3 的和 B 是 3×4 的，因此乘积 AB 是一个 2×4 矩阵. 而且，AB 的 ij 元素 c_{ij} 是 A 的第 i 行和 B 的第 j 列的乘积. 因此

(a) $c_{23}=(1,0,-3)\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}=(1)(0)+(0)(3)+(-3)(-2)=0+0+6=6.$

(b) $c_{14}=(2,-1,0)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}=(2)(1)+(-1)(-1)+(0)(0)=2+1+0=3.$

(c) $c_{21}=(1,0,-3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}=(1)(1)+(0)(2)+(-3)(4)=1+0-12=-11.$

(d) 由于 A 只有两行，因而 AB 只有两行，故元素 c_{32} 不存在.

4.84　求：

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$；　　(b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$；

(c) $(2,-7)\begin{pmatrix}1 & 6\\ -3 & 5\end{pmatrix}$；　(d) $\begin{pmatrix}1 & 6\\ -3 & 5\end{pmatrix}(2,-7)$.

解 ☞ (a)第一个因子是 2×2 的，而第二个因子是 2×1 的，因此乘积定义为一个 2×1 矩阵：

$$\begin{pmatrix}1 & 6\\ -3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-42\\ -6-35\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-40\\ -41\end{pmatrix}.$$

(b)由于第一个因子是 2×1 的，而第二个因子是 2×2 的，因此它们的乘积没有定义.

(c)第一个因子是 1×2 的，而第二个是 2×2 的，因此乘积定义为一个 1×2(行)矩阵：

$$(2,-7)\begin{pmatrix}1 & 6\\ 3 & 5\end{pmatrix}=(2+21,12-35)=(23,-23).$$

(d)由于第一个因子是 2×2 的，而第二个因子是 1×2 的，因此乘积没有定义.

4.85 设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，此处 $m>1$ 和 $n>1$. 假设 u 和 v 是两个向量，讨论在什么条件下，(a) Au 和 (b) vA 有定义.

解 ☞ (a)只有当 u 是一个有 n 个分量的列向量，即 $n\times 1$ 矩阵时，乘积 Au 有定义. 在此情况下，Au 是一个有 m 个分量的列向量.

(b)只有当 v 是一个有 m 个分量的行向量，即 $1\times m$ 矩阵时，乘积 vA 有定义. 在此情况下，vA 是一个有 n 个分量的行向量.

4.86 计算：

(a) $\begin{pmatrix}2\\ 3\\ -1\end{pmatrix}(6,-4,5)$；　(b) $(6,-4,5)\begin{pmatrix}2\\ 3\\ -1\end{pmatrix}$.

解 ☞ (a)第一个因子是 3×1 的，而第二个因子是 1×3 的，因此乘积定义为一个 3×3 矩阵：

$$\begin{pmatrix}2\\ 3\\ -1\end{pmatrix}(6,-4,5)=\begin{pmatrix}(2)(6) & (2)(-4) & (2)(5)\\ (3)(6) & (3)(-4) & (3)(5)\\ (-1)(6) & (-1)(-4) & (-1)(5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & -8 & 10\\ 18 & -12 & 15\\ -6 & 4 & -5\end{pmatrix}.$$

(b)第一个因子是 1×3 的，而第二个因子是 3×1 的，因此乘积定义为一个 1×1 矩阵，在此，我们通常写成一个数：

$$(6,-4,5)\begin{pmatrix}2\\ 3\\ -1\end{pmatrix}=(12-12-5)=(-5)=-5.$$

4.87 试举出两个矩阵 A 和 B，使得 AB 和 BA 都有定义并且有相同的大小，但 $AB\neq BA$.

解 ☞ 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 6\\ -3 & 5\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix},$$

则

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 6\\ -3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+12 & 0-6\\ -12+10 & 0-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & -6\\ -2 & -5\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 6\\ -3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+0 & 24+0\\ 2+3 & 12-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 24\\ 5 & 7\end{pmatrix}.$$

矩阵乘法不满足交换律.

4.88 显然 $0A=0$(这里两个零矩阵或许大小不同)且 $A0=0$. 说明我们有 $A\neq 0$, $B\neq 0$，但 $AB=0$.

解 ☞ 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}6 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix},$$

则

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 2\\ -3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-6 & 2-2\\ 12-12 & 4-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

(换句话说,矩阵乘法有零因子.)

习题 4.89~4.92 建立下面的定理,在此我们假设所有的乘积都是有定义的.

定理 4.6　设 A,B,C 是矩阵,k 是一个数.那么

(i) $(AB)C=A(BC)$;　　(结合律)

(ii) $A(B+C)=AB+AC$;　　(左分配律)

(iii) $(B+C)A=BA+CA$;　　(右分配律)

(iv) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$.

4.89　证明定理 4.6(i):$(AB)C=A(BC)$.

证　☞ 设 $A=(a_{ij}),B=(b_{jk}),C=(c_{kl})$.并且,设 $AB=S=(s_{ik}),BC=T=(t_{jl})$.那么

$$s_{ik}=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}b_{jk},\qquad t_{jl}=\sum_{k=1}^{n}b_{jk}c_{kl}.$$

现在用 C(右)乘 S,即用 C(右)乘(AB),矩阵$(AB)C$ 的第 i 行和第 l 列元素是

$$\sum_{k=1}^{n}s_{ik}c_{kl}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_{ij}b_{jk})c_{kl}.$$

另一方面,用 T(右)乘 A,即用 BC(右)乘 A,矩阵 $A(BC)$的第 i 行和第 l 列元素是

$$\sum_{j=1}^{m}a_{ij}t_{jl}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{ij}(b_{jk}c_{kl}).$$

由数域中的结合律推得这两个双重和是相等的.这就证得(i).

4.90　证明定理 4.6(ii):$A(B+C)=AB+AC$.

证　☞ 设 $A=(a_{ik}),B=(b_{kj}),C=(c_{kj})$.(由于 AB 和 AC 都是有定义的,我们对 A 的列标以及 B 和 C 的行标使用相同的 k.)设 $D=B+C=(d_{kj}),E=AB=(e_{ij}),F=AC=(f_{ij})$.那么

$$d_{kj}=b_{kj}+c_{kj},\quad e_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj},\quad f_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}c_{kj}.$$

于是,矩阵 $AB+AC$ 的 ij 元素是

$$e_{ij}+f_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=1}^{p}a_{ik}c_{kj}=\sum_{k=1}^{p}(a_{ik}b_{kj}+a_{ik}c_{kj}).\tag{1}$$

另一方面,矩阵 $AD=A(B+C)$的 ij 元素是

$$\sum_{k=1}^{p}a_{ik}d_{kj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}).\tag{2}$$

由数域中的分配律知(1)和(2)的右端相等.这就证得(ii).

4.91　证明定理 4.6(iii):$(B+C)A=BA+CA$.

证　☞ 这个证明如同习题 4.90 的证明.(在数域中左乘和右乘之间没有区别.)

4.92　证明定理 4.6(iv):$k(AB)=(kA)B=A(kB)$.

证　☞

$$k\left(\sum_{r}a_{ir}b_{rj}\right)=\left(\sum_{r}(ka_{ir}\right)b_{rj}=\sum_{r}a_{ir}(kb_{rj}).$$

4.4　矩阵的转置

这一节考虑矩阵的转置运算,此处,一个矩阵 A 的**转置**,记作 A^T,它是依次将 A 的行写成列(列写成行)得到的:

$$\begin{pmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\\b_1&b_2&\cdots&b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_1&c_2&\cdots&c_n\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}a_1&b_1&\cdots&c_1\\a_2&b_2&\cdots&c_2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_n&b_n&\cdots&c_n\end{pmatrix}.$$

换句话说,若 $A=(a_{ij})$是一个 $m\times n$ 矩阵,则 $A^T=(a_{ij}^T)$是 $n\times m$ 矩阵,此处 $a_{ij}^T=a_{ji}$(对所有的 i 和 j).

4.93 已知

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 6 & -7 & -8\end{pmatrix},$$

求 A^T 和 $(A^T)^T$.

解 ☞ 重新将 A 的行写成列得到 A^T，然后将 A^T 的行写成列得到 $(A^T)^T$：

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 3 & -7\\ 5 & -8\end{pmatrix},(A^T)^T=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 6 & -7 & -8\end{pmatrix}.$$

（不出所料，见定理 4.7(ii)，$(A^T)^T=A$.）

4.94 将

$$\text{(a)}\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1\end{pmatrix};\text{(b)}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -4 & -4 & -4\\ 5 & 6 & 7\end{pmatrix}$$

转置.

解 ☞ 在(a)中重新把行写成列，在(b)中把列写成行：

$$\text{(a)}\begin{pmatrix}a_1 & a_4\\ a_2 & a_3\\ a_3 & a_2\\ a_4 & a_1\end{pmatrix},\quad \text{(b)}\begin{pmatrix}1 & -4 & 5\\ 2 & -4 & 6\\ 3 & -4 & 7\end{pmatrix}.$$

4.95 就行向量 $u=(2,4)$，$v=(1,3,5)$，$w=(6,6,6)$. 求 u^T，v^T 和 w^T.

解 ☞ 一个行向量的转置是一个列向量：

$$u^T=\begin{pmatrix}2\\ 4\end{pmatrix},\quad v^T=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 5\end{pmatrix},w^T=\begin{pmatrix}6\\ 6\\ 6\end{pmatrix}.$$

4.96 求列向量

$$u=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},\quad v=\begin{pmatrix}2\\ 4\\ 6\end{pmatrix},w=\begin{pmatrix}-5\\ -6\\ 7\end{pmatrix}$$

的转置.

解 ☞ 一个列向量的转置将是一个行向量：

$$u^T=(1,1),\quad v^T=(2,4,6),\quad w^T=(-5,-6,7).$$

4.97 证明：对于任一矩阵 A，矩阵 AA^T 和 A^TA 都是有定义的.

证 ☞ 设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，则 A^T 是一个 $n\times m$ 矩阵. 因此 AA^T 定义为一个 $m\times m$ 矩阵，以及 A^TA 定义为一个 $n\times n$ 矩阵.

4.98 求 AA^T 和 A^TA，其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 4\end{pmatrix}.$$

解 ☞ 重新将 A 的行写成列得到 A^T：

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\\ 0 & 4\end{pmatrix}.$$

因此

$$AA^T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 26\end{pmatrix},$$

$$A^TA=\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\3&-1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+9&2-3&0+12\\2-3&4+1&0-4\\0+12&0-4&0+16\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}10&-1&12\\-1&5&-4\\12&-4&16\end{pmatrix}.$$

4.99 已知

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&-4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}5&0\\-6&7\end{pmatrix},$$

求$(AB)^T$.

解 ☞

$$AB=\begin{pmatrix}5-12&0+14\\15+24&0-28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&14\\39&-28\end{pmatrix},$$

因此

$$(AB)^T=\begin{pmatrix}-7&39\\14&-28\end{pmatrix}.$$

4.100 就习题 4.99 的矩阵求 A^TB^T.

解 ☞ 我们有

$$A^T=\begin{pmatrix}1&3\\2&-4\end{pmatrix},\qquad B^T=\begin{pmatrix}5&-6\\0&7\end{pmatrix}.$$

因此

$$A^TB^T=\begin{pmatrix}5+0&-6+21\\10+0&-12-28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&15\\10&-40\end{pmatrix}.$$

注意，$(AB)^T\neq A^TB^T$.

4.101 就习题 4.99 的矩阵求 B^TA^T.

解 ☞

$$B^TA^T=\begin{pmatrix}5&-6\\0&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-12&15+24\\0+14&0-28\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-7&39\\14&-28\end{pmatrix}.$$

（正如所料，见定理 4.7(iv)，$(AB)^T=B^TA^T$.）

定理 4.7 矩阵的转置运算满足：

(i) $(A+B)^T=A^T+B^T$;

(ii) $(A^T)^T=A$;

(iii) $(kA)^T=kA^T$（k 为一个数）;

(iv) $(AB)^T=B^TA^T$.

4.102 证明定理 4.7(i)：$(A+B)^T=A^T+B^T$.

证 ☞ 设 $A=(a_{ij})$和 $B=(b_{ij})$，则 $a_{ij}+b_{ij}$是 $A+B$ 的 ij 元素，因 $a_{ij}+b_{ij}$是$(A+B)^T$ 的 ji 元素.另一方面，a_{ij}是 A^T 的 ji 元素，b_{ij}是 B^T 的 ji 元素，因此 $a_{ij}+b_{ij}$是 A^T+B^T 的 ji 元素.于是，由于$(A+B)^T$ 和 A^T+B^T 的对应元素相等，故$(A+B)^T=A^T+B^T$.

4.103 证明定理 4.7(ii)：$(A^T)^T=A$.

证 ☞ 设 $A=(a_{ij})$，$A^T=(b_{ij})$，$(A^T)^T=(c_{ij})$.那么，对每一个 i 和 j，我们有 $b_{ij}=a_{ji}$且 $c_{ij}=b_{ji}=a_{ij}$.于是，由于$(A^T)^T$ 和 A 的对应元素相等，故$(A^T)^T=A$.（换句话说，行和列的一个二重交换等价于不交换.）

4.104 证明定理 4.7(iii)：$(kA)^T=kA^T$，此处 k 是一个数.

证 ☞ 设 $A=(a_{ij})$，则 ka_{ij} 是 kA 的 ij 元素，因此 ka_{ij} 是 $(kA)^T$ 的 ji 元素．另一方面，a_{ij} 是 A^T 的 ji 元素，因而 ka_{ij} 是 kA^T 的 ji 元素．于是，由于 $(kA)^T$ 和 kA^T 的对应元素相等，故 $(kA)^T=kA^T$．

4.105 证明定理 4.7(iv)：$(AB)^T=B^TA^T$．

证 ☞ 设 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{kj})$，则 AB 的 ij 元素是

$$a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{im}b_{mj}. \tag{1}$$

因此(1)是 $(AB)^T$ 的 ji 元素．

另一方面，B 的第 j 列变成 B^T 的第 j 行，A 的第 i 行成为 A^T 的第 i 列．因此 B^TA^T 的 ji 元素是

$$(b_{1j},b_{2j},\cdots,b_{mj})\begin{pmatrix}a_{i1}\\a_{i2}\\\vdots\\a_{im}\end{pmatrix}=b_{1j}a_{i1}+b_{2j}a_{i2}+\cdots+b_{mj}a_{im}.$$

于是，由于 $(AB)^T$ 和 B^TA^T 的对应元素相等，故有 $(AB)^T=B^TA^T$．

4.5 方阵

这一节研究**方阵**，即有相同的行数和列数 n 的矩阵，说这样的矩阵是 **n 阶**的并且称它为 **n 阶方阵**．一个方阵 $A=(a_{ij})$ 的**(主)对角线**是由数 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 组成的，并且 A 的**迹**，记作 $\mathrm{tr}(A)$ 是它的对角元素之和．

注 1 所有 n 阶方阵的集合 M_n 关于矩阵的加法，数乘，矩阵乘法和转置运算是封闭的．这就是说，n 阶方阵的和，数乘积，乘积和转置还是 n 阶方阵．

注 2 主对角线上元素都是 1，其他元素均为 0 的 n 阶方阵称为**单位阵**，用 I 表示．单位阵 I 在矩阵乘法运算中起的作用如同数 1 在通常数的乘法中所起的作用．具体地说，对于任一方阵 A 都有

$$AI=IA.$$

注 3 我们形成一个方阵 A 的幂，定义为

$$A^2=AA,A^3=A^2A,\cdots,$$

以及 $A^0=I$．我们还可形成 A 的多项式．这就是说，对于任一多项式

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n,$$

我们定义 $f(A)$ 为矩阵

$$f(A)=a_0I+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_nA^n.$$

在 $f(A)$ 是一个零矩阵的情形，我们则说 A 是多项式 $f(x)$ 的一个**零点**或**根**．

4.106 求下列矩阵的主对角线：

$$(a)A=\begin{pmatrix}1&3&6\\2&-5&8\\4&-2&7\end{pmatrix};(b)B=\begin{pmatrix}t-2&3\\-4&t+5\end{pmatrix};(c)C=\begin{pmatrix}1&2&-3\\4&-5&6\end{pmatrix}.$$

解 ☞ (a)矩阵的对角线是由矩阵的从左上角到右下角元素组成，即元素 a_{11},a_{22},a_{33} 组成．矩阵 A 的对角线由数 $1,-5$ 和 7 组成．

(b)该对角线由 $t-2,t+5$ 组成．

(c)仅仅对于方阵，对角线才有定义．

4.107 求习题 4.106 的各矩阵的迹．

解 ☞ (a)A 的迹是其对角(线)元素之和：$\mathrm{tr}(A)=1-5+7=3$．

(b)将对角元素加起来：$\mathrm{tr}(B)=(t-2)+(t+5)=2t+3$．

(c)如同对角线，对于非方阵迹是没有定义的．

4.108 对于 $n=2,3$ 和 4，求 n 阶单位阵 I_n，并用克罗内克(Kronecker)记号表示它们．

解 ☞ 对角线上元素是 1，其余元素为 0：

$$I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, I_4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

克罗内克定义

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0, & 若\ i\neq j,\\1, & 若\ i=j.\end{cases}$$

因此 $I=(\delta_{ij})$.

4.109 设

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\4&-3\end{pmatrix}.$$

求(a)A^2,(b)A^3.

解 ☞ (a)

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}1&2\\4&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\4&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+8&2-6\\4-12&8+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&-4\\-8&17\end{pmatrix}.$$

(b)

$$A^3=AA^2=\begin{pmatrix}1&2\\4&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9&-4\\-8&17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9-16&-4+34\\36+24&-16-51\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&30\\60&-67\end{pmatrix}.$$

4.110 考虑习题 4.109.对于多项式 $f(x)=2x^3-4x+5$,计算 $f(A)$.

解 ☞ 首先在给定的多项式 $f(x)=2x^3-4x+5$ 中以 A 替代 x,对于常数 5,以 $5I$ 替代之:

$$f(A)=2A^3-4A+5I=2\begin{pmatrix}-7&30\\60&-67\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1&2\\4&-3\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

然后用相关的数乘每个矩阵:

$$f(A)=\begin{pmatrix}-14&60\\120&-134\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4&-8\\-16&12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}.$$

最后,在这些矩阵中将相对应的元素相加:

$$f(A)=\begin{pmatrix}-14-4+5&60-8+0\\120-16+0&-134+12+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13&52\\104&-117\end{pmatrix}.$$

4.111 验证习题 4.109 的矩阵 A 是多项式 $g(x)=x^2+2x-11$ 的一个根.

解 ☞ 现在,若矩阵 $g(A)$是零矩阵,则 A 是 $g(x)$的零点.于是,我们首先在 $g(x)=x^2+2x-11$ 中以 A 替代 x,并且以 $11I$ 替代常数 11 来计算 $g(A)$:

$$g(A)=A^2+2A-11I=\begin{pmatrix}9&-4\\-8&17\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&2\\4&-3\end{pmatrix}-11\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

然后,对每个矩阵,用它前面的数乘它:

$$g(A)=\begin{pmatrix}9&-4\\-8&17\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&4\\8&-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-11&0\\0&-11\end{pmatrix}.$$

最后,在这些矩阵中将对应的元素相加:

$$g(A)=\begin{pmatrix}9+2-11&-4+4+0\\-8+8+0&17-6-11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

由于 $g(A)=0$,因此 A 是多项式 $g(x)$的一个零点.

4.112 设

$$B=\begin{pmatrix}1&3\\5&3\end{pmatrix}.$$

求 $f(B)$,此处 $f(x)=2x^2-4x+3$.

解 ☞ 首先求

$$B^2=BB=\begin{pmatrix}1&3\\5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+15&3+9\\5+15&15+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&12\\20&24\end{pmatrix}.$$

于是

$$f(B)=2B^2-4B+3I=2\begin{pmatrix}16&12\\20&24\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1&3\\5&3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}32&24\\40&48\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4&-12\\-20&-12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}31&12\\20&39\end{pmatrix}.$$

4.113 参照习题 4.112,就多项式 $g(x)=x^2-4x-12$ 计算 $g(B)$.

解 ☞

$$g(B)=B^2-4B-12I=\begin{pmatrix}16&12\\20&24\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1&3\\5&3\end{pmatrix}-12\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}16&12\\20&24\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4&-12\\-20&-12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-12&0\\0&-12\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

(这样,B 是多项式 $g(x)$ 的一个根.)

4.114 设

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}.$$

求(a)A^2;(b)A^3;(c)AS_k,此处

$$S_k=\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}.$$

解 ☞ (a)

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0&2+2\\0+0&0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}.$$

(b)

$$A^3=AA^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0&4+2\\0+0&0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&6\\0&1\end{pmatrix}.$$

(c)

$$AS_k=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0&k+2\\0+0&0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&k+2\\0&1\end{pmatrix}.$$

4.115 就习题 4.114 的矩阵 A,求 A^n.

解 ☞ 参照习题 4.114,用 A 乘 A^m 时右上角元素加 2,因此

$$A^n=\begin{pmatrix}1&2n\\0&1\end{pmatrix}.$$

4.116 若 $AB=BA$,则矩阵 A 和 B 可交换.设

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}5&4\\6&11\end{pmatrix}.$$

证明 A 和 B 可交换.

解 ☞

$$AB=\begin{pmatrix}5+12&4+22\\15+24&12+44\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17&26\\39&56\end{pmatrix},$$
$$BA=\begin{pmatrix}5+12&10+16\\6+33&12+44\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17&26\\39&56\end{pmatrix}.$$

由于 $AB=BA$,因此 A 与 B 可交换.

4.117 求与矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

可交换的所有矩阵

$$M=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}.$$

解 ☞

$$AM=\begin{pmatrix}x+z&y+t\\z&t\end{pmatrix},\qquad MA=\begin{pmatrix}x&x+y\\z&z+t\end{pmatrix}.$$

令 $AM=MA$,得到4个方程

$$x+z=x,\quad y+t=x+y,\quad z=z,\quad t=z+t.$$

从第一个或最后一个方程得 $z=0$,从第二个方程得 $x=t$.因此 M 是形如

$$\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}$$

的任一矩阵.

方阵作为函数

4.118 用两种不同方法,阐述一个 n 阶方阵 A 定义 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的一个函数.

解 ☞ 设 u 是 $\mathbf{R}^n$ 的一向量.那么,依 u 是一个列向量或是一个行向量用 $A(u)=Au$ 或 $A(u)=uA$ 定义 A 是 $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的一个函数.

注 除非别的申明,在以后的习题中,$\mathbf{R}^n$ 的向量将定义为列向量,并且用矩阵 A 定义的函数将是 $A(u)=Au$.由于印刷上的原因,列向量常用行向量的转置来表示.

4.119 设

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\4&5&-6\\2&0&-1\end{pmatrix}.$$

求 $A(u)$,此处 $u=(1,-3,7)^T$.(注意 u 是列向量.)

解 ☞

$$A(u)=Au=\begin{pmatrix}1&-2&3\\4&5&-6\\2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-3\\7\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1+6+21\\4-15-42\\2+0-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28\\-53\\-5\end{pmatrix}.$$

4.120 就习题4.119的矩阵,求 $A(v)$,此处

(a) $v=(2,-1,4)^T$;(b) $v=(1,-7,6,-4)^T$;(c) $v=(3,-2,6)$.

解 ☞ (a)

$$A(v)=Av=\begin{pmatrix}1&-2&3\\4&5&-6\\2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+2+12\\8-5-24\\4+0-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\-21\\0\end{pmatrix}.$$

(b)由于 A 是一个3阶方阵,v 属于 $\mathbf{R}^4$ 而不属于所要求的 $\mathbf{R}^3$,因此 $A(v)$ 没有定义.

(c)根据我们的约定,由于给定的 v 是一个行向量,因此 $A(v)$ 没有定义.

4.121 已知

$$A=\begin{pmatrix}1&3\\4&-3\end{pmatrix}.$$

求一个非零列向量

$$u=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

使得 $A(u)=3u$.

解 ☞ 首先建立矩阵方程 $Au=3u$:

$$\begin{pmatrix}1&3\\4&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

将每一边表示成一个单个矩阵(列向量):

$$\begin{pmatrix}x+3y\\4x-3y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x\\3y\end{pmatrix}.$$

在上式中,令对应元素彼此相等得方程组,然后将它简化为阶梯型:

$$\left.\begin{matrix}x+3y=3x\\4x-3y=3y\end{matrix}\right\}\to\left\{\begin{matrix}2x-3y=0\\4x-6y=0\end{matrix}\right\}\to\left\{\begin{matrix}2x-3y=0\\0=0\end{matrix}\right\}$$
$$\to 2x-3y=0.$$

该方程组简化为含两个未知量的一个齐次方程,因此有无穷多解.为得到一个非零解,例如令 $y=2$,则 $x=3$.这就是说,$u=(3,2)^T$ 是一个所要求的解.

4.122 已知

$$B=\begin{pmatrix}1&3\\5&3\end{pmatrix},$$

求一个非零向量

$$u=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

使得 $B(u)=6u$.

解 ☞ 如同习题 4.121 的计算过程,有

$$\begin{pmatrix}1&3\\5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

或

$$\begin{pmatrix}x+3y\\5x+3y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6x\\6y\end{pmatrix}.$$

于是

$$\left.\begin{matrix}x+3y=6x\\5x+3y=6y\end{matrix}\right\}\to\left\{\begin{matrix}-5x+3y=0\\5x-3y=0\end{matrix}\right\}\to 5x-3y=0.$$

它有无穷多解.为得到一个非零解,令 $y=5$,则 $x=3$.因此 $u=(3,5)^T$.

4.123 已知

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\2&5&-1\\5&12&-5\end{pmatrix},$$

求所有的向量 $u=(x,y,z)^T$ 使得 $A(u)=0$.

解 ☞ 建立方程 $Au=0$,然后把每边写成一个单个矩阵:

$$\begin{pmatrix}1&2&-3\\2&5&-1\\5&12&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

或

$$\begin{pmatrix}x+2y-3z\\2x+5y-z\\5x+12y-5z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

令对应元素彼此相等得到一个齐次方程组,再把它简化成阶梯型:

$$\left.\begin{array}{r}x+2y-3z=0\\2x+5y-z=0\\5x+12y-5z=0\end{array}\right\}\to\left\{\begin{array}{r}x+2y-3z=0\\y+5z=0\\2y+10z=0\end{array}\right\}\to\left\{\begin{array}{r}x+2y-3z=0,\\y+5z=0.\end{array}\right.$$

在此阶梯型中，z 是自由变量. 为了得到一般解，令 $z=a$，此处 a 是一个参数. 再由回代得到 $y=-5a$，因而 $x=13a$. 因此，$u=(13a,-5a,a)^T$ 表示使得 $Au=0$ 的所有的向量.

可逆矩阵

这一小节考虑可逆矩阵. 设 A 是一个方阵，若存在一个矩阵 B 满足性质

$$AB=BA=I,$$

I 为单位阵，则称矩阵 A 是**可逆的**或**非奇异的**. 这样的一个矩阵 B 是惟一的，称它为 A 的**逆(阵)**，并用 A^{-1}表示.

注 我们知道，$AB=I$ 当且仅当 $BA=I$，因此只要检验一个乘积便可确定两个给定的矩阵是否是逆.

4.124 证明上述的逆矩阵 B 是惟一的.

证 ☞ 若 $AB_1=B_1A=I$ 且 $AB_2=B_2A=I$，则

$$B_1=B_1I=B_1(AB_2)=(B_1A)B_2=IB_2=B_2.$$

4.125 证明逆关系是对称的，即$(A^{-1})^{-1}=A$.

证 ☞ 若 $AB=BA=I$，则 $BA=AB=I$. 因此，若 B 是 A 的逆，则 B 是可逆的且 A 是 B 的逆. 换句话说，$(A^{-1})^{-1}=A$.

4.126 证明

$$A=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}$$

和

$$B=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}$$

是互逆的.

证 ☞ 计算 AB 和 BA：

$$AB=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-5&-10+10\\3-3&-5+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I,$$

$$BA=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-5&15-15\\-2+2&-5+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I,$$

于是，$AB=BA=I$，故 A 和 B 是互逆的.

4.127 证明

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&-1&3\\4&1&8\end{pmatrix}$$

和

$$B=\begin{pmatrix}-11&2&2\\-4&0&1\\6&-1&-1\end{pmatrix}$$

是互逆的.

证 ☞

$$AB=\begin{pmatrix}-11+0+12&2+0-2&2+0-2\\-22+4+18&4+0-3&4-1-3\\-44-4+48&8+0-8&8+1-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I.$$

由上面的注，$AB=I$ 当且仅当 $BA=I$，因此我们不必检验是否 $BA=I$. 于是 A 和 B 是互为逆阵.

4.128 求方阵

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

的逆.

解 ☞ 我们求数 x, y, z 和 t 使得

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} 3x+5z & 3y+5t \\ 2x+3z & 2y+3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

或者它们满足

$$\begin{cases} 3x+5z=1, \\ 2x+3z=0 \end{cases} \tag{1}$$

以及

$$\begin{cases} 3x+5t=0, \\ 2y+3t=1 \end{cases} \tag{2}$$

为了求解(1)，我们用 2 乘第一个方程以及用 -3 乘第二个方程，然后相加：

$$\begin{array}{ll} 2\times\text{第一个方程：} & 6x+10z=0 \\ -3\times\text{第二个方程：} & -6x-9z=-3 \\ \hline \text{相加：} & z=2 \end{array}$$

将 $z=2$ 代入第二个方程得

$$3x+5\cdot 2=1 \text{ 或 } 3x+10=1 \text{ 或 } 3x=9 \text{ 或 } x=-3.$$

为了求解(2)，用 2 乘第一个方程以及用 -3 乘第二个方程，然后相加：

$$\begin{array}{ll} 2\times\text{第一个方程：} & 6y+10t=0 \\ -3\times\text{第二个方程：} & -6y-9t=-3 \\ \hline \text{相加：} & t=-3 \end{array}$$

将 $t=-3$ 代入第一个方程得

$$3y+5\cdot(-3)=0 \text{ 或 } 3y-15=0 \text{ 或 } 3y=15 \text{ 或 } y=5.$$

于是给定矩阵的逆是

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

4.129 一般的 2×2 矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

在什么条件下可逆？若可逆，则其逆是什么？

解 ☞ 我们求数 x, y, z, t 使得

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

将它简化为解下面的两个方程组

$$\begin{cases} ax+bz=1, \\ cx+dz=0 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} ay + bt = 0, \\ cy + dt = 1. \end{cases}$$

令$|A| = ad - bc$[A的行列式].这两个方程组当且仅当$|A| \neq 0$时有一个解.在此情况下,第一个方程组有惟一解$x = d/|A|$,$z = -c/|A|$,以及第二个方程组有惟一解$y = -b/|A|$,$t = a/|A|$.因此

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d/A & -b/A \\ -c/A & a/A \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

用文字来描述:当$|A| \neq 0$时,一个2×2矩阵的逆由(i)交换主对角线上的元素,(ii)其他元素取其相反数,以及(iii)用$1/|A|$乘该矩阵得到.

4.130 求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

的逆.

解 ☞ 应用习题4.129的显式公式.首先计算得$|A| = 5 \times 2 - 3 \times 4 = -2$.其次,交换对角元素,非对角元素取其相反数以及用$1/|A|$乘之得

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3/2 \\ 2 & -5/2 \end{pmatrix}.$$

4.131 求矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

的逆

解 ☞ 首先计算得$|B| = (2 \times 3) - (-3) \times 1 = 9$.其次交换对角元素,非对角元素取其相反数,再用$1/|B|$乘之:

$$B^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/9 & 2/9 \end{pmatrix}.$$

4.132 试求矩阵

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$$

的逆.

解 ☞ 首先求得$|C| = (-2)(-9) - (6)(3) = 0$.由于$|C| = 0$,因此$C$没有逆.

习题4.133~4.136假定读者熟悉基本行运算和高斯(Gauss)算法,即行简化一个矩阵成阶梯型然后将它简化为行标准型.

4.133 给出高斯消去法求一个n阶方阵A的逆或确定A不可逆.

解 ☞ 第1步:形成$n \times 2n$(块)矩阵$M = (A \mid I)$,即A在M的左半边和I在M的右半边.

第2步:行简化M为阶梯型.若此过程在M的A半边产生一零行,则停止(A是不可逆的).否则,A半边将假定为三角型.

第3步:进一步行简化M为行标准型$(I \mid B)$,此处I替代矩阵左半边的A.

第4步:令$A^{-1} = B$.

4.134 求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

的逆.

解 ☞ 形成块矩阵$M = (A \mid I)$,然后将M简化成阶梯型:

$$M=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\2&-1&3&0&1&0\\4&1&8&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&-1&-1&-2&1&0\\0&1&0&-4&0&1\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&-1&-1&-2&1&0\\0&0&-1&-6&1&1\end{array}\right).$$

在阶梯型中，M 的左半边是三角型，因此 A 是可逆的．进一步行简化 M 成行标准型．

$$M\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-11&2&2\\0&-1&0&4&0&-1\\0&0&1&6&-1&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-11&2&2\\0&1&0&-4&0&1\\0&0&1&6&-1&-1\end{array}\right).$$

最后的块矩阵其形式$(I\mid A^{-1})$．因此

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-11&2&2\\-4&0&1\\6&-1&-1\end{pmatrix}.$$

4.135　求矩阵 B 的逆，此处

$$B=\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-3&6\\1&1&7\end{pmatrix}.$$

解　☞ 作块矩阵 $M=(B\mid I)$，然后简化 M 为阶梯型：

$$M=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&2&1&0&0\\2&-3&6&0&1&0\\1&1&7&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&2&1&0&0\\0&1&2&-2&1&0\\0&3&5&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&2&1&0&0\\0&1&2&-2&1&0\\0&0&-1&5&-3&1\end{array}\right).$$

在阶梯型中，M 的左半边是三角型，因此 B 有一个逆．进一步行简化 M 为行标准型：

$$M\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&0&11&-6&2\\0&1&0&8&-5&2\\0&0&1&-5&3&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&27&-16&6\\0&1&0&8&-5&2\\0&0&1&-5&3&-1\end{array}\right).$$

最后的矩阵具有形式$(I\mid B^{-1})$，因此 B^{-1}是最后矩阵的右半边．

4.136　将高斯法应用于

$$C=\begin{pmatrix}1&3&-4\\1&5&-1\\3&13&-6\end{pmatrix}.$$

解　☞ 作块矩阵 $M(C\mid I)$，然后行简化为阶梯型：

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&-4&1&0&0\\1&5&-1&0&1&0\\3&13&-6&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&-4&1&0&0\\0&2&3&-1&1&0\\0&4&6&-3&0&1\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&-4&1&0&0\\0&2&3&-1&1&0\\0&0&0&-1&-2&1\end{array}\right).$$

在阶梯型中，M 有一个零行在其左半边，即 C 不能行简化成三角型．因此 C 是不可逆的．

4.137　设 A,B 和 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是同阶可逆矩阵．证明：(a) AB 是可逆的，并且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$；(b) $A_1A_2\cdots A_n$ 是可逆的且 $(A_1A_2\cdots A_n)^{-1}=A_n^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$．

证　☞ (a)我们有

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I,$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

因此 $B^{-1}A^{-1}$ 是 AB 的逆，即 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

(b)对 n 用归纳法证明.对于 $n=1$,我们有 $A_1^{-1}=A_1^{-1}$.假设 $n>1$,并且对于 n 定理成立.我们证明它对 $n+1$ 也成立.应用(a)部分,我们有

$$\begin{aligned}(A_1A_2\cdots A_nA_{n+1})^{-1} &= [(A_1A_2\cdots A_n)A_{n+1}]^{-1}\\ &= A_{n+1}^{-1}(A_1A_2\cdots A_n)^{-1}\\ &= A_{n+1}^{-1}A_n^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.\end{aligned}$$

因此对 $n+1$ 定理成立.于是,对每一个正整数 n,定理成立.

4.138 设 A 是可逆的.证明:当 $k\neq 0$ 时,kA 是可逆的且其逆为 $k^{-1}A^{-1}$.

证 ☞ 由于 $k\neq 0$,因此 $k^{-1}=1/k$ 存在.于是

$$(kA)(k^{-1}A^{-1}) = (kk^{-1})(AA^{-1}) = 1\cdot I = I,$$

故 $k^{-1}A^{-1}$ 是 kA 的逆.

4.139 证明当且仅当 A 可逆时 A^T 可逆.

证 ☞ 若 A 可逆,则存在一个矩阵 B 使得 $AB=BA=I$.于是 $(AB)^T=(BA)^T=I^T$,从而 $B^TA^T=A^TB^T=I$.故 A^T 可逆,其逆是 B^T.反之,从 $(A^T)^T=A$ 得到.

4.140 证明逆运算和转置是可变换的,即 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$.

证 ☞ 根据习题 4.139,B^T 是 A^T 的逆,即 $B^T=(A^T)^{-1}$.但 $B=A^{-1}$,因此 $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$.

4.6 特殊类型的方阵

这节考虑下列方阵:

(a)设 $D=(d_{ij})$ 是 n 阶方阵.若它的非主对角元素都是零,则 D 是**对角阵**,用 $D=\mathrm{diag}(d_{11},d_{22},\cdots,d_{nn})$ 表示.

(b)设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶方阵.若它的对角线以下(以上)元素全是零,即若 $i>j(i<j)$ 时 $a_{ij}=0$,则 A 是上(下)**三角阵**.

(c)若 $A^T=A$,即若对于所有 i 和 j,$a_{ij}=a_{ji}$,则 A 是**对称阵**.(若 $A^T=-A$,则 A 是**斜对称阵或反对称阵**.)

(d)若 $A^T=A^{-1}$,即若 $AA^T=A^TA=I$,则 A 是**正交换**.

4.141 写出 diag(3, −7,2),diag(4, −5)和 diag(6, −3,0,1).

解 ☞ 在对角线上置给定的数,其他元素为 0:

$$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-7&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4&0\\0&-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6&&&\\&-3&&\\&&0&\\&&&1\end{pmatrix}.$$

(如同第三个矩阵,把 0 的块块省去,那是常事.)

4.142 求 AB,此处 $A=\mathrm{diag}(2,-3,5)$,$B=\mathrm{diag}(7,4,6)$.

解 ☞ 对角阵的乘积由对应的主对角元素相乘得到:

$$AB = \mathrm{diag}(2\cdot 7,\ -3\cdot 4, 5\cdot 6) = \mathrm{diag}(14,\ -12, 30).$$

4.143 求下列矩阵的逆:(a) $A=\mathrm{diag}(2,-3,4)$;(b) $B=\mathrm{diag}(1,3,-1,5)$,(c) $C=\mathrm{diag}(4,1,0,-3)$.

解 ☞ 假设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 全不为 0,则 $D=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的逆是对角阵 $D^{-1}=\mathrm{diag}(a_1^{-1},a_2^{-1},\cdots,a_n^{-1})$.

(a)$A^{-1}=(1/2,-1/3,1/4)$.

(b)$B^{-1}=(1,1/3,-1,1/5)$.

(c)由于 C 的第三个对角元素是 0,因此 C 没有逆阵.

4.144 给出 2, 3 和 4 阶的一般的上三角阵.

解 ☞

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ & b_{22} & b_{23} \\ & & b_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ & & c_{33} & c_{34} \\ & & & c_{44} \end{pmatrix}$$

(如同对角阵的情形,现把下三角部分的零元素省略而不写出来.)

4.145 仅仅用元素 0 和 1, 求(a)所有的 2×2 对角阵;(b)所有的 2×2 上三角阵.

解 ☞ (a)对角阵的主对角线外的元素必须都是 0:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b)上三角阵的主对角线以下的元素必须全是 0. 这就给出(a)的 4 个矩阵, 再加上下面的 4 个矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.146 假设 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$ 都是上三角阵. 显然, 和 $A+B$ 以及任一数乘 kA 仍是上三角阵. 证明:

(a)乘积 AB 是上三角阵;

(b) AB 的主对角元素是 $a_{11}b_{11}, a_{22}b_{22}, \cdots, a_{nn}b_{nn}$.

证 ☞ (a)设 $AB=(c_{ij})$, 则

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

若 $i>j$, 则对任一 k 或是 $i>k$ 或是 $k>j$, 于是或 $a_{ik}=0$ 或 $b_{kj}=0$. 故 $c_{ij}=0$, 从而 AB 是上三角阵.

(b)设 $AB=(c_{ij})$, 则

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}.$$

但是, 对于 $k<i$, $a_{ik}=0$, 且对 $k>i$, $b_{ki}=0$, 因此 $c_{ii}=a_{ii}b_{ii}$, 这正是所要证明的.

4.147 求一个上三角阵 A 使得

$$A^3 = \begin{pmatrix} 8 & -57 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}.$$

解 ☞ 设

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}.$$

那么, $x^3=8$, 因而 $x=2$; $z^3=27$, 因而 $z=3$. 其次用 $x=2$ 和 $z=3$ 计算 A^3:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & y \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & y \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5y \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

以及

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & y \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5y \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 19y \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$$

于是 $19y=-57$, 或 $y=-3$. 因此

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.148 给出一般的 2, 3 和 4 阶下三角阵.

解 ☞ 在每种情形中, 主对角线以上的元素全是 0:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & & \\ b_{21} & b_{22} & \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{11} & & & \\ c_{21} & c_{22} & & \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix}.$$

对称和斜对称矩阵

4.149 判定下列矩阵是对称的或是斜对称的：

$$(a)A=\begin{pmatrix}0 & 5 & -2\\ -5 & 0 & 3\\ 2 & -3 & 0\end{pmatrix};(b)B=\begin{pmatrix}4 & -7 & 1\\ -7 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix};(c)C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

解 ☞ (a)根据观察，对角元素全是 0，并且对称元素（关于对角线反射镜象）5 和 −5，−2 和 2，以及 3 和 −3 都是互为相反数，因此 A 是斜对称的.

(b)根据观察，对称元素 −7 和 −7，1 和 1 以及 2 和 2 都是相等的，因此 B 是对称的.

(c)由于 C 不是方阵，因此 C 既不是对称的也不是斜对称的.

4.150 判定下列矩阵是对称的或是斜对称的：

$$(a)D=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix};(b)E=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix};(c)F=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix};(d)G=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

解 ☞ (a)根据观察，$D^T=D$，因此 D 是对称的.

(b)我们看到 $E^T\neq\pm E$，因此 E 既不是对称的又不是斜对称的.

(c)根据观察，$F^T=-F$，因此 F 是斜对称的.

(d)当 0 是方阵时，由于 $0^T=0=-0$，因零方阵既是对称的又是斜对称的.

4.151 设

$$A=\begin{pmatrix}5 & 2 & x\\ y & z & -3\\ 4 & t & -7\end{pmatrix}$$

是对称的. 求 x,y,z,t.

解 ☞ 令对称元素（关于对角线反射镜象）得到 $x=4,y=2,t=-3$. 对角线上的未知数 z 是不确定的.

4.152 设

$$B=\begin{pmatrix}4 & x+2\\ 2x-3 & x+1\end{pmatrix}$$

是对称的. 求 x 和 B.

解 ☞ 令对称元素 $x+2$ 和 $2x-3$ 相等得 $x=5$，因此

$$B=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 7 & 6\end{pmatrix}.$$

4.153 设 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$ 是对称的. 证明(a)$A+B$ 是对称的，(b)kA 是对称的.

证 ☞ (a)设 $A+B=(c_{ij})$，则 $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}=a_{ji}+b_{ji}=c_{ji}$.

(b)设 $kA=(c_{ij})$，则 $c_{ij}=ka_{ij}=ka_{ji}=c_{ji}$.

4.154 说明，即使 A 和 B 都是对称的，AB 则未必是对称的.

解 ☞ 令

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 5 & 6\end{pmatrix},$$

则

$$AB=\begin{pmatrix}14 & 17\\ 23 & 28\end{pmatrix}$$

不是对称的.

定理 4.8 设 A 是一个方阵. 那么，(i)$A+A^T$ 是对称的；(ii)$A-A^T$ 是斜对称的；(iii)$A=B+C$，其中 $B=\frac{1}{2}(A+A^T)$ 是对称的，$C=\frac{1}{2}(A-A^T)$ 是斜对称的.

4.155 证明定理 4.8(i).

证 ☞ $(A+A^T)^T=A^T+(A^T)^T=A^T+A=A+A^T$.

4.156 证明定理 4.8(ii).

证 ☞ $(A-A^T)^T=A^T-(A^T)^T=A^T-A=-(A-A^T)$.

4.157 证明定理 4.8(iii).

证 ☞ 这个证明从 $A=B+C$ 和一个对称(斜对称)矩阵的任意倍数是对称的(斜对称的)得到.

4.158 将矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 7 & 8\end{pmatrix}$$

写成一个对称阵 B 和一个斜对称阵 C 之和.

解 ☞ 计算

$$A^T=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 3 & 8\end{pmatrix},A+A^T=\begin{pmatrix}4 & 10\\ 10 & 16\end{pmatrix},A-A^T=\begin{pmatrix}0 & -4\\ 4 & 0\end{pmatrix}.$$

于是

$$B=\frac{1}{2}(A+A^T)=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 5 & 8\end{pmatrix},\qquad C=\frac{1}{2}(A-A^T)=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}.$$

4.159 设 A 是对称的.证明 A^2 以及一般地,A^n 是对称的.

证 ☞ $(A^2)^T=(AA)^T=A^TA^T=AA=A^2$,而且,由归纳法,$(A^n)^T=(AA^{n-1})^T=(A^{n-1})^TA^T=A^{n-1}A=A^n$.

4.160 设 A 是一个 n 阶对称阵以及 P 是任一 $n\times m$ 矩阵.证明 P^TAP 也是对称的.

证 ☞ $(P^TAP)^T=P^TA^T(P^T)^T=P^TAP$.

正交阵

4.161 证明矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1/9 & 8/9 & -4/9\\ 4/9 & -4/9 & -7/9\\ 8/9 & 1/9 & 4/9\end{pmatrix}$$

是正交的.

证 ☞ 我们只须证明 $AA^T=I$:

$$\begin{aligned}AA^T&=\begin{pmatrix}1/9 & 8/9 & -4/9\\ 4/9 & -4/9 & -7/9\\ 8/9 & 1/9 & 4/9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/9 & 4/9 & 8/9\\ 8/9 & -4/9 & 1/9\\ -4/9 & -7/9 & 4/9\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{81}\begin{pmatrix}1+64+16 & 4-32+28 & 8+8-16\\ 4-32+28 & 16+16+49 & 32-4-28\\ 8+8-16 & 32-4-28 & 64+1+16\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{81}\begin{pmatrix}81 & 0 & 0\\ 0 & 81 & 0\\ 0 & 0 & 81\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I.\end{aligned}$$

4.162 定义 $\mathbf{R}^n$ 中的一个正交向量组和标准正交向量组.

解 ☞ 设向量 $u_1,u_2,\cdots,u_r$ 是两两正交的,即设 $u_i\cdot u_j=0,i\neq j$,则 $u_1,u_2,\cdots,u_r$ 形成一个正交向量组.如果它们是正交的并且它们也都是单位向量,即对于每个 i,$u_i\cdot u_i=1$,则它们形成一个标准正交组.关于标准正交性条件,用克罗内克记号表示是 $u_i\cdot u_j=\delta_{ij}$.

4.163 证明

$$A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}$$

是正交的充分必要条件是它的行 $u_1=(a_1,a_2,a_3)$, $u_2=(b_1,b_2,b_3)$, $u_3=(c_1,c_2,c_3)$ 形成一个标准正交组.

证 ☞ 若 A 是正交的,则

$$AA^T=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I.$$

这就得到

$$\begin{aligned}a_1^2+a_2^2+a_3^2&=u_1\cdot u_1=1,\\ b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3&=u_2\cdot u_1=0,\\ c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3&=u_3\cdot u_1=0,\\ a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3&=u_1\cdot u_2=0,\\ b_1^2+b_2^2+b_3^2&=u_2\cdot u_2=1,\\ c_1b_1+c_2b_2+c_3b_3&=u_3\cdot u_2=0,\\ a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3&=u_1\cdot u_3=0,\\ b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3&=u_2\cdot u_3=0,\\ c_1^2+c_2^2+c_3^2&=u_3\cdot u_3=1,\end{aligned}$$

即 $u_i\cdot u_j=\delta_{ij}$. 因此,u_1,u_2,u_3 形成一个标准正交组.反过来的结论可从每步是可逆的得到.

定理 4.9 设 A 是一个实矩阵.那么下面的论述是等价的:(a)A 是正交的;(b)A 的行形成一个标准正交组;(c)A 的列形成一个标准正交组.

4.164 证明定理 4.9.

证 ☞ 首先,我们证明(a)和(b)是等价的.设 $R_1,R_2,\cdots,R_n$ 表示 A 的行,则 $R_1^T,R_2^T,\cdots,R_n^T$ 是 A^T 的列.现在令 $AA^T=(c_{ij})$,由矩阵乘法,$c_{ij}=R_iR_j^T=R_i\cdot R_j$.于是 $AA^T=I$ 当且仅当 $R_i\cdot R_j=\delta_{ij}$ 当且仅当行 $R_1,R_2,\cdots,R_n$ 形成一个标准正交组.故(a)和(b)是等价的.(a)和(c)是等价的证明是类似的,只是我们用 $A^TA=I$ 替代 $AA^T=I$.这样,定理得证.(习题 4.163 实际上当 A 是三阶的情形的证明.)

4.165 设

$$A=\begin{pmatrix}x & 2/3 & 2/3\\ 2/3 & 1/3 & y\\ z & s & t\end{pmatrix}$$

是正交的.求 x,y,z,s,t.

解 ☞ 设 R_1,R_2,R_3 表示 A 的行,C_1,C_2,C_3 表示 A 的列.由于 R_1 是单位向量,因此有 $x^2+4/9+4/9=1$,或 $x=\pm1/3$.由于 R_2 是单位向量,因此有 $4/9+1/9+y^2=1$,或 $y=\pm2/3$.由于 $R_1\cdot R_2=0$,我们得到 $2x/3+2/9+2y/3=0$,或 $3x+3y=-1$.这就只可能是 $x=1/3$ 和 $y=-2/3$.于是

$$A=\begin{pmatrix}1/3 & 2/3 & 2/3\\ 2/3 & 1/3 & -2/3\\ z & s & t\end{pmatrix}.$$

由于各列都是单位向量,

$$1/9+4/9+z^2=1,\ 4/9+1/9+s^2=1,\ 4/9+4/9+t^2=1,$$

于是 $z=\pm2/3$, $s=\pm2/3$, $t=\pm1/3$.

情形(i):$z=2/3$.由于 C_1 和 C_2 是正交的,因此 $s=-2/3$;由于 C_1 和 C_3 是正交的,因此 $t=1/3$.

情形(ii):$z=-2/3$.由于 C_1 和 C_2 是正交的,因此 $s=2/3$;由于 C_1 和 C_3 是正交的,因此 $t=-1/3$.

因此恰好有两个可能的解:

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

4.166 设

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

是正交的，证明 $a^2+b^2=1$ 且

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \text{或} A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

证 ☞ 由于 A 是正交的，因此 A 的行形成一个标准正交组. 于是

$$a^2+b^2=1, \quad c^2+d^2=1, \quad ac+bd=0.$$

同理，A 的列形成一个标准正交组，于是

$$a^2+c^2=1, \quad b^2+d^2=1, \quad ab+cd=0.$$

因此，$c^2=1-a^2=b^2$，从而 $c=\pm b$.

情形(i)：$c=+b$. 于是 $b(a+d)=0$ 或 $d=-a$，对应的矩阵是

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

情形(ii)：$c=-b$. 于是 $b(d-a)=0$，或 $d=a$，对应的矩阵是

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

4.167 求一个 2×2 正交阵 P，它的第一行是(a)$(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$，(b)$u=(2,3)$的倍数.

解 ☞ (a)由习题 4.166，

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \text{或} P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

(b)首先将 u 单位化得到 P 的第一行. 我们有 $\|u\| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$. 因此

$$P = \begin{pmatrix} 2\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} & -2/\sqrt{13} \end{pmatrix} \text{或} P = \begin{pmatrix} 2\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \\ -3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13} \end{pmatrix}.$$

4.168 证明每个 2×2 正交阵具有形式

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{或} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},$$

θ 为某一实数.

证 ☞ 设 a 和 b 是任二数使得 $a^2+b^2=1$. 那么存在一个实数 θ 使得 $a=\cos\theta$ 和 $b=\sin\theta$. 于是所要证明的结果从习题 4.166 得到.

4.169 设 A 和 B 都是 n 阶直交阵，证明 AB 是一个 n 阶正交阵.

证 ☞ 只要证明$(AB)(AB)^T=I$ 就行了：

$$(AB)(AB)^T = (AB)(B^TA^T) = A(BB^T)A^T = AIA^T = AA^T = I.$$

4.170 设 A 是正交阵，证明 A^{-1}是正交阵.

证 ☞ 我们要证明$(A^{-1})^T=(A^{-1})^{-1}$. 由于 A 是正交的，因此 $A^T=A^{-1}$. 由于转置和逆运算是可交换的(习题 4.140)，因此$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=(A^{-1})^{-1}$. 于是 A^{-1}是正交的.

4.171 求一个 3×3 正交阵 P 使它的前两行分别是$u_1=(1,1,1)$和 $u_2=(0,-1,1)$的倍数.

解 ☞ 设 $u_3=(x,y,z)$是和 u_1, u_2 正交的非零向量. 那么

$$x+y+z=0 \quad \text{和} \quad -y+z=0.$$

这里 z 是一个自由变量. 令 $z=-1$ 得 $y=-1$ 和 $x=2$. 因此 $u_3=(2,-1,-1)$. 设 A 是以 u_1, u_2, u_3 为行的矩阵，并且设 P 是将 A 的各行规格化得到的矩阵. 于是

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\2&-1&-1\end{pmatrix} \text{和} P=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}&1/\sqrt{3}&1/\sqrt{3}\\0&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\2/\sqrt{6}&1/\sqrt{6}&-1/\sqrt{6}\end{pmatrix}.$$

4.7 行列式

一个 n 阶方阵$A=(a_{ij})$的**行列式**是赋予矩阵 A 的一个确定的数. A 的行列式用$\det(A)$或$|A|$或

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

表示. 数 n 称为该行列式的**阶**.

注 1　一、二和三阶行列式定义如下:

$$|a_{11}|=a_{11}.$$

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

注 2　一般的 n 阶行列式的定义如下:

$$\det(A)=\sum\operatorname{sgn}(\sigma)a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

此处求和是取遍$\{1,2,\cdots,n\}$的所有排列 $\sigma=\{j_1,j_2,\cdots,j_n\}$. 这里 $\operatorname{sgn}(\sigma)$是依照使 σ 的数为通常的次序时所需的交换次数是偶数或奇数而取正号或负号. 为完整性, 我们包含了行列式函数的一般定义. 读者若需大于三阶的行列式的计算技巧可参考矩阵论或线性代数方面的教科书. (我们在这一节的稍后部分简要论述这样的行列式.)我们在第八章引出排列.

注 3　下面两个定理的证明超出本书的范围, 但它在矩阵论中起着重要的作用.

定理 4.10　对于任意的两个 n 阶方阵A 和B, 我们有

$$\det(AB)=\det(A)\cdot\det(B).$$

(这就是说, 行列式函数具有乘法性质.)

定理 4.11　一个矩阵可逆的充分必要条件是其行列式不等于零.

4.172　求 $\det(24)$, $\det(-6)$, $\det(t+2)$.

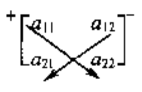
解　☞ 这样的行列式是它的数本身, 因此 $\det(24)=24$, $\det(-6)=-6$, $\det(t+2)=t+2$.

4.173　证明方程 $ax=b$ 有惟一解的充分必要条件是 $\det(a)\neq 0$.

证　☞ 方程 $ax=b$ 有惟一解的充分必要条件是 $a\neq 0$. 不管怎样, $\det(a)=a$. 因此 $ax=b$ 有惟一解的充分必要条件是 $\det(a)\neq 0$. (类似地, 矩阵方程 $AX=B$ 有惟一解的充分必要条件是 $\det(A)\neq 0$.)

4.174　给出计算二阶行列式的一个便于记忆的方法.

解　☞ 该行列式等于沿着正标号箭头的元素的乘积减去沿着负标号箭头的元素的乘积. (对于三阶行列有一个类似的格式(习题 4.185), 但高阶行列式没有这样的计算格式.)



4.175 计算各矩阵：

(a) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$，　(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$，　(c) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

的行列式.

解 ☞ (a)

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (5)(3) - (4)(2) = 15 - 8 = 7.$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = (2)(6) - (1)(-4) = 12 + 4 = 16.$$

(c)

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 8 = 23.$$

4.176 计算各矩阵：

(a) $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$，　(b) $\begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$，　(c) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

的行列式.

解 ☞ (a) $\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -8-5=-13$，　(b) $\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 15-0=15$，

(c) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

4.177 计算

(a) $A = \begin{pmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{pmatrix}$；(b) $B = \begin{pmatrix} t-5 & 7 \\ -1 & t+3 \end{pmatrix}$

的行列式.

解 ☞ (a)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{vmatrix} = (a-b)(a+b) - (a)(a) = -b^2.$$

(b)

$$\det(B) = \begin{vmatrix} t-5 & 7 \\ -1 & t+3 \end{vmatrix} = (t-5)(t+3) + 7 = t^2 - 2t - 15 + 7 = t^2 - 2t - 8.$$

4.178 确定 k 为何值时，

$$\begin{vmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{vmatrix} = 0.$$

解 ☞ 由于

$$\begin{vmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{vmatrix} = 2k^2 - 4k = 0,$$

即 $2k(k-2)=0$，因此 $k=0$ 或 $k=2$.

4.179 确定 t 为何值时，

$$\begin{vmatrix} t-2 & 3 \\ 4 & t-1 \end{vmatrix} = 0.$$

解 ☞ 由于

$$\begin{vmatrix} t-2 & 3 \\ 4 & t-1 \end{vmatrix} = t^2 - 3t + 2 - 12 = t^2 - 3t - 10 = 0,$$

即 $(t-5)(t+2)=0$，因此 $t=5$ 或 $t=-2$.

4.180 考察下面的含两个未知量的方程组：

$$a_1x + b_1y = c_1,$$
$$a_2x + b_2y = c_2.$$

该方程组有惟一解的充分必要条件是 $D = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. 它的解是

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1},\ y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

完全用行列式来表示其解.

解 ☞

$$x = \frac{N_x}{D} = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},$$

$$y = \frac{N_y}{D} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

这里,方程组的系数矩阵的行列式 D 出现在两个商的分母中,关于 x 和 y 的商的分子 N_x 和 N_y 是分别把 D 中的第一列元素 a_1, a_2 和第二列元素 b_1, b_2 依次换成 c_1, c_2 得到的行列式.

4.181 用行列式解

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7, \\ 3x + 5y = 1. \end{cases}$$

解 ☞ 系数矩阵的行列式 D 是

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - 3 \times (-3) = 10 + 9 = 19.$$

由于 $D \neq 0$,因此方程组有惟一解.为了得到分子 N_x,在系数矩阵中用常数项替代 x 的系数:

$$N_x = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 7 \times 5 - 1 \times (-3) = 35 + 3 = 38.$$

为了得到 N_y,在系数矩阵中用常数项替代 y 的系数:

$$N_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - 3 \times 7 = 2 - 21 = -19.$$

这样,方程组的惟一解是

$$x = \frac{N_x}{D} = \frac{38}{19} = 2, \qquad y = \frac{N_y}{D} = \frac{-19}{19} = -1.$$

4.182 用行列式解

$$\begin{cases} 2x - 4y = 7, \\ 3x - 6y = 5. \end{cases}$$

解 ☞ 系数矩阵的行列式 D 是

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 2 \times (-6) - 3 \times (-4) = -12 + 12 = 0.$$

因 $D = 0$,因此方程组没有惟一解,我们不能用行列式来解该方程组.

4.183 设 $ab \neq 0$. 用行列式解

$$\begin{cases} ax - 2by = c, \\ 3ax - 5by = 2c. \end{cases}$$

解 ☞ 首先求

$$D = \begin{vmatrix} a & -2b \\ 3a & -5b \end{vmatrix} = -5ab + 6ab = ab.$$

由于 $D = ab \neq 0$,因此方程组有惟一解.其次求

$$N_x = \begin{vmatrix} c & -2b \\ 2c & -5b \end{vmatrix} = -5bc + 4bc = -bc$$

和

$$N_y = \begin{vmatrix} a & c \\ 3a & 2c \end{vmatrix} = 2ac - 3ac = -ac.$$

于是 $x = N_x/D = -bc/ab = -c/a$ 和 $y = N_y/D = -ac/ab = -c/b$.

4.184 就二阶行列式，验证乘法性质（定理 4.10）.

证 ☞

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\det(AB) &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) \\ &= a_{11}b_{11}a_{21}b_{12} + a_{11}b_{11}^{(1)}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}^{(4)}a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21}a_{22}b_{22} \\ &\quad - a_{11}b_{12}a_{21}b_{11} - a_{11}b_{12}^{(2)}a_{22}b_{21} - a_{12}b_{22}^{(3)}a_{21}b_{11} - a_{12}b_{22}a_{22}b_{21}.\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\det(A)\cdot\det(B) &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\ &= a_{11}a_{22}^{(1)}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}^{(2)}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}^{(3)}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}^{(4)}b_{12}b_{21}.\end{aligned}$$

在 $\det(AB)$ 中 4 个没有标号的项相互抵消，因此 $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$.

三阶行列式

4.185 应用图 4-1 得到

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

的行列式.

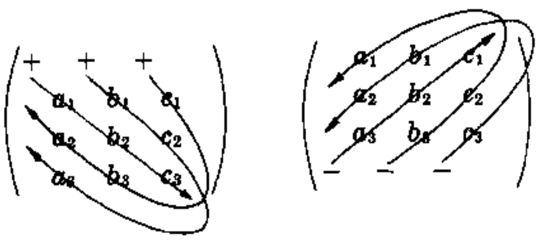


图 4-1

解 ☞ 在左边的图中，用箭号连接的 3 个数形成一个乘积，并且在每个乘积之前加上正号如下：

$$+a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3.$$

现在，在右图中用箭号连接的 3 个数作一个乘积，并且在每个乘积之前加上负号如下：

$$-a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1.$$

于是 A 的行列式正是上面两个表示式的和：

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1.$$

（以上计算 $|A|$ 的方法对于大于三阶的行列式是不适用的.）

4.186 计算

$$(a)A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&5&-2\\1&-3&4\end{pmatrix};(b)B=\begin{pmatrix}3&-2&-4\\2&5&-1\\0&6&1\end{pmatrix}$$

的行列式.

解 ☞ 应用图 4-1 得到

$$\begin{aligned}(a)\quad \det(A)&=\begin{vmatrix}2&1&1\\0&5&-2\\1&-3&4\end{vmatrix}\\&=(2)(5)(4)+(1)(-2)(1)+(1)(-3)(0)-(1)(5)(1)\\&\quad-(-3)(-2)(2)-(4)(1)(0)\\&=40-2+0-5-12-0=21,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(b)\quad \det(B)&=\begin{vmatrix}3&-2&-4\\2&5&-1\\0&6&1\end{vmatrix}\\&=(3)(5)(1)+(-2)(-1)(0)+(-4)(6)(2)-(0)(5)(-4)\\&\quad-(6)(-1)(3)-(1)(-2)(2)\\&=15+0-48-0+18+4=-11.\end{aligned}$$

4.187 计算

$$(a)C=\begin{pmatrix}-2&-1&4\\6&-3&-2\\4&1&2\end{pmatrix};(b)D=\begin{pmatrix}7&6&5\\1&2&1\\3&-2&1\end{pmatrix}$$

的行列式.

解 ☞

$$(a)\det(C)=\begin{vmatrix}-2&-1&4\\6&-3&-2\\4&1&2\end{vmatrix}=12+8+24+48-4+12=100.$$

$$(b)\det(D)=\begin{vmatrix}7&6&5\\1&2&1\\3&-2&1\end{vmatrix}=14+18-10-30+14-6=0.$$

4.188 证明

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}.$$

解 ☞ 将二阶行列式展开得到

$$\begin{aligned}&a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\\&=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{12}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}.\end{aligned}$$

除了次序之外,这就是原先给出的三阶行列式的展开式.

注意,每个 2×2 矩阵是在原矩阵中删去包含它的系数(第一行中的一个元素)的行和列得到的.注意系数是交错取正负号的.

$$=a_{11}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$+a_{13}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

4.189 计算

$$(a)A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&-2&3\\0&5&-1\end{pmatrix};(b)B=\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&7\\8&9&1\end{pmatrix}$$

的行列式.

解 ☞ 如同习题 4.188,按第一行展开.

$$(a)\quad \det(A)=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&-2&3\\0&5&-1\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1&2&3\\4&-2&3\\0&5&-1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1&2&3\\4&-2&3\\0&5&-1\end{vmatrix}$$

$$+3\begin{vmatrix}1&2&3\\4&-2&3\\0&5&-1\end{vmatrix}$$

$$=1\begin{vmatrix}-2&3\\5&-1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}4&3\\0&-1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}4&-2\\0&5\end{vmatrix}$$

$$=1(2-15)-2(-4+0)+3(20+0)=-13+8+60=55.$$

$$(b)\quad \det(B)=\begin{vmatrix}2&3&4\\5&6&7\\8&9&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}6&7\\9&1\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}5&7\\8&1\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}5&6\\8&9\end{vmatrix}$$

$$=2(6-63)-3(5-56)+4(45-48)=27.$$

4.190 求

$$(a)C=\begin{pmatrix}2&3&-4\\0&-4&2\\1&-1&5\end{pmatrix};(b)D=\begin{pmatrix}2&0&1\\4&2&-3\\5&3&1\end{pmatrix}$$

的行列式.

解 ☞ (a)

$$\det(C)=\begin{vmatrix}2&3&-4\\0&-4&2\\1&-1&5\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-4&2\\-1&5\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}0&2\\1&5\end{vmatrix}+(-4)\begin{vmatrix}0&-4\\1&-1\end{vmatrix}$$

$$=2(-20+2)-3(0-2)-4(0+4)=-46.$$

(b)

$$\det(D)=\begin{vmatrix}2&0&1\\4&2&-3\\5&3&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&-3\\3&1\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}4&-3\\5&1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}4&2\\5&3\end{vmatrix}$$

$$=2(2+9)+(12-10)=24.$$

4.191 设

$$A=\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}.$$

将 det(A)表示成二阶行列式的线性组合,其系数来自(a)第二行和(b)第三行.

解 ☞ (a)$\det(A)=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1$

$$=-a_2(b_1c_3-b_3c_1)+b_2(a_1c_3-a_3c_1)-c_2(a_1b_3-a_3b_1)$$

$$=-a_2\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}+b_2\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$$

$$-c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= -a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

(b) $\det(A) = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$

$$= a_3(b_1c_2 - b_2c_1) - b_3(a_1c_2 - a_2c_1) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$= a_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$+ c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

4.192 习题 4.191 的三阶行列式的按行展开式中系数的符号在原矩阵形成一个横纵交错排列的图案如下：

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}.$$

我们也可展开行列式使它的系数来自列而不是行.按列展开时,系数的符号同样形成上面的横纵交错排列的图案.试给出 $\det(A)$ 的 3 个按列展开式.

解 ☞

$$\det(A) = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \qquad \text{第一列}$$

$$= -b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \qquad \text{第二列}$$

$$= c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad \text{第三列}$$

4.193 考虑 3 个未知量 x, y 和 z 的三阶线性方程组：

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2,$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3,$$

给出该方程组有惟一解的条件(用行列式表示),并用行列式表示这样的惟一解.

解 ☞ 上面的方程组有惟一解的充分必要条件是其系数矩阵的行列式不为零：

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

在此情形下,方程组的惟一解可表示成行列式的商,

$$x = \frac{N_x}{D},\quad y = \frac{N_y}{D},\quad z = \frac{N_z}{D}$$

此处,每个商的分母 D 是行列式(1), N_x, N_y 和 N_z 是常数项的列替代系数矩阵中未知量的系数的列得到的：

$$N_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, N_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, N_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

(我们强调一下,若系数矩阵的行列式 D 是零,则该方程组或是无解或是有无穷多解.)

4.194 用行列式解方程组

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3, \\ x + y + z = 1, \\ x - 2y - 3z = 4. \end{cases}$$

解 ☞ 首先计算系数矩阵的行列式 D:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -6+1+2+1+4+3 = 5.$$

由于 $D \neq 0$,因此方程组有惟一解.其次分别计算 x, y 和 z 的分子 N_x, N_y 和 N_z:

$$N_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -9+4+2+4+6+3 = 10,$$

$$N_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -6+3-4+1-8+9 = -5,$$

$$N_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} - 8+1-6-3+4-4 = 0.$$

因此惟一解是

$$x = \frac{N_x}{D} = \frac{10}{5} = 2, y = \frac{N_y}{D} = \frac{-5}{5} = -1, z = \frac{N_z}{D} = \frac{0}{5} = 0.$$

一般阶行列式

这一小节考虑一般阶行列式.下面的注是适用的.

注 1 一个三阶行列式用二阶行列式来表示(习题 4.191)归功于拉普拉斯(Laplace),它对于一般阶行列式也是正确的.这就是说,任一行列式同样可以用任一行或任一列为系数表示成较低阶行列式的线性组合,系数 a_{ij} 用 $(-1)^{i+j}$ 来乘(即符号遵循横纵交错排列的图案.)

注 2 初等行运算 $(kR_i + R_j) \to (R_j)$ 将 i 行的 k 倍加到 j 行不改变行列式的值.(对于初等列运算 $(kC_i + C_j) \to (C_j)$,有相同的结果.)

注 3 一个三角形矩阵的行列式等于它的主对角元素的乘积.特别地,$\det(I) = 1, \det(0) = 0$.

4.195 设 $A = (a_{ij})$ 是一个非零的 n 阶方阵,$n > 1$.给出一个简化 A 的行列式成为一个 $n-1$ 阶行列式的算法.

解 ☞ 第 1 步:选取一个元素 $a_{ij} = 1$,或者若没有这样的元素,则选取 $a_{ij} \neq 0$.

第 2 步:以 a_{ij} 为主元,应用初等行(列)运算将 j 列(i 行)的其他所有位置元素消为 0.

第 3 步:按 a_{ij} 所在的列(行)展开行列式.(以上算法的验证可从上面的注得到.)

4.196 计算

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

的行列式.

解　☞ 以 $a_{23}=1$ 为主元将第三列的其他元素消为 0，即应用行运算

$$(-2R_2+R_1)\to(R_1),(3R_2+R_3)\to(R_3),(R_2+R_4)\to(R_4).$$

应用这些运算，行列式的值不会改变，即

$$|A|=\begin{vmatrix}5&4&2&1\\2&3&1&-2\\-5&-7&-3&9\\1&-2&-1&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&0&5\\2&3&1&-2\\1&2&0&3\\3&1&0&2\end{vmatrix}.$$

现在我们若按第三列展开，则可略去含有 0 的所有的项．于是

$$|A|=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&-2&0&5\\2&3&1&-2\\1&2&0&3\\3&1&0&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&-2&5\\1&2&3\\3&1&2\end{vmatrix}$$

$$=-(4-18+5-30-3+4)=-(-38)=38.$$

4.197　计算

$$B=\begin{pmatrix}3&-2&-5&4\\1&-2&-2&3\\-2&4&7&-3\\2&-3&-5&8\end{pmatrix}$$

的行列式．

解　☞ 以 $b_{21}=1$ 为主元并且用列运算

$$(2C_1+C_2)\to(C_2),(2C_1+C_3)\to(C_1),(-3C_1+C_4)\to(C_4)$$

将第二行的其它元素消为 0．于是

$$|B|=\begin{vmatrix}3&-2&-5&4\\1&-2&-2&3\\-2&4&7&-3\\2&-3&-5&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-2+2(3)&-5+2(3)&4-3(3)\\1&-2+2(1)&-2+2(1)&3-3(1)\\-2&4+2(-2)&7+2(-2)&-3-3(-2)\\2&-3+2(2)&-5+2(2)&8-3(2)\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}3&4&1&-5\\1&0&0&0\\-2&0&3&3\\2&1&-1&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}4&1&-5\\0&3&3\\1&-1&2\end{vmatrix}=-(24+3+0+15+12-0)=-54.$$

4.198　计算

$$C=\begin{pmatrix}2&5&-3&-2\\-2&-3&2&-5\\1&3&-2&2\\-1&-6&4&3\end{pmatrix}$$

的行列式．

解　☞ 以 $c_{31}=1$ 为主元并且应用行运算

$$(-2R_3+R_1)\to(R_1),(2R_3+R_2)\to(R_2),(R_3+R_4)\to(R_4).$$

于是

$$|C|=\begin{vmatrix}2&5&-3&-2\\-2&-3&2&-5\\1&3&-2&2\\-1&-6&4&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-1&1&-6\\0&3&-2&-1\\1&3&-2&2\\0&-3&2&5\end{vmatrix}=+\begin{vmatrix}-1&1&-6\\3&-2&-1\\-3&2&5\end{vmatrix}$$

$$=10+3-36+36-2-15=-4.$$

4.199　计算各矩阵：

$$(a)A=\begin{pmatrix}3&-2&5&-8\\0&7&-4&9\\0&0&-6&4\\0&0&0&2\end{pmatrix};(b)=\begin{pmatrix}1&2&2&3\\1&0&-2&0\\3&-1&1&-2\\4&-3&0&2\end{pmatrix};(c)C=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

的行列式.

解 ☞ (a)由于 A 是三角形矩阵,只要求其主对角元素的乘积:$|A|=3\times7\times(-6)\times2=-252$.

(b)以 $b_{21}=1$ 为主元并用列运算 $(2C_1+C_3)\to(C_3)$:

$$|B|=\begin{vmatrix}1&2&4&3\\1&0&0&0\\3&-1&7&-2\\4&-3&8&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&4&3\\-1&7&-2\\-3&8&2\end{vmatrix}$$

$$=-(28+24-24+63+32+8)=-131.$$

(c)虽然 C 是零矩阵,但它不是方阵,因此它的行列式没有定义.

4.200 计算

$$A=\begin{pmatrix}6&2&1&0&5\\2&1&1&-2&1\\1&1&2&-2&3\\3&0&2&3&-1\\-1&-1&-3&4&2\end{pmatrix}$$

的行列式.

解 ☞ 首先将 $|A|$ 化为一个四阶行列式,然后化为一个三阶行列式.先以 $a_{22}=1$ 为主元并应用 $(-2R_2+R_1)\to(R_1)$,$(-R_2+R_3)\to(R_3)$,以及 $(R_2+R_5)\to(R_5)$.于是

$$|A|=\begin{vmatrix}2&0&-1&4&3\\2&1&1&-2&1\\-1&0&1&0&2\\3&0&2&3&-1\\1&0&-2&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-1&4&3\\-1&1&0&2\\3&2&3&-1\\1&-2&2&3\end{vmatrix}.$$

以 $a_{22}=1$ 为主元并应用 $(C_2+C_1)\to(C_1)$ 和 $(-2C_2+C_4)\to(C_4)$:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&-1&4&5\\0&1&0&0\\5&2&3&-5\\-1&-2&2&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&4&5\\5&3&-5\\-1&2&7\end{vmatrix}$$

$$=21+20+50+15+10-140=-24.$$

4.201 设 P 是非奇异的.证明 $|P^{-1}|=|P|^{-1}$.

证 ☞ $P^{-1}P=I$.因此 $1=|I|=|P^{-1}P|=|P^{-1}||P|$,故 $|P^{-1}|=|P|^{-1}$.

4.202 设 B 与 A 相似,即设存在一个非奇异矩阵 P 使得 $B=P^{-1}AP$.证明 $|B|=|A|$.

证 ☞ 我们有

$$|B|=|P^{-1}AP|=|P^{-1}||A||P|=|A||P^{-1}||P|=|A|.$$

(虽然矩阵 P^{-1} 和 A 无需交换,但它们行列式为数,作了交换.)

4.203 设 A 是正交阵.利用 $|A|=|A^T|$,证明 $|A|=\pm1$.

证 ☞ 由于 A 是正交的,因此有 $AA^T=I$.于是

$$1=|I|=|AA^T|=|A||A^T|=|A|^2.$$

故 $|A|=\pm1$.

体积作为一个行列式

行列式与面积和体积的关系如下:设 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的向量(箭号),S 是由这些向量

形成的平行六面体，A 是以 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 为行的矩阵，那么 S 的体积(或者，当 $n=2$ 时，S 的面积)，用 $V(S)$表示，它等于 $\det(A)$的绝对值.

4.204 设 $u_1=(2,3)$和 $u_2=(5,1)$是 $\mathbf{R}^2$ 的向量.(a)画出用向量(箭号)确定的平行四边形 S，(b)求 S 的面积.

解 ☞ (a)在平面 $\mathbf{R}^2$ 中，从原点 O 到点 $P(2,3)$和 $Q(5,1)$画箭号，如图 4-2.

(b)求以 u_1 和 u_2 为行的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2&3\\5&1\end{pmatrix}$$

的行列式.这里$|A|=2-15=-13$.因此 S 的面积是$|-13|=13$.

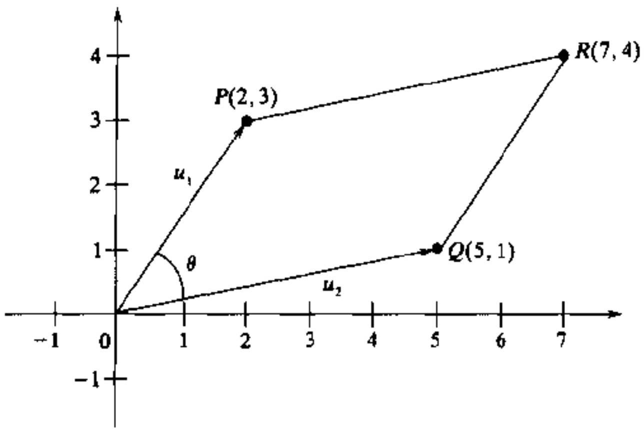


图 4-2

4.205 求 $\mathbf{R}^3$ 中由向量 $u_1=(2,5,2)$，$u_2=(4,2,3)$和 $u_3=(1,1,4)$确定的平行六面体 S 的体积 $V(S)$.

解 ☞ 计算矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2&5&2\\4&2&3\\1&1&4\end{pmatrix}$$

(它的行是向量 u_1, u_2, u_3)的行列式：

$$|A|=16+15+8-4-6-80=-51.$$

因此 $V(S)=51$.

4.206 设 u_1 和 u_2 是 $\mathbf{R}^2$ 的向量(箭号)，且设 A 是以 u_1 和 u_2 为行的矩阵.给定判定$\det(A)$是否是正的，零或负的几何条件.

解 ☞ 若从 u_1 到 u_2 的最小旋转是逆时针方向的(顺时针方向的)，则 $\det(A)$是正的(负的).若 u_1 与 u_2 是同或反方向，则 $\det(A)=0$.

4.207 设 u_1, u_2 和 u_3 是 $\mathbf{R}^3$ 的向量(箭号)，A 是以 u_1, u_2, u_3 为行的矩阵.给出判定$\det(A)$是否是正的，零或负的几何条件.

解 ☞ $\det(A)$是正的或负的是依 u_1, u_2, u_3 形成一个右手或左手坐标系而定.若三个向量在一个平面上，则 $\det(A)$是零.

4.208 证明向量 $u_1=(1,2,4)$，$u_2=(2,1,-3)$和 $u_3=(5,7,9)$在一个平面上.

证 ☞

$$\begin{vmatrix}1&2&4\\2&1&-3\\5&7&9\end{vmatrix}=9-30+56-20+21-36=0.$$

(或请注意 $u_3=3u_1+u_2$).

4.209 求 $\mathbf{R}^4$ 中由向量 $u_1=(2,-1,4,-3)$, $u_2=(-1,1,0,2)$, $u_3=(3,2,3,-1)$和 $u_4=(1,-2,2,3)$确定的平行六面体 S 的体积 $V(S)$.

解 ☞ 计算下面的行列式:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \boxed{-1} & 4 & -1 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ 5 & \boxed{2} & 3 & -5 \\ -1 & \boxed{-2} & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$=21+20-10-3+10-140=-102.$$

因此 $V(S)=102$.

第五章　图　　论

5.1　图和多重图

本章及其后两章研究图论.

5.1　定义一个图.

解 ☞ 一个**图** G 由两部分组成:

(i)集合 $V=V(G)$,其元素称为**顶点**,**点**或**结点**;

(ii)集合 $E=E(G)$,它由不同顶点的无序偶,称之为**边**构成的.

若要强调 G 的两个部分,则将 G 记作 $G(V,E)$.

5.2　定义一个多重图.

解 ☞ 一个**多重图** $G=G(V,E)$ 也是由一个顶点集合和一个边集合组成,除 E 可以包含**多重边**,即连接相同端点的多条边之外,E 还可以包含一个或多个**环**,即端点是同一顶点的一条边.

5.3　作一个图(多重图)的图形.

解 ☞ 在平面上,按下面的方法画图(多重图)$G=G(V,E)$的图形.在 V 中的每个顶点用一个圆点(或小圆)来表示,每一条边 $e=\{u,v\}$ 用连接其**端点** u 和 v 的曲线表示.(事实上,可能的话,我们通常画出它的图形而不是明显地列出它的结点和边.)

5.4　描述图 5-1 所示的图.

解 ☞ 图 5-1 表示图 $G=G(V,E)$,其中(i) V 由顶点 A,B,C,D 组成;(ii) E 由 5 条边 $e_1=\{A,B\}$, $e_2=\{B,C\}$, $e_3=\{C,D\}$, $e_4=\{A,C\}$, $e_5=\{B,D\}$ 组成.

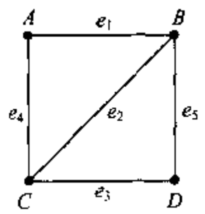


图 5-1

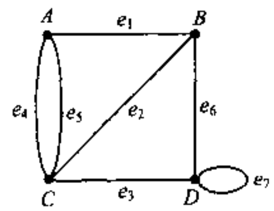


图 5-2

5.5　图 5-2 的图形表示一个多重图.为什么 G 不是一个图?

解 ☞ G 含有多重边 e_4 和 e_5,它们接连相同的顶点 A 和 C,而且 G 含有一个环 e_7,它的端点是同一顶点 D.一个图没有多重边和环.

5.6　描述图 5-3 所示的图.

解 ☞ 图 5-3 表示一个图 $G=G(V,E)$,其中(i) V 由 4 个顶点 A,B,C,D 组成;(ii) E 由 5 条边 $e_1=\{A,B\}$, $e_2=\{B,C\}$, $e_3=\{C,D\}$, $e_4=\{A,C\}$, $e_5=\{B,D\}$ 组成.

5.7　考虑图 5-4 所示的多重图 $G=G(V,E)$.

(a)求顶点和边的数目.

(b)有无多重边或环?若有,它们是什么?

解 ☞ (a) G 有 4 个结点 A,B,C,D 和 6 条边 $e_1,e_2,\cdots,e_6$.(虽然边 e_2,e_3 通过一个点,但不表示这个交点是 G 的一个顶点.)

(b)由于边 e_4 和 e_5 有相同的端 B 和 C,因此 e_4 和 e_5 是多重边.边 e_6 是一个环.

5.8　画出下列图 $G=G(V,E)$ 的图形:

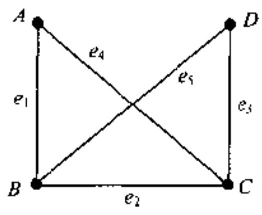


图 5-3

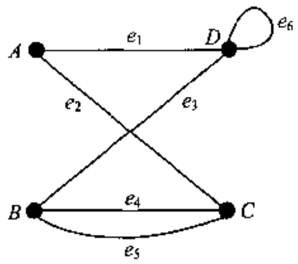
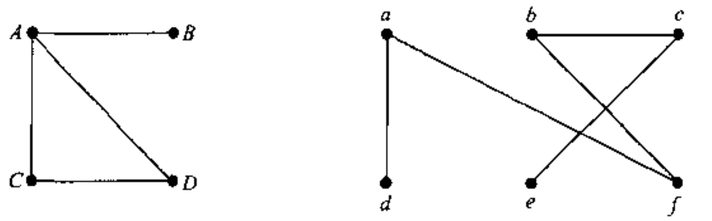


图 5-4

(a) $V=\{A,B,C,D\}$,　$E=[\{A,B\},\{D,A\},\{C,A\},\{C,D\}]$;

(b) $V=\{a,b,c,d,e,f\}$,　$E=[\{a,d\},\{a,f\},\{b,c\},\{b,f\},\{c,e\}]$.

解　☞ 首先画出图的顶点,然后连接适当的顶点以表示图的边,如图 5-5 所示.



(a)　(b)

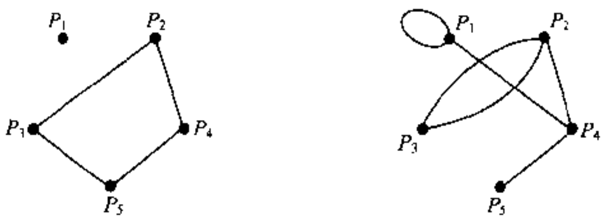
图 5-5

5.9　画出下列多重图 $G(V,E)$的图形,其中 $V=\{P_1,P_2,P_3,P_4,P_5\}$且

(a) $E=[\{P_2,P_4\},\{P_2,P_3\},\{P_3,P_5\},\{P_5,P_4\}]$;

(b) $E=[\{P_1,P_1\},\{P_2,P_3\},\{P_2,P_4\},\{P_3,P_2\},\{P_4,P_1\},\{P_5,P_4\}]$.

解　☞ 就所给的图画出顶点,然后连接适当的顶点以标明边,如图 5-6 所示.(注意(a)是一个图,(b)是一个多重图.)



(a)　(b)

图 5-6

5.10　画出下列图 $G(V,E)$的图形:

(a) $V=\{A,B,C,D\}$, $E=[\{A,B\},\{A,D\},\{B,C\},\{B,D\},\{C,D\}]$;

(b) $V=\{a,b,c,d,e\}$, $E=[\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{d,e\}]$.

解　☞ 对 V 的每一顶点都画一个圆点,且对 E 的每条边$\{x,y\}$从顶点 x 到顶点 y 都画一条曲线,如图 5-7 所示.

5.11　画出下列多重图 $G(V,E)$的图形,其中 $V=\ P_1,P_2,P_3,P_4,P_5\}$,且

(a) $E=[\{P_1,P_5\},\{P_3,P_4\},\{P_2,P_3\},\{P_2,P_5\},\{P_1,P_5\}]$;

(b) $E=[\{P_2,P_4\},\{P_2,P_3\},\{P_5,P_1\}]$.

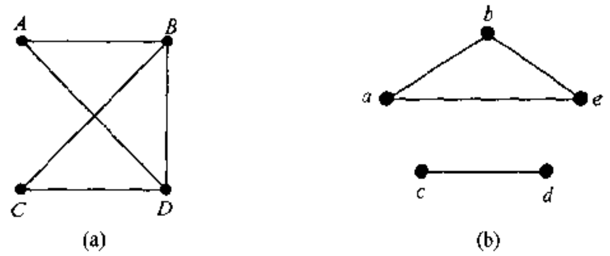


图 5-7

解　☞ 所作的图如图 5-8 所示.

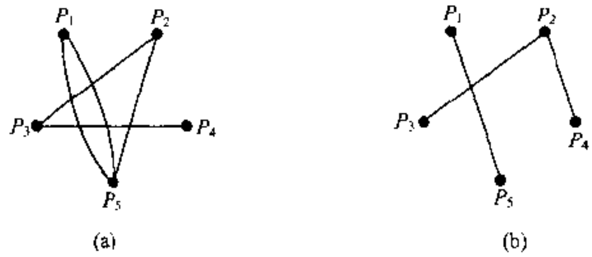


图 5-8

5.12　判定下列多重图 $G(V,E)$是否是图,其中 $V=\{A,B,C,D\}$,且

(a)$E=[\{A,B\},\{A,C\},\{A,D\},\{B,C\},\{C,D\}]$;

(b)$E=[\{A,B\},\{B,B\},\{A,D\}]$;

(c)$E=[\{A,B\},\{C,D\},\{A,B\},\{B,D\}]$;

(d)$E=[\{A,B\},\{B,C\},\{C,B\},\{B,B\}]$.

解　☞ 回忆一下,既无多重边又无环的多重图是一个图,因此

(a)是.

(b)不是.因$\{B,B\}$是一个环.

(c)不是.因$\{A,B\}$和$\{A,B\}$是多重边.

(d)不是.因$\{B,C\}$和$\{C,B\}$是多重边,而且$\{B,B\}$是一个环.

5.13　描述图 5-9 所示的图.

解　☞ 有 5 个顶点,从而

$$V=\{P_1,P_2,P_3,P_4,P_5\}.$$

有 6 条边因此有 6 个顶点偶,于是

$$E=[\{P_1,P_4\},\{P_2,P_3\},\{P_2,P_4\},\{P_2,P_5\},\{P_4,P_5\},\{P_3,P_5\}].$$

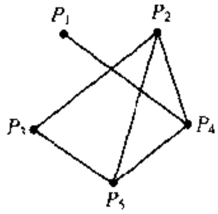


图 5-9

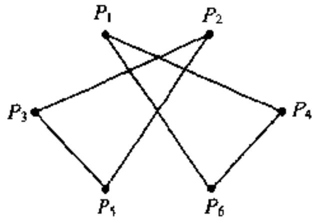


图 5-10

5.14　描述图 5-10 所示的图.

解 ☞ 有 6 个顶点，从而

$$V = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}.$$

有 6 条边，由此有 6 个顶点偶，因此

$$E = [\{P_1, P_4\}, \{P_1, P_6\}, \{P_4, P_6\}, \{P_3, P_2\}, \{P_3, P_5\}, \{P_2, P_5\}].$$

5.15 描述图 5-11 所示的多重图.

解 ☞ 有 5 个顶点，从而

$$V = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}.$$

有 8 条边(其中有 2 条是多重边和一条是环)且由此有 8 个顶点偶，因此

$$E = [\{P_1, P_2\}, \{P_1, P_2\}, \{P_1, P_4\}, \{P_1, P_5\}, \{P_2, P_4\}, \{P_3, P_4\}, \{P_3, P_5\}, \{P_5, P_5\}].$$

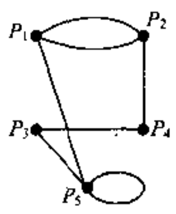


图 5-11

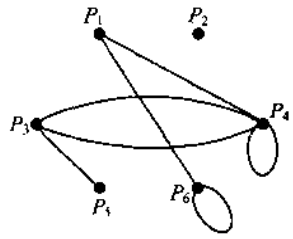


图 5-12

5.16 描述图 5-12 所示的多重图.

解 ☞ 有 6 个顶点，从而

$$V = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}.$$

有 7 条边(其中有 2 条是多重边，两条是环)且由此有 7 个顶点偶，因此

$$E = [\{P_1, P_4\}, \{P_1, P_6\}, \{P_3, P_4\}, \{P_3, P_4\}, \{P_4, P_4\}, \{P_3, P_5\}, \{P_6, P_6\}].$$

5.17 定义一个有限多重图.

解 ☞ 一个多重图是**有限的**，如果 V 和 E 都是有限的. 注意一个有有限个结点的图 G，E 必然有有限条边，因而 G 必是有限的.

5.18 什么是平凡图？空或零图？

解 ☞ **平凡图**是只有一个顶点而没有边的图. 空图是既无顶点又无边的图.

5.19 什么是孤立顶点？图 5-6 中的哪个顶点是孤立的？

解 ☞ 若一个顶点 V 不属于任何一条边，则它是孤立的. 在图 5-6(a)中顶点 P_1 是孤立的.

5.20 设 $G = G(V, E)$ 有 5 个结点. 求 E 的边的最大数 m：若(a) G 是一个图；(b) G 是一个多重图.

解 ☞ (a)从 V 中选取两个顶点的方法有 $C(5,2) = 10$ 种，因此 $m = 10$.

(b)由于允许有多重边，因此 G 可能有任意数目(有限或无穷)条边(以及环)，因此不存在这样的最大数目 m.

5.2 一个顶点的次数

5.21 定义图 G 中邻接和关联的关系.

解 ☞ 设 $e = \{u, v\}$ 是 G 的一条边，即 u 和 v 是 e 的端点，那么说 u 与 v 是**邻接的**，而说 e 是与 u 和 v **相关联的**.

5.22 定义一个顶点的次数和奇偶性(偶或奇的).

解 ☞ 任一图 G 的一个顶点 v 的次数，记作 $\deg(v)$ 等于与 v 相关联的边的数目，或者换句话说，以 v 为端点的边的条数. 我们说顶点 v 是偶的或奇的是依 $\deg(v)$ 是偶或是奇而定.

定理 5.1　一个图的所有顶点的次数之和等于边数的二倍.

5.23　证明定理 5.1.

证　☞ 在计算一个图 G 的顶点次数时每条边计算两次.从这一事实直接得到本定理.

5.24　对于多重图定理 5.1 成立吗?

解　☞ 成立.注意计算环的端点的次数时,环的条数以二倍计算.

5.25　考虑图 5-13 的图 $G=G(V,E)$.(a)用公式表示 G,(b)求 G 的每一顶点的次数和奇偶性,(c)对于 G 验证定理 5.1.

解　☞ (a)图 G 有 5 个顶点,因而 $V=\{a,b,c,d,e\}$,它有 7 个顶点对 $\{x,y\}$,其中顶点 x 和 y 是连接的,因此

$E=[\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,e\},\{c,d\},\{c,e\}]$.

(b)一个顶点的次数等于它所属的边的条数,例如 a 属于边 $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,d\}$,或者等价地,在图 5-13 的图形中 a 引出 3 条边,因此 $\deg(a)=3$.同理, $\deg(b)=3$, $\deg(c)=4$, $\deg(d)=2$, $\deg(e)=2$.于是, c, d 和 e 是偶顶点,而 a 和 b 是奇顶点.

(c)所有顶点的次数之和是 $m=3+3+4+2+2=14$,它等于边数的两倍.

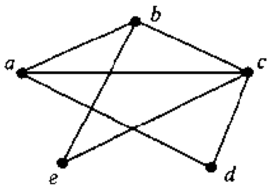


图 5-13

5.26　考虑图 G,其中

$$V(G)=\{A,B,C,D\},$$
$$E(G)=[\{A,B\},\{B,C\},\{B,D\},\{C,D\}].$$

求 G 的每个顶点的次数和奇偶性.

解　☞ 计算每个顶点属于的边的条数,得

$$\deg(A)=1,\quad \deg(B)=3,\quad \deg(C)=2,\quad \deg(D)=2.$$

这样, C 和 D 是偶的,而 A 和 B 是奇的.

5.27　求图 5-11 多重图的每一个顶点的次数.

解　☞ 计算每个顶点引出的边的条数,得到

$$\deg(P_1)=4,\quad \deg(P_2)=3,\quad \deg(P_3)=2,$$
$$\deg(P_4)=3,\quad \deg(P_5)=4.$$

(这里,在 P_5 的环数目,对于计算 P_5 的次数而言,以二倍计算.)

5.28　求图 5-12 多重图的每个顶点的次数.

解　☞ 计算每个顶点引出的边的条数,得到

$$\deg(P_1)=2,\quad \deg(P_2)=0,\quad \deg(P_3)=3,$$
$$\deg(P_4)=5,\quad \deg(P_5)=1,\quad \deg(P_6)=3.$$

(这里,在 P_4 和 P_6 的环的数目,对于计算它们的对应顶点次数时,均以二倍计算.)

5.29　求图 5-9 中图的每个顶点的次数和奇偶性.

解　☞ 计算每个顶点引出的边的数目,得到

$$\deg(P_1)=1,\quad \deg(P_2)=3,\quad \deg(P_3)=2,\deg(P_4)=3,\quad \deg(P_5)=3.$$

因此 P_1, P_2, P_4 和 P_5 都是奇的,而 P_3 是偶的.

5.30　求图 5-10 中图的每个顶点的次数和奇偶性.

解　☞ 计算每个顶点引出的边的数目看到每一顶点都是 2 次的因而都是偶的.

5.31　考虑多重图 G,其中 $V(G)=\{A,B,C\}$以及

$$E(G)=[\{A,C\},\{A,D\},\{B,B\},\{B,C\},\{C,A\},$$
$$\{C,B\},\{D,B\},\{D,D\}].$$

(a)求 G 的每个顶点的次数和奇偶性;

(b)对多重图 G 验证定理 5.1.

解 ☞ (a)计算每个顶点所属的边的数目,或者等价地计算 $E(G)$中每个顶点出现的次数得到

$$\deg(A)=3,\quad \deg(B)=5,\quad \deg(C)=4,\quad \deg(D)=4.$$

因此 A 和 B 是奇的,而 C 和 D 是偶的.

(b)所有这些顶点的次数之和是 $m=3+5+4+4=16$,它等于边的数目(8)的两倍.

5.32 求 G 的顶点的次数之和 m,其中 $V(G)=\{A,B,C,D\}$且

(a)$E(G)=[\{A,B\},\{A,C\},\{B,D\},\{C,D\}]$;

(b)$E(G)=[\{A,B\},\{A,C\},\{A,D\},\{B,A\},\{B,B\},\{C,B\},\{C,D\}]$.

解 ☞ 求 m 的一种方法是求每个顶点的次数,再求所有顶点的次数之和.然而,一个更快的方法是应用定理 5.1,即所要求的结果是边数的两倍.因此

(a)因有 4 条边,因此 $m=2\times4=8$.

(b)因有 7 条边,因此 $m=2\times7=14$.

5.33 设 v 是图(多重图)G 的一个孤立顶点.它的次数是多少?

解 ☞ 若顶点 v 不属于任何一条边,则它是孤立的.这样,v 是孤立顶点当且仅当 $\deg(v)=0$.

5.34 考虑图 $G=G(V,E)$,其中 $V=\{u,v,w\}$,$\deg(v)=4$.

(a)这样的一个图存在吗?若不存在,则为什么?

(b)这样的一个多重图存在吗?若存在,则给出一个例子.

解 ☞ (a)不存在.由于一个图不能有多重边和环,从 v 到另两个顶点的每一个只可以有一条边,因此 $\deg(v)\leqslant2$.

(b)存在.例如,$E=[\{u,v\},\{u,v\},\{v,w\},\{v,w\}]$.

5.35 考虑 $G=G(V,E)$,其中 $V=\{A,B,C,D\}$,且

$$\deg(A)=2,\quad \deg(B)=3,\quad \deg(C)=2,\quad \deg(D)=2.$$

(a)这样的一个图存在吗?若不存在,则为什么?

(b)这样的一个多重图存在吗?

解 ☞ (a)不存在.由于所有顶点的次数之和 m 是边数的两倍(定理 5.1),因此它必为偶数.这里 $m=9$ 是一个奇数.因此这样的图是不存在的.

(b)不存在.对于多重图定理 5.1 也是成立的.

5.3 通路、连通性

5.36 定义一个图(多重图)G 的一条通路及其长度.

解 ☞ 在图 G 中**起点** v_0 和**终点** v_n 的一条**通路**(或**路径**)α 是形式为

$$v_0,e_1,v_1,e_2,v_2,\cdots,e_{n-1},v_{n-1},e_n,v_n$$

的顶点与边的一个交替序列,此处每一条边 e_i 是与结点 v_{i-1}和 v_i 相关联的.边的数目称为 α 的**长度**.在不引起混淆的情况下,我们用边的序列来表示 α,$\alpha=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$,或用顶点的序列来表示之,$\alpha=(v_0,v_1,\cdots,v_n)$.

5.37 定义图(多重图)中的简单通路和迹.

解 ☞ 若一条通路 $\alpha=(v_0,v_1,\cdots,v_n)$的所有顶点是互不相同的,则称它是**简单的通路**.若所有的边是不同的,则称它是**迹**.

5.38 考察一个图(多重图)G.定义 G 中的一条闭路和循环(或圈).

解 ☞ 若一条通路 $\alpha=(v_0,v_1,\cdots,v_n)$中 $v_0=v_n$,即起点(α)=终点(α),则称它是**闭的**.若一条通路是闭的且除 $v_0=v_n$ 外所有其他顶点是不同的,则称它是**循环**(或**圈**).长度为 k 的循环称为 k-循环.因此一个图的任一循环的长度至少是 3.

5.39 设 u 和 v 是图 G 的顶点.定义 u 和 v 之间的距离,记作 $d(u,v)$.

解 ☞ 若 $u=v$,则 $d(u,v)=0$,否则 $d(u,v)$等于 u 与 v 之间最短通路的长度.若 u 与 v 之间不存在通路,则 $d(u,v)$没有定义.

5.40 设 G 是如图 5-14 所示的图.考虑 G 中的下列通路:

(a)$\alpha=(e_1,e_4,e_6,e_5)$;

(b)$\beta=(e_2,e_5,e_3,e_4,e_6,e_3,e_1)$.

将边序列转换成相应的顶点序列.

解 ☞ 在所给的序列中,列出第一条边的起始顶点继之以每条边的终点,得到

(a)$\alpha=(A,B,Z,Y,X)$,

(b)$\beta=(A,X,Y,B,Z,Y,B,A)$.

5.41 设 G 是图 5-14 所示的图.求(a)从顶点 A 到顶点 Z 的所有简单通路;(b)$d(A,Z)$.

解 ☞ (a)没有重复顶点的通路是简单通路.有 4 条这样的简单通路如下:

$$(A,B,Z),\quad (A,B,Y,Z),\quad (A,X,Y,Z),\quad (A,X,Y,B,Z),$$

(b)由于 $\alpha=(A,B,Z)$是从 A 到 Z 的最短通路,其长度为 2.因此 $d(A,Z)=2$.

5.42 设 G 是图 5-14 所示的图.对(a)$k=3$,(b)$k=4$,(c)$k=5$,(d)$k=6$,求一 k-循环.

解 ☞ 一个 k-循环是一条长度为 k 的闭路,它的所有顶点是不同的(除 $v_0=v_n$ 外),因此

(a)(B,Y,Z,B),　　(b)(A,B,Y,X,A),

(c)(A,B,Z,Y,X,A),　　(d)不存在 6-循环.

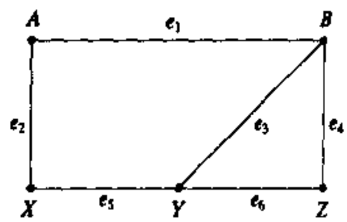


图 5-14

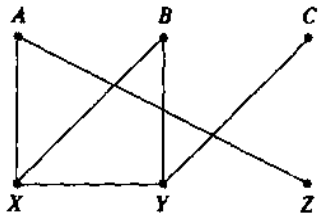


图 5-15

5.43 设 G 是图 5-15 所示的图.判定下列的边序列是否形成通路:

(a)$(\{A,X\},\{X,B\},\{C,Y\},\{X,X\})$;

(b)$(\{A,X\},\{X,Y\},\{Y,Z\},\{Z,A\})$;

(c)$(\{X,B\},\{B,Y\},\{Y,C\})$;

(d)$(\{B,Y\},\{X,Y\},\{A,X\})$.

解 ☞ 若一个边序列的边是这样连接起来的:它的一条的终结点是下一条边的起始点,则这个边序列是通路.

(a)否.边$\{C,Y\}$不接在$\{X,B\}$后面.

(b)否.顶点偶$\{Y,Z\}$不是一条边.

(c)是.

(d)是.因这个序列可重新写成$(\{B,Y\},\{Y,X\},\{X,A\})$.

5.44 设 G 是图 5-15 所示的图.(a)求 A 到 C 的所有简单通路;(b)$d(A,C)$.

解 ☞ (a)从 A 到 C 只有两条简单通路:(A,X,Y,C)和(A,X,B,Y,C).

(b)由于从 A 到 C 的最短通路的长度为 3,因此 $d(A,C)=3$.

5.45 求图 5-15 所示的图 G 中的所有循环.

解 ☞ G 中只有一条循环,即 3-循环 $\alpha=(B,X,Y,B)$.(这里,我们把 α 与具有和 α 相同顶点的循环视为同一的,例如(X,Y,B,X),而且这些循环由调换顶点的顺序得到,例如(B,Y,X,B).)

定理 5.2 从顶点 u 到顶点 v 有一条通路当且仅当从 u 到 v 有一条简单通路.

5.46　证明定理 5.2.

证　☞ 每一条简单通路是一条通路.因此,我们只须证明,若从 u 到 v 有一条通路 α,则从 u 到 v 有一条简单通路.就 α 的长度 n 用归纳法来证明.设 $n=1$,即 $\alpha=(u,v)$.那么 α 是从 u 到 v 的一条简单通路.设 $n>1$,比方说

$$\alpha = (u = v_0, v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}, v = v_n).$$

若没有顶点是重复的,则 α 是从 u 到 v 的一条简单通路.设有一个顶点是重复的,比方说 $v_i = v_j$,此处 $i<j$,那么

$$\beta = (v_0, v_1, \cdots, v_i, v_{j+1}, \cdots, v_n)$$

是从 $u=v_0$ 到 $v=v_n$ 的长度小于 n 的通路.由归纳法,从 u 到 v 有一条简单通路.

5.47　在闭通路、迹、简单通路和循环之间有什么包含关系?

解　☞ 有.根据定义,循环是具有不同顶点的闭通路,因此任一循环都是闭通路.而且.由于具有不同顶点的通路必有不同边,因此任一简单通路都是迹.(循环是迹但不是简单通路.)

5.48　设 G 是图 5-16 所示的图,确定下列序列是否闭通路、迹、简单通路或循环:(a)(B,A,X,C,B);(b)(X,A,B,Y);(c)(B,X,Y,B).

解　☞ (a)这条通路是一循环,因它是闭的且顶点不同.

(b)这条通路是一简单通路,因它的顶点互不相同.它不是循环,因它不是闭的.

(c)这甚至不是一条通路,因$\{X,Y\}$不是一条边.

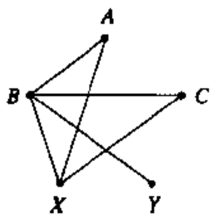


图 5-16

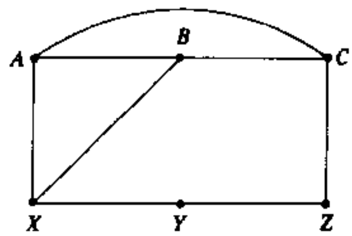


图 5-17

5.49　对下列的每一序列,重新解答习题 5.48:(a)(B,A,X,C,B,Y);(b)(X,C,A,B,Y);(c)(X,B,A,X,C).

解　☞ (a)这条通路是一条迹,因它的边是不同的.它不是简单通路,因顶点 B 是重复的.

(b)这甚至不是一条通路,因$\{C,A\}$不是一条边.

(c)这条通路是一条迹,因它的边是不同的.它不是一条简单通路,因顶点 X 是重复的.

5.50　就下列的每一序列重复习题 5.48:(a)(X,B,A,X,B);(b)(A,B,C,X,B,A);(c)(X,C,B,A).

解　☞ (a)这条通路既不是闭通路也不是迹.(边$\{X,B\}$是重的.)这样,它既不是循环也不是简单通路.

(b)这是一条闭通路.它不是循环,因顶点 B 是重复的.

(c)这是一条简单通路,因所有顶点不同.

5.51　设 G 是图 5-17 所示的图.求(a)从 A 到 Z 的所有简单通路;(b)从 A 到 Z 的所有的迹.

解　☞ (a)若从 A 到 Z 的一条通路没有顶点是重复的(因而没有边是重复的),则它是一条简单通路.有 5 条简单通路:

$$(A,C,Z),\quad (A,B,C,Z),\quad (A,X,Y,Z),\quad (A,B,X,Y,Z),\quad (A,X,B,C,Z).$$

(b)若从 A 到 Z 的一条通路没有重复的边,则它是一条迹.由(a)的 5 条简单通路与

$$(A,X,B,A,C,Z),\quad (A,C,B,A,X,Y,Z),\quad (A,B,C,A,X,Y,Z)$$

合在一起共有 8 条迹.

5.52 就图 5-17 的图 G 求 $d(A,Z)$.

解 ☞ 由于从 A 到 Z 有一条长度为 2 的通路而没有更短的通路,因此 $d(A,Z)=2$.(回忆一下,在一条通路中,长度是边数而不是顶点数.)

连通图

5.53 定义一个连通图(多重图).

解 ☞ 若一个图(多重图) G 的任意两个顶点之间都有一条通路,则称 G 是**连通图(多重图)**.

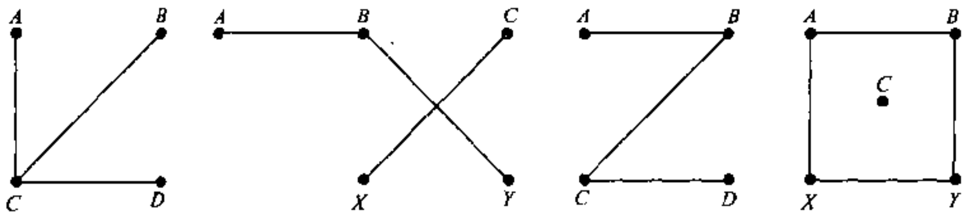
5.54 判定图 5-18 的每一个图是否连通的.

解 ☞ (a)是.图的任何两个顶点间都有一条通路.

(b)否.这里 A,B 和 Y 是连接的,且 C 和 X 是连接的,但从 A,B 或 Y 到另一 C 或 X 没有通路.

(c)是.图任何两个顶点间都有一条通路.

(d)否.从 C 到图的任何其他顶点均无通路.



(a) (b) (c) (d)

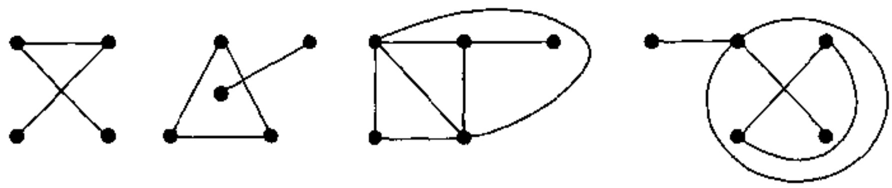
图 5-18

5.55 考虑图 5-19 的多重图.它们中哪一个是(a)连通的;(b)环-自由的(即没有环);(c)图?

解 ☞ (a)只有(i)和(iii)是连通的.

(b)只有(iv)有一个环,即一条边有相同的端点.

(c)只有(i)和(ii)是图.多重图(iii)有多重边,(iv)有多重边且有一个环.



(i) (ii) (iii) (iv)

图 5-19

5.56 考虑图 5-20 的多重图.哪些是(a)连通的;(b)图?

解 ☞ (a)只有(iii)是连通的.(b)只有(iii)是图.

5.57 定义连通图 G 的直径.

解 ☞ G 的**直径**记作 $\mathrm{diam}(G)$,它是任何两个顶点之间的最大距离.

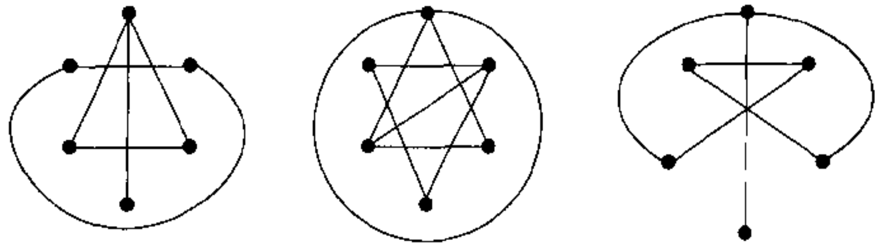
5.58 求图 5-17 的连通图 G 的直径.

解 ☞ 这里 $\mathrm{diam}(G)=2$,因它是任两个顶点之间的最大距离.

5.59 求图 5-15 的连通图 G 的直径.

解 ☞ 注意 $d(C,Z)=4$,且它是 G 中任何两个顶点之间的最大距离.因此 $\mathrm{diam}(G)=4$.

5.60 求图 5-14 中连通图 G 的直径.



(i)　　(ii)　　(iii)

图 5-20

解 ☞ 这里 $d(A,Z)=2$,且它是 G 中任何两顶点间的最大距离.因此 $\mathrm{diam}(G)=2$.

5.4 子图、连通分图、割点、桥

5.61 定义术语(a)子图和(b)满子图.

解 ☞ (a)设 G 和 H 都是图.若 $V(H)\subseteq V(G)$,即 H 的顶点也是 G 的顶点,并且 $E(H)\subseteq E(G)$,即 H 的边也是 G 的边,则 H 是 G 的一个**子图**.换句话说,$H(V',E')$是 $G(V,E)$的一个子图当且仅当 $V'\subseteq V$ 且 $E'\subseteq E$.

(b)设 $H=H(V',E')$是 $E=G(V,E)$的一个子图.若 E'包含端点都在 V'中的 E 的所有的边,则称 H 是 G 的一个**满子图**.在这种情形下,H 称为由 V'**生成的**G 的子图.

5.62 考察图 5-21 的图 $G=G(V,E)$.判定 $H=H(V',E')$是否是 G 的子图,其中

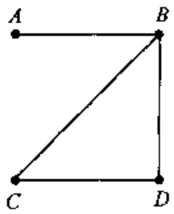


图 5-21

(a)$V'=\{A,B,F\}$且 $E'=[\{A,B\},\{A,F\}]$;

(b)$V'=\{B,C,D\}$且 $E'=[\{B,C\},\{B,D\}]$;

(c)$V'=\{A,B,C\}$且 $E'=[\{A,B\},\{A,C\}]$.

解 ☞ 若 H 是一个图且它的顶点含于 V 中,边含于 E 中,则 H 是 G 的一个子图.

(a)否,顶点 F 不在 G 中.

(b)是.

(c)否,因$\{A,C\}$不是 G 的一条边.

5.63 考察图 5-21 的图 $G=G(V,E)$.判定 $H=H(V',E')$是否是 G 的子图,其中

(a)$V'=\{A,B,D\}$,且 $E'=[\{A,B\},\{A,D\}]$;

(b)$V'=\{B\}$且 $E'=\varnothing$,空集;

(c)$V'=\{A,B,C\}$,且 $E'=[\{A,B\},\{B,C\},\{B,D\}]$.

解 ☞ (a)否.因$\{A,D\}$不是 G 的一条边.

(b)是.

(c)否.虽然 $V'\subseteq V$ 且$E'\subseteq E$,但 H 不是一个图,因此 H 不是G 的一个子图.具体地说,E'的$\{B,D\}$的端点不在 V'中.

5.64 考察图 5-21 的图 $G=G(V,E)$.求由(a)$V'=\{A,B,C\}$;(b)$V'=\{A,C,D\}$;(c)$V'=\{A,D\}$生成的 G 的(满)子图.

解 ☞ 这里 E'由端点均在 V'中的 E 的所有的边组成.因此

(a)$E'=[\{A,B\},\{B,C\}]$;

(b)$E'=[\{C,D\}]$;

(c)$E'=\varnothing$,即空集.

5.65 考察图 5-21 的图 $G=G(V,E)$.求 G 的满子图的数目

解 ☞ $V=\{A,B,C,D\}$的每一子集确定一个满子图.V 有 $m=2^4=16$ 个子集,从而 G 有 16 个

满子图.(我们包括空图,它既无顶点又无边.)

连通分图

5.66 设 G 是一个图(多重图).定义 G 的一个连通分图.用一个例子解释.

解 ☞ G 的一个**连通分图**是 G 的一个子图,它不包含在 G 的更大的连通子图中.显然,一个连通分图是由其顶点生成的满子图,因此我们可列出它的顶点来表明一个分图.清楚地,G 可以划分成分图.图 5-22 表明一个图有三个连通分图:{A, C, X},{B}和{Y, Z}.

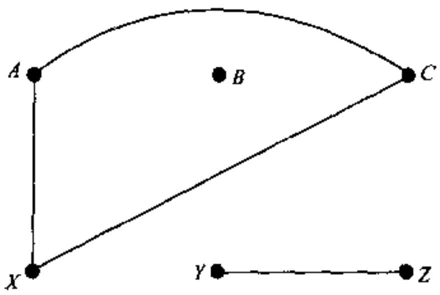


图 5-22

5.67 求图 5-23 的图 G 的连通分图.

解 ☞ 以任一顶点开始,比方说 A,找与 A 连接的所有顶点,这就得到分图{A, B, Y, Z}.其次,选取不在这个分图的一个顶点,重复上述过程得到另一个分图.按此方法继续下去,直到识别出所有分图为止.就该图,我们又得到两个分图{C, X, Q}和{P, R}.因此 G 的分图是{A, B, Y, Z},{C, X, Q},{P, R}.

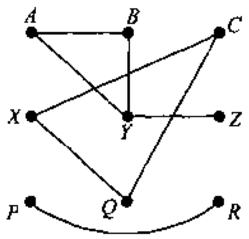


图 5-23

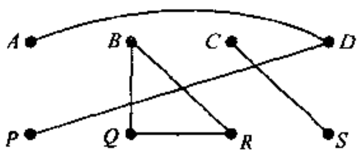


图 5-24

5.68 求图 5-24 的图 G 的连通分图.

解 ☞ 应用习题 5.67 的方法,得到分图{A, D, P, S, C},{B, Q, R}.

5.69 求 G 的连通分图,此处 $V(G)=\{A,B,C,X,Y,Z\}$ 且

(a) $E(G)=[\{A,X\},\{C,X\}]$;

(b) $E(G)=[\{A,Y\},\{B,C\},\{Z,Y\},\{X,Z\}]$.

解 ☞ (a)这里,A 与 C 和 X 连接,B, Y 和 Z 是孤立顶点.因此{A, C, X},{B},{Y}和{Z}是 G 的连通分图.

(b)这里 A, Y, Z 和 X 是连接的,B 和 C 是连接的,因此{A, X, Y, Z}和{B, C}是 G 的连通分图.

5.70 求 G 的连通分图,此处 $V(G)=\{A,B,C,P,Q\}$ 且

(a) $E(G)=[\{A,C\},\{B,Q\},\{P,C\},\{Q,A\}]$;

(b) $E(G)=\varnothing$,即空集.

解 ☞ (a)这里 G 是连通的,即每一顶点与其余顶点连接.因此 G 有一个分图 $V(G)=\{A,B,C,P,Q\}$.

(b)由于 $E(G)$ 是空集,所有的顶点是孤立点,因此{A},{B},{C},{P}和{Q}都是 G 的连通分图.

5.71 设 G 是一个图.对于顶点 u 和 v,若 $u=v$ 或从 u 到 v 有一条通路,则定义 $u\sim v$.这表明~是关于 $V(G)$ 上的一种等价关系.如何描述由~诱导出等价类?

解 ☞ 根据定义,对每一 $u\in V(G)$,都有 $u\sim u$,因此~是自反的.假设 $u\sim v$,则从 u 到 v 有一条通路 α.反之,α 给出从 v 回到 u 的一条通路.因此有 $v\sim u$,从而~是对称的.最后,设 $u\sim v$ 且 $v\sim w$,则从 u 到 v 有一条通路 α 以及从 v 到 w 有一条通路 β.而且,终点$(\alpha)=v=$起点(β).因此 α 可由 β 连接上,给出从 u 到 w 的一条通路 $\alpha\beta$.于是有 $u\sim w$,从而~是传递的.由~确定的等价类是

G 的连通分图.

子图 $G-v$，割点

5.72　定义子图 $G-v$，此处 v 是 G 的一个顶点.

解　☞ $G-v$ 是从顶点集合 $V(G)$ 删去顶点 v 且从 $E(G)$ 中删去与 v 相关联的所有边得到的 G 的子图. 换句话说，$G-v$ 是由剩下的顶点生成的 G 的满子图.

5.73　定义连通图 G 的一个割点.

解　☞ 若 $G-v$ 是不连通的，则顶点 v 称为 G 的一个**割点**.（更一般地，对于任一图 G，若 $G-v$ 有比 G 更多的连通分图，则 v 是一个割点.）

5.74　设 G 是图 5-25 所示的图. 求 (a) $G-A$；(b) $G-B$；(c) $G-C$.

解　☞ 从 G 删去给定的顶点和所有与该点相关联的边得到图 5-26 所示的图.

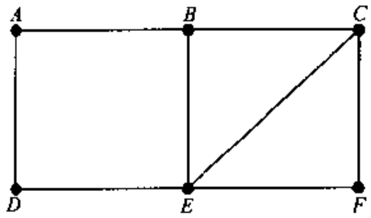
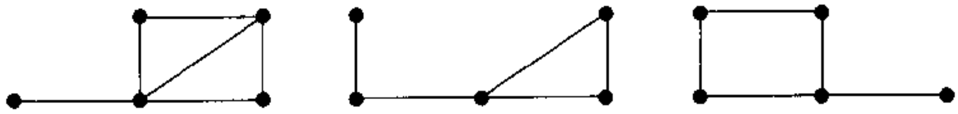


图 5-25



(a)　(b)　(c)

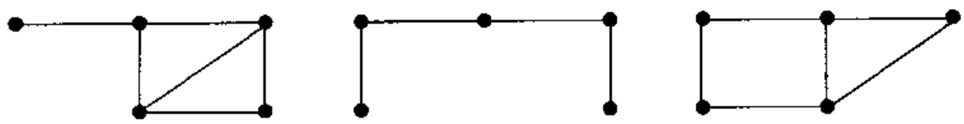
图 5-26

5.75　设 G 是图 5-25 所示的图. 求 (a) $G-D$；(b) $G-E$；(c) $G-F$.

解　☞ 见图 5-27.

5.76　设 G 是图 5-25 所示的图. G 有割点?

解　☞ 图 5-26 和 5-27 表明，对 G 的任何一个顶点 v，$G-v$ 是连通的. 因此，G 没有割点.



(a)　(b)　(c)

图 5-27

5.77　设 G 是图 5-28 所示的图. 求 (a) $G-A$；(b) $G-B$；(c) $G-C$.

解　☞ 从图中删去给定的顶点和所有与该顶点相关联的边得到的图，如图 5-29 所示.

5.78　设 G 是图 5-28 所示的图. 求 (a) $G-X$；(b) $G-Y$；(c) $G-Z$.

解　☞ 见图 5-30.

5.79　设 G 是图 5-28 所示的图. G 有割点吗?

解　☞ 图 5-29(b) 和 5-30(b) 表明仅仅 $G-B$ 和 $G-Y$ 是不连通的. 因此 B 和 Y 是 G 的割点.

5.80 设 G 是图,其中 $V(G)=\{A,B,C,X,Y,Z\}$, $E(G)=[\{A,C\},\{A,X\},\{A,Y\},\{B,Y\},\{B,Z\}]$. (a)求 $G-A$;(b)确定 $G-A$ 的连通分图的数目.

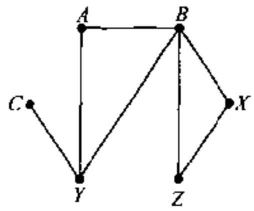
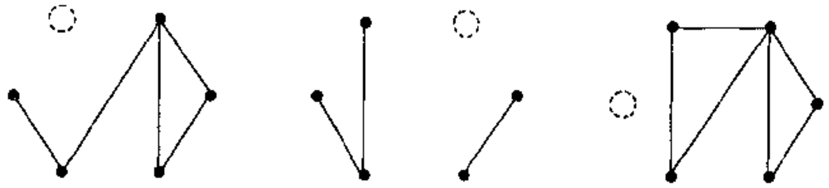


图 5-28

解 ☞ (a)从 $V(G)$ 删去 A 以及从 $E(G)$ 删去与 A 相关联的所有边得到

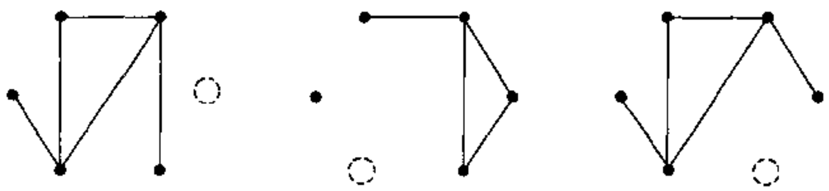
$$V(G-A)=\{B,C,X,Y,Z\},$$
$$E(G-A)=[\{B,Y\},\{B,Z\}].$$

(b)这里 B, Y 和 Z 是连接的,且 C 和 X 是孤立点(在 $G-A$ 中). 因此



(a) $G-A$　　(b) $G-B$　　(c) $G-C$

图 5-29



(a) $G-X$　　(b) $G-Y$　　(c) $G-Z$

图 5-30

$\{B,Y,Z\}$, $\{C\}$ 和 $\{X\}$ 是 $G-A$ 的连通分图.

5.81 设 G 是图 5-15 的图. G 有割点吗?

解 ☞ 删去 A, X 或 Y(以及与这些顶点相关联的边),则将 G 分离,因此 A, X 和 Y 是割点.

5.82 设 G 是图 5-16 的图. G 有割点吗?

解 ☞ 只要移去 B(以及与 B 相关联的边),则将 G 分离,因此只有 B 是割点.

子图 $G-e$,桥

5.83 定义子图 $G-e$,此处 e 是 G 的一条边.

解 ☞ $G-e$ 是从 G 的边集合中只是删去 e 得到的. 这样, $V(G-e)=V(G)$ 且 $E(G-e)=E(G)\setminus\{e\}$.

5.84 定义连通图 G 的桥.

解 ☞ 若 $G-e$ 是不连通的,则边 e 是 G 的桥.(一般地,若 $G-e$ 比 G 有更多连通分图,则 e 是 G 的桥.)

5.85 设 G 是图 5-21 的图. 求(a) $G-\{A,B\}$;(b) $G-\{B,C\}$;(c) $G-\{B,D\}$;(d) $G-\{C,D\}$.

解 ☞ 只要从图删去给定的边,得到相应的图在图 5-31 中.

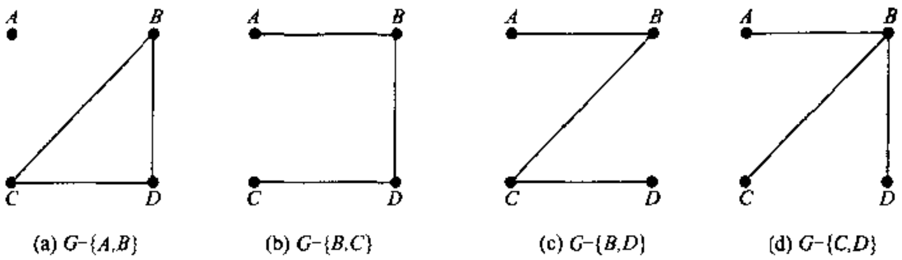


图 5-31

5.86　设 G 是图 5-21 的图. G 有桥吗?

解　☞ 图 5-31 表明,只有 $G-\{A,B\}$ 是不连通的,因此 $\{A,B\}$ 是 G 的一座桥并且是仅有的一座桥.

5.87　设 G 是图 5-15 的图. G 有桥吗?

解　☞ G 有三座桥 $\{A,X\}$, $\{A,Z\}$ 和 $\{Y,C\}$. 删除 G 的其他任一条边不能将 G 分离.

5.88　设 G 是图 5-16 的图. G 有桥吗?

解　☞ 只有 $\{B,Y\}$ 能将 G 分离,因而 $\{B,Y\}$ 是 G 的惟一桥.

5.89　设 G 是图 5-24 的图. G 有桥吗?

解　☞ 这里, G 有两个连通分图. 删除 $\{C,S\}$ 或 $\{D,S\}$ 则将 G 分成三(多于二)个连通分图. 因此 $\{C,S\}$ 和 $\{D,S\}$ 都是桥. (译者注: $\{A,D\}$ 和 $\{D,P\}$ 也是 G 的桥.)

5.90　设 G 是习题 5.80 的连通图. G 有桥吗?

解　☞ 每条边都可把 G 分离开. 因此 G 有五座桥.

5.5　可穿程多重图

这一节讨论可穿程多重图. 除非讨论中图和多重图的差别是不可少和不言而喻的,可视为图又可视为多重图时,可以使用图这个术语.

5.91　结合一个例子定义一个可穿程图.

解　☞ 如果一个多重图 G 可用一条曲线无中断地画出来并且没有重复的边,这就是说,如果有一条含所有顶点而恰好用每条边一次的通路,那么说 G 是**可穿程的**. 这样的一条通路必为一条迹(因没有边被重复二次),并称其为**可穿程迹**. 显然,一个可穿程多重图必定是连通的. 图 5-32(b)表示图 5-32(a)的多重图的一条可穿程迹. (为标明该迹的方向,这个图形丢掉所遇到的顶点,它实际上是被穿透过去.)

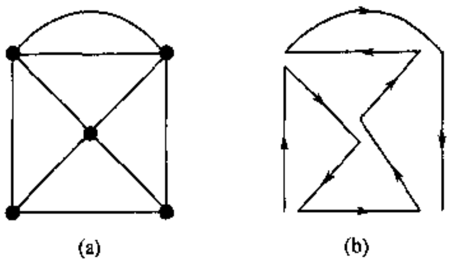


图 5-32

5.92　假设一个多重图是可穿程的,一条可穿程迹不以某一顶点 P 为起点或终点. 证明 P 是偶顶点.

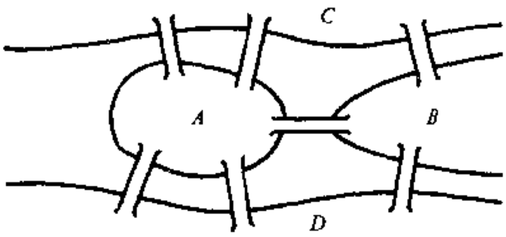
证　☞ 无论什么时候,可穿程迹由一条边进入 P,而总有一条非前面的边使迹离开 P. 这样,这条迹成对地用边与 P 相关联,因而正如所要证明的, P 是偶次的.

5.93　证明有多于两个奇顶点的多重图 G 是不可穿程的.

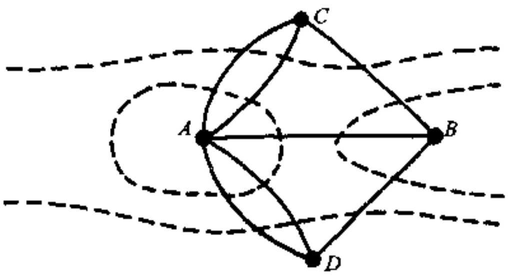
证　☞ 假设 G 是可穿程的, Q 是 G 的一个奇顶点. 根据习题 5.92, 一条可穿程迹必须以 Q 为起点或终点. 因此 G 不可能有多于两个奇顶点.

5.94 讨论哥尼斯堡(Königsberg)桥问题和它的解.

解 ☞ 18世纪东普鲁士的哥尼斯堡城有两个岛和七座桥,如图5-33(a)所示.问题:无论从何处开始和何处终止,一个人能走过所有七座桥而不经过任一座桥两次走遍全城吗?哥尼斯堡人关于这个问题写信给著名的瑞士数学家欧拉(Euler).欧拉于1736年证明了这样的行走是不可能的.他用点替代两个岛和江的两岸而用曲线替代桥,便得到图5-33(b).不难看出,在哥尼斯堡行走是可能的当且仅当图5-33(b)所示的多重图是可穿程的.因此一个人经过每座桥一次走遍哥尼斯堡是不可能的.



(a) 于1736年的哥尼斯堡



(b) 欧拉的图表示

图 5-33

5.95 定义一个欧拉图和一条欧拉迹.

解 ☞ 若一个图(多重图)G有一条闭的可穿程迹,称为**欧拉迹**,则G称为**欧拉图**.

定理5.3(欧拉) 一个有限的连通图G是欧拉图的充分必要条件是每一个顶点都是偶次的.

推论5.4 任何一个具有两个奇顶点的有限连通图都是可穿程的,一条可穿程迹可以以一个奇顶点为起点且以另一个奇顶点为终点.

5.96 证明定理5.3.

证 ☞ 设G是欧拉图,T是一条欧拉迹.对G的任一顶点v,迹T进入v而又离开v,进入和离开的次数相等而没有重复任何一条边.因此v是偶次的.

反之,假设G的每一个顶点都是偶次的.我们构造一条欧拉迹.一条迹T_1以任一边e开始.相继地增加边延伸它.若T_1不在某一步闭合,比方说,T_1开始于u但终止在$v\neq u$,则出现在T_1中的只是奇数条边与v相关联,因此我们可以用另外一条与v相关联的边来延伸T_1.这样,我们可继续延伸T_1直到T_1回到它的起始顶点v,即直到T_1是闭合的.若T_1包含G的所有边,则T_1是欧拉迹.

假设T_1不包含G的所有的边.考察从G删去T_1的所有边得到图H.H可能是不连通的,但由于T_1包含偶数条边与任一顶点相关联,因此H的每一顶点是偶次的.由于G是连通的,因此有H的一条边e',其一个终点u'在T_1中.我们构造H中的一条迹T_2,起始于u'并用到e'.由于H的所有顶点是偶次的,我们可以继续在H中延伸T_2直到它回到u',如图5-34所画的.显然,我们可以把T_1和T_2合起来形成G的一条更长的闭迹.我们继续这个过程,直到G的所有边都用到.最后我们得到一条欧拉迹,因此G是欧拉图.

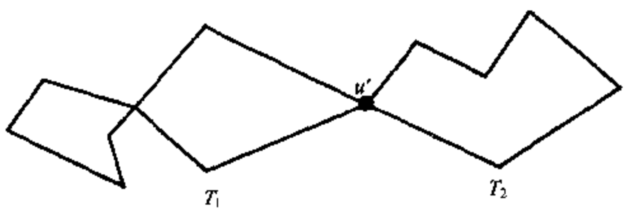


图 5-34

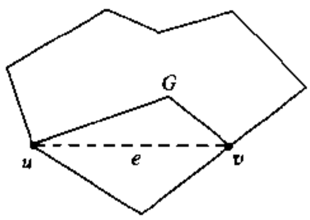


图 5-35

5.97 证明推论 5.4.

证 ☞ 假设 G 是一个有限连通图,它只有两个奇次点,比方说 u 和 v. 在图 G 中,从 u 到 v 加上一条边 e 形成新的图 $G' = G \cup \{e\}$,如图 5-35 所示. 于是 G' 的所有顶点都是偶次的. 据定理 5.3, G' 有一条闭合的穿程迹 α. 由于 α 是闭合的,不失一般性,我们可以假设 α 由 e 开始. 设 β 是没有它的头一条边 e 的通路. 那么, β 是 G 的起始于 v 的而终点在 u 的一条可穿程迹. 推论得证.

5.98 判定图 5-36 的各图是否可穿程.

解 ☞ 求每一顶点的次数,然后确定是否所有的顶点都是偶次的或者恰好两个顶点是奇次的. 若是这两种情形的任一种情形,则该图是可穿程的.

(a)是. 因它的顶点中恰有两个 A 和 D 是奇次的.

(b)是. 因所有的顶点都是偶次的.

(c)否. 因所有 4 个顶点都是奇次的.

(d)是. 因它的顶点中恰有两个 B 和 C 是奇次的.

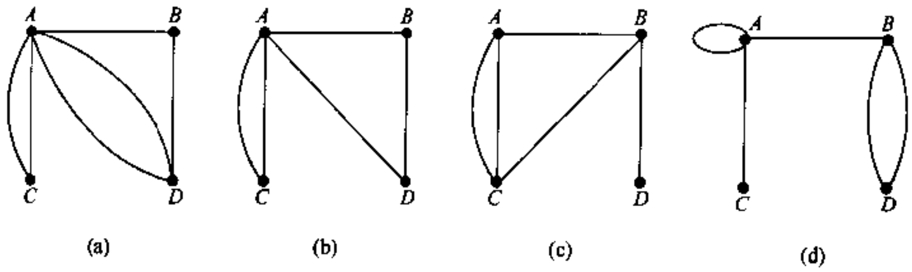


图 5-36

5.99 判定下列图 G 的哪些是可穿程的,其中 $V(G) = \{A, B, C, D\}$ 且

(a) $E(G) = [\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\}, \{D, A\}]$;

(b) $E(G) = [\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}, \{D, A\}]$;

(c) $E(G) = [\{A, B\}, \{C, D\}, \{B, A\}, \{C, C\}, \{D, C\}]$.

解 ☞ 如同习题 5.98,求每个顶点的次数,然后确定所有的顶点是不是偶次的或者是不是恰有两个奇次顶点.

(a)是. 因所有的顶点是 2 次的.

(b)不是. 因所有的顶点都是 3 次的.

(c)不是. 虽然所有的顶点都是偶次的,但此图是不连通的.

5.100 判定图 5-37 中的哪些图是可穿程的.

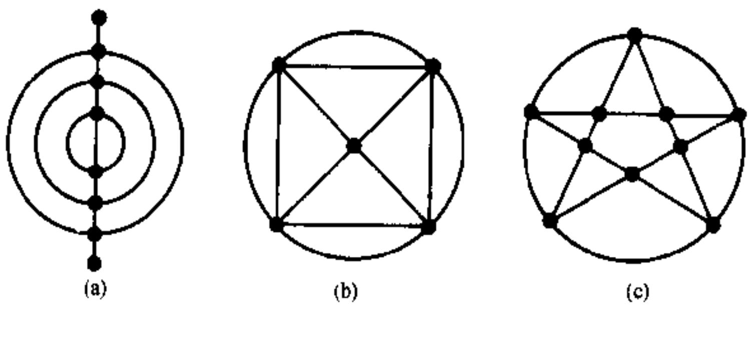


图 5-37

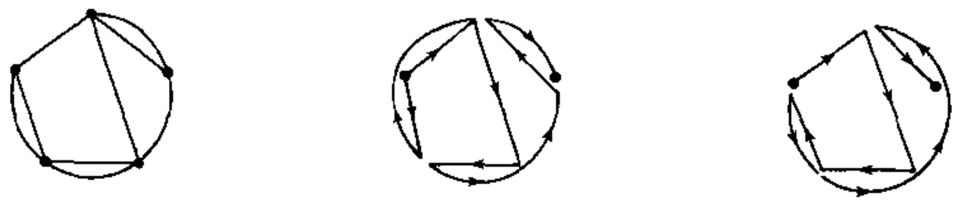
解 ☞ (a)可穿程的.因6个顶点是偶次的,两个是奇次的.

(b)不可穿程的.因有4个奇顶点.

(c)可穿程的.因所有10个顶点都是偶次的.

5.101 求图5-38(a)的多重图的可穿程迹.

解 ☞ 有许多可能的解,但它们都起始于一个奇次顶点而终止于另一个奇次顶点.图5-38(b)和图5-38(c)给出两个可能的解.



(a) (b) (c)

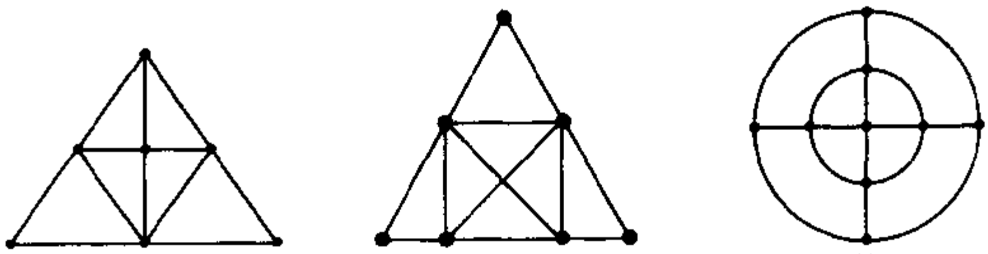
图5-38

5.102 判定图5-39的哪些图是可穿程的.

解 ☞ (a)可穿程的.因5个顶点是偶次的和两个顶点是奇次的.

(b)可穿程的.因5个顶点是偶次的和两个顶点是奇次的.

(c)不可穿程的.因4个外围顶点都是奇次的.



(a) (b) (c)

图5-39

5.103 求图5-40(a)的多重图的穿程迹.

解 ☞ 有许多可能解,但它们都必须从一个奇次顶点开始而终止于另一奇次顶点.图5-40(b)给出这样的一个解.



(a) (b)

图5-40

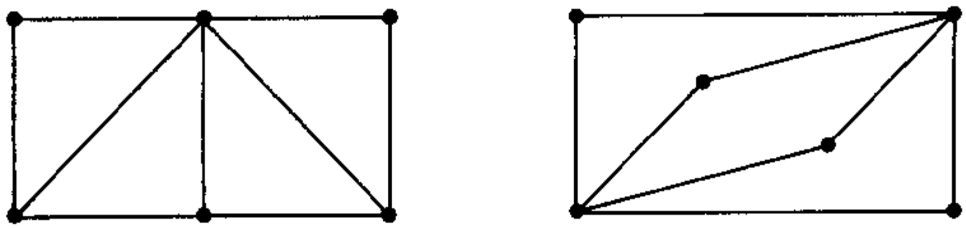
5.104 定义一个哈密顿(Hamilton)图.

解 ☞ **哈密顿图**是具有经过每一个顶点仅仅一次的一条闭通路的图.这样一条通路是一个循环,因而称为**哈密顿循环**.注意,欧拉循环只用到每一条边一次但可重复经过顶点,而哈密顿循环每

个顶点只经过一次(除非头一个和最后一个顶点)但可跳过一些边.

5.105 画一个具有 6 个顶点的哈密顿图但不是欧拉图.

解 ☞ 这个问题有许多解,其中一个解如图 5-41(a)所示.然而每个解必须有一个循环,它必须经过每个顶点一次(哈密顿),但无必要有经过每一条边一次的一条闭迹(欧拉).注意,当选取的哈密顿图标出后,只要寻找奇次顶点便易确定它是否是欧拉图.至少存在一个这样的顶点的图将不是欧拉图.



(a) 哈密顿而非欧拉　　　(b) 欧拉而非哈密顿

图 5-41

5.106 画一个有 6 个顶点的欧拉图但不是哈密顿图.

解 ☞ 如同习题 5.105,有许多可能的解,其中一个解如图 5-41(b)所示.然而,每一个解必须有一条只用到每条边一次的闭迹(欧拉),但无必要有经过每个顶点仅一次的一个循环(哈密顿).从欧拉定理我们知道所有顶点都是偶次的图是欧拉图.但是,标出所选的欧拉图后没有简单的准则来确定它是否是哈密顿图.

5.107 假设 G 是一个有 3 个顶点的连通图.证明 G 是可穿程的.

证 ☞ 因为顶点的次数之和必为偶数,因此 G 不可能有一个或 3 个奇次顶点.这样,G 必然只有偶顶点或者两个奇顶点和一个偶顶点.在任一情形下,G 是可穿程的.

5.108 求图 G 的一个穿程迹,此处

$$V(G) = \{A, B, C, D\},$$
$$E(G) = [\{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}].$$

解 ☞ 这里 C 和 D 是奇顶点,因此一条迹必开始于 C 而结束于 D 或反之.这样的一条迹是 $\alpha = (C, A, D, B, C, D)$.

5.109 证明可从一个多重图 G 加上或删除环,G 保持可穿程或者不可穿程.

证 ☞ 图 G 的任一顶点 v 的次数依顶点增加或删除一个环而相应地增加或减少 2.这样不会改变 v 的奇偶性(奇或偶).因此,G 有零或两个奇顶点的情形,也不会因增加或删除环而改变顶点的奇偶性.

5.6 特殊图

有许多不同类型的图.这一节,我们定义其中四类:完全图,正则图,偶图和树图.(这里的术语不包含多重图.)

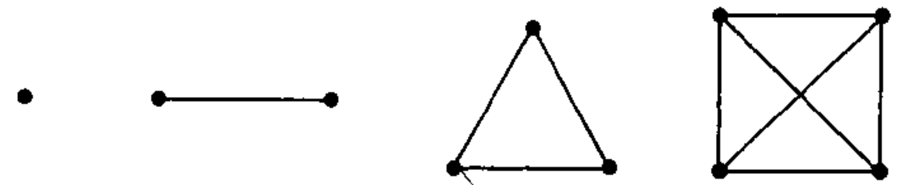
5.110 定义一个完全图.

解 ☞ 若一个图 G 的每个顶点都与其他的每个顶点连接,则称 G 是**完全图**.具有 n 个顶点的完全图用 K_n 表示.

5.111 画出完全图 K_1, K_2, K_3, K_4 的图形.

解 ☞ 首先画出 n 个适当的顶点,然后从每一个顶点到其他每一个顶点画一条边.所要求的图形如图 5-42(a)所示.

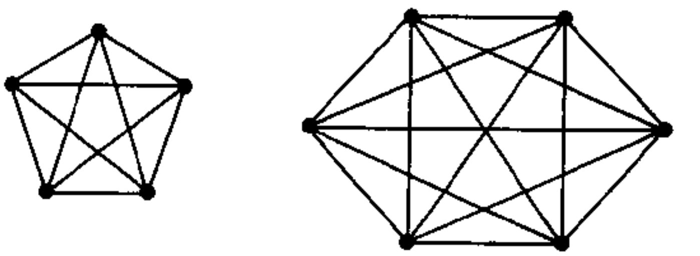
5.112 画出完全图 K_5 和 K_6.



K_1 K_2 K_3 K_4

图 5-42(a)

解 ☞ 见图 5.42(b).



K_5 K_6

图 5-42(b)

5.113 求完全图 K_n 的边数 m.

解 ☞ 每对顶点决定一条边.由于有 $C(n,2)$种方法选取 n 个顶点的两个顶点,因此

$$m = C(n,2) = n(n-1)/2.$$

5.114 求图(a)K_8,(b)K_{12}和(c)K_{15}的边数.

解 ☞

(a) $m=\frac{8\cdot 7}{2}=28$, (b)$m=\frac{12\cdot 11}{2}=66$, (c)$m=\frac{15\cdot 14}{2}=105$.

5.115 完全图 K_n 是连通的,这是因为它的每个顶点都与其他每个顶点连接.求$\mathrm{diam}(K_n)$.

解 ☞ 这里,对于 K_n 中任何两个不同顶点 u 和 v,$d(u,v)=1$.因此 $\mathrm{diam}(K_n)=1$.

5.116 求 K_n 的每个顶点的次数.

解 ☞ 每一个顶点与其余 $n-1$ 个顶点连接.因此,对于 K_n 的每一个顶点 v,$\deg(v)=n-1$.

5.117 n 是哪些值时,K_n 是可穿程的?

解 ☞ 若 n 是奇数,则由于 $\deg(v)=n-1$,因而每一个顶点都是偶次的.因此,当 n 为奇数时,K_n 是可穿程的.而且,由于 K_2 只有一条边连接两个顶点,因此它是可穿程的.然而,当 $n>2$ 且 n 为偶数时,完全图将有 n(多于 2)个奇次顶点,从而它是不可穿程的.

5.118 定义一个正则图.

解 ☞ 一个图 G 是 **k 次正则**或 **k-正则的**,如果每一顶点具有次数 k.换句话说,若一个图的每个顶点具有相同的次数,则它是正则的.

5.119 描述和画出次数为 0,1 和 2 的连通正则图.

解 ☞ 连通的 0-正则图是只有一个顶点而无边的平凡图.连通的 1-正则图是有两个顶点和一条连接它们的边的图.具有 n 个顶点的 2-正则图是一个简单的 n-循环组成的.图 5-43 表示连通的 0-正则和 1-正则以及一些连通的 2-正则图.

5.120 假设 r 是一个奇整数.证明一个 r-正则图必有偶数 n 个顶点.

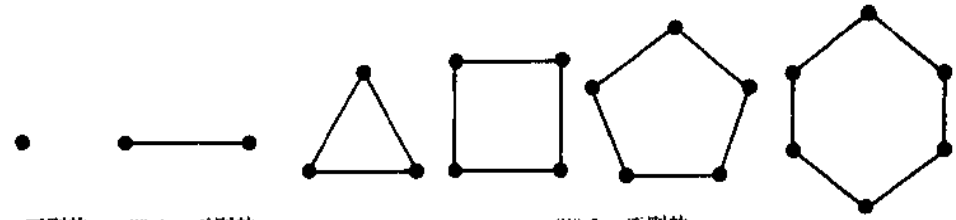


图 5-43

证 ☞ 设 S 是具有 n 个顶点的任一 r -正则图的次数之和. 于是 $S = rn$. 据定理 5.1, 和 S 必为偶数. 若 r 是奇数, 则 n 必为偶数.

5.121 求完全的正则图 K_n 的那些 n 的值.

解 ☞ K_n 的每一个顶点具有次数 $n-1$. 这样, 对于每一个 n, 图 K_n 是 $n-1$ 次正则的.

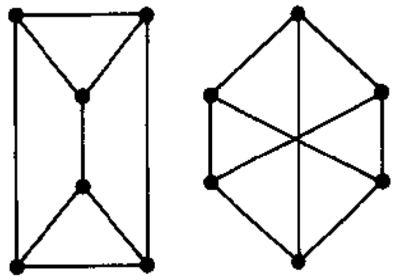


图 5-44

5.122 画出两个有 6 个顶点的 3 -正则图.

解 ☞ 见图 5-44.

5.123 画出两个具有 7 个顶点的 3 -正则图.

解 ☞ 由于一个 3 -正则图必须有偶数个顶点, 因此不存在这样的图(见习题 5.120).

5.124 画出两个具有 8 个顶点的 3 -正则图.

解 ☞ 参见图 5-45. 因只是图(b)有两个 5 -循环, 因此这两个图是不同的.

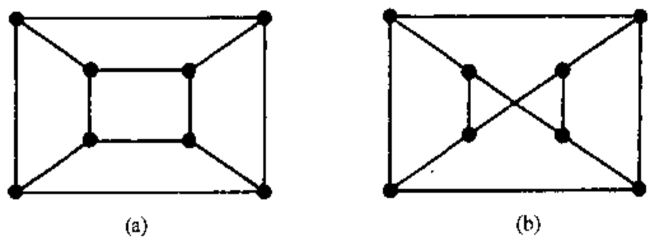


图 5-45

5.125 定义一个偶图和一个完全偶图.

解 ☞ 若一个图 G 的顶点集合 V 可分成两个子集 M 和 N 使得 G 的每条边连接 M 的一个顶点与 N 的一个顶点, 则称 G 是**偶图**(或**二分图**). 一个完全偶图是指 M 的每个顶点与 N 的每个顶点相连接, 用 $K_{m,n}$ 表示它, 其中 m 是 M 的顶点数以及 n 是 N 的顶点数. 为了标准化, 我们假定 $m \leqslant n$.

5.126 求完全偶图 $K_{m,n}$ 的边数.

解 ☞ m 个顶点的每一个与 n 个顶点的每一个连接, 因此 $K_{m,n}$ 有 mn 条边.

5.127 画出完全偶图 $K_{2,3}$, $K_{3,3}$ 和 $K_{2,4}$.

解 ☞ 为了画一个完全偶图, 把适当数目的顶点恰好置于两平行列中然后把一组的所有顶点与另一组的所有顶点连接起来. 所得到的图如图 5-46 所示.

5.128 确定任一完全偶图的直径.

解 ☞ 由于 $K_{1,1}$ 只有两个顶点且它们之间的最短通路的长度为 1, 因此 $K_{1,1}$ 的直径是 1. 对于所有其他的偶图, 由于或在 M 中或在 N 中任两点恰以距离为 2 相隔(一条边到达另一子图的顶点又

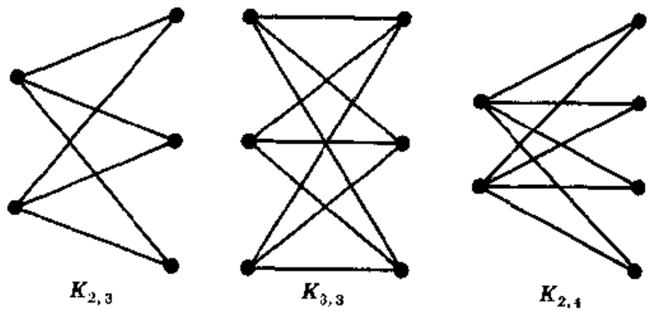


图 5-46

返回原子图),因此直径为 2.

5.129　画出图 $K_{2,5}$.

解　☞ $K_{2,5}$由 7 个顶点组成,分两个顶点,比方说 u_1 和 u_2 在集合 M 中,5 个顶点,比方说 v_1, v_2, v_3, v_4 和 v_5 在集合 N 中,且所有可能的边从顶点 u_i 到顶点 v_j.所要求的图如图 5-47 所示.

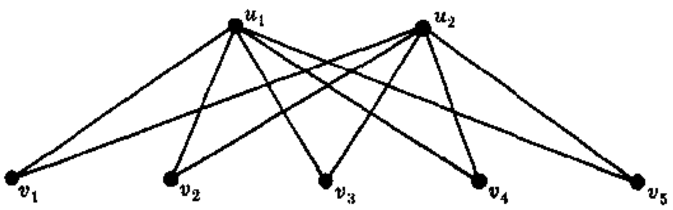


图 5-47

5.130　什么样的连通图既是正则又是偶的?

解　☞ 由于偶图 $K_{m,m}$的每一顶点与另 m 个顶点连接因而是 m 次的,因此 $K_{m,m}$是 m 次正则图.若删除 m 条分离边,则 $K_{m,m}$的子图也可以是正则的.例如,图 5-48 所示的 $K_{4,4}$的子图是 3-正则的.我们可连续删除 m 条分离边,且每次得到一个次数减少 1 的正则图.这些图可能是不连通的,但在任一情况下,它们的连通分图具有所要求的特性.

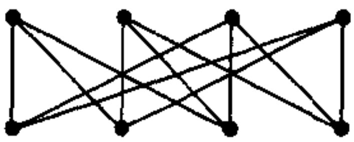


图 5-48

树

这一小节,引进树图概念.这样的树图将更全面地覆盖在下两章中.这里我们只是给出它的定义和一些例子.

5.131　定义循环-自由和树图.

解　☞ 若一个图 G 没有循环,则说 G 是**循环-自由或非循环的**.若 G 没有循环且是连通的,则称 G 为**树**.

5.132　画出 4 个或更少顶点的所有树.

解　☞ 参见图 5-49.注意有两棵树具有 4 个顶点.有一个顶点而无边的图称为平凡树(图 5-49(a)).

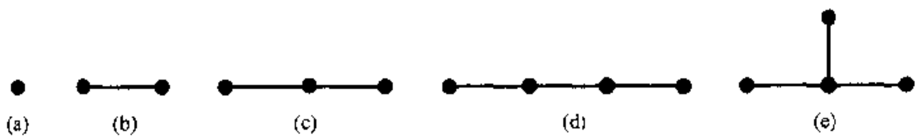


图 5-49

5.133　画出有 5 个顶点的所有树.

解　☞ 首先画出 5 个顶点,然后连接它们使得不产生循环.在这个练习中,我们必须注意,由于可能正是不同画法出现两个不同树,因此不重复画树.有三种具有 5 个顶点的树,如图 5-50 所示.

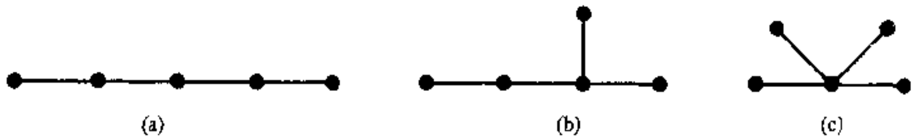


图 5-50

5.134　画出有 6 个顶点的所有树.

解　☞ 如同习题 5.133,我们必须注意不重复任一种树.有 6 个顶点的六种树如图 5-51 所示.

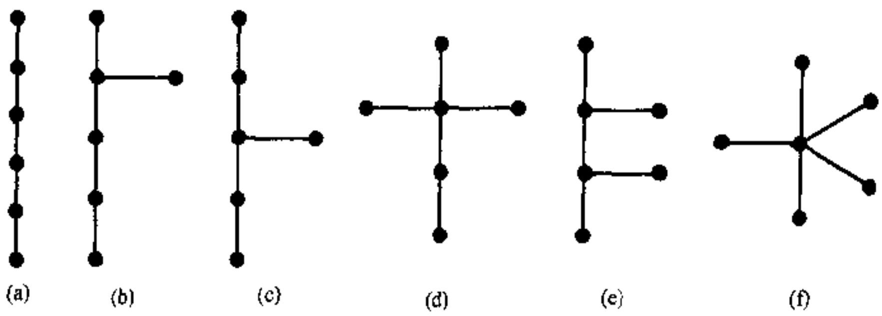


图 5-51

5.135　求图 5-51 的树的直径.

解　☞ 回忆一下,diam(G)是 G 中任意两点的最大距离.因此,图(a),(b),…,(f)的直径分别是 5,4,4,3,3 和 2.

5.136　说明图 5-51 的树是不同的.

解　☞ 根据习题 5.135,我们只须说明(b)和(c)是不同的,以及(d)和(e)是不同的.

树(d)有一个顶点的次数为 4,而(e)没有,因此(d)和(e)是不同的树.

删除(b)或者(c)的次数为 3 的顶点得到 3 个连通分图.但是连通分图有不同数目的顶点,即在(b)中是 1,1 和 3 个,但在(e)中是 1,2 和 2 个.这样,树(b)和(c)也是不同的.

5.137　证明一个有限树 G(至少有一条边)至少有次数为 1 的两个顶点.

证　☞ 设 $\alpha=(u=v_0,v_1,\cdots,v_n=v)$是 G 的一条最长的简单通路.若 $\deg(u)>1$,则有一条边 $e=\{u,w\}$.若 w 是 α 中的一个顶点,比方说 $w=v_k$,则$(w,v_0,\cdots,v_k)$是一个循环,但树中不存在循环,因此 $\deg(u)=1$.同理 $\deg(v)=1$.

5.7　矩阵和图、连接表示法

这一节考虑与图有关的两个重要矩阵.

5.138　设 G 是一个图,它有顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 以及边 $e_1,e_2,\cdots,e_n$.定义:(a)G 的邻接矩阵;(b)G 的关联矩阵.

解　☞ (a)邻接矩阵.设 $A=(a_{ij})$是 $m\times m$ 矩阵,其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & 若\{v_i,v_j\}是一条边,即 v_i 是邻接于 v_j;\\ 0, & 否则,\end{cases}$$

则 A 称为 G 的**邻接矩阵**.显然,$a_{ij}=a_{ji}$,因此 A 是对称矩阵.(我们令 a_{ij}表示边$\{v_i,v_j\}$的数目来定义多重图的邻接矩阵.)

(b)关联矩阵. 设 $M=(m_{ij})$是 $m\times n$ 矩阵,其中

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若顶点 } v_i \text{ 与边 } e_j \text{ 相关联;}\\ 0, & \text{否则,}\end{cases}$$

则 M 称为 G 的**关联矩阵**.

5.139 求图 5-52 的图 G 的邻接矩阵 $A=(a_{ij})$.

解 ☞ 由于 G 有 5 个顶点,因此 A 将是一个 5×5 矩阵. 若 v_i 与 v_j 间有一条边,则令 $a_{ij}=1$;否则,令 $a_{ij}=0$. 这就得到如下矩阵(这里,为了便于读,我们用相应的顶点来标明行和列,尽管这并非是必要的):

$$A=\begin{array}{c}\\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccccc}0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)\end{array}.$$

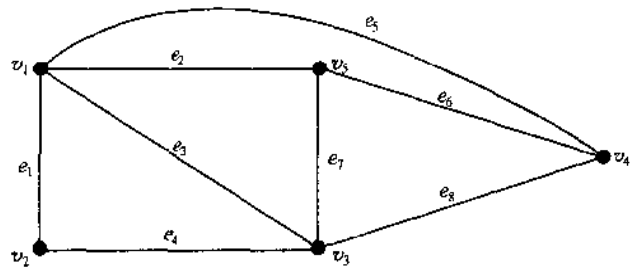


图 5-52

5.140 求图 5-52 的图 G 的关联矩阵 $M=(m_{ij})$.

解 ☞ 由于 G 有 5 个顶点和 8 条边,因此 M 将是一个 5×8 矩阵. 若顶点 v_i 属于边 e_j,则令 $m_{ij}=1$;否则令 $m_{ij}=0$. 这就得到下面的矩阵(这里,为了便于读,我们用相应的顶点和边来标明行和列,尽管这并不是必要的):

$$M=\begin{array}{c}\\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccc}e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8\end{array}\\ \left(\begin{array}{cccccccc}1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)\end{array}$$

5.141 求图 5-53 的多重图 G 的邻接矩阵 $A=(a_{ij})$.

解 ☞ 由于 G 有 5 个顶点,因此 A 将是一个 5×5 矩阵. 若在 v_i 和 v_j 之间有 n 条边,则令 $a_{ij}=n$;否则,令 $a_{ij}=0$. 这就得到下面的矩阵:

$$A=\begin{array}{c}\\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccccc}0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0\end{array}\right)\end{array}.$$

5.142 求图 5-53 的多重图 G 的关联矩阵 $M=(m_{ij})$.

解 ☞ 由于 G 有 5 个顶点和 8 条边,因此 M 将是一个 5×8 矩阵. 若顶点 v_i 属于边 e_j,则令 m_{ij}

$=1$；否则令 $m_{ij}=0$. 这就得到

$$M=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

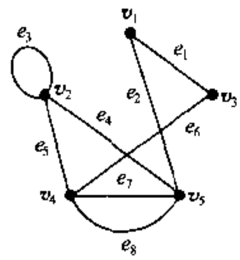


图 5-53

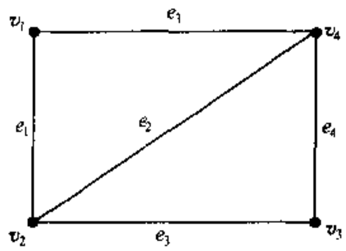


图 5-54

5.143　求图 5-54 的图 G 的邻接矩阵 A.

解　☞ 邻接矩阵 $A=(a_{ij})$ 定义为：若 $\{v_i, v_j\}$ 有一条边，则 $a_{ij}=1$；否则 $a_{ij}=0$. 因此

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.144　求图 5-54 的图 G 的关联矩阵 M.

解　☞ 关联矩阵 $M=(m_{ij})$ 定义为：若边 e_j 与顶点 v_i 相关联，则 $m_{ij}=1$；否则，$m_{ij}=0$. 因此

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.145　求图 5-55 中图 G 的邻接矩阵 A.

解　☞ 邻接矩阵 $A=(a_{ij})$ 定义为：若有一条边 $\{v_i, v_j\}$，则 $a_{ij}=1$；否则 $a_{ij}=0$. 因此

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.146　求图 5-55 中图 G 的关联矩阵 M.

解　☞ 关联矩阵 $M=(m_{ij})$ 定义为：若边 e_j 与顶点 v_i 相关联，则 $m_{ij}=1$；否则 $m_{ij}=0$. 因此

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5.147　求图 5-56 的多重图的邻接矩阵.

解　☞ 对于一个多重图，邻接矩阵 $A=(a_{ij})$ 定义为：$a_{ij}=n$，此处 $n\geqslant 0$ 是边 $\{v_i, v_j\}$ 的数目. 因此

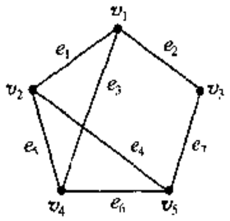


图 5-55

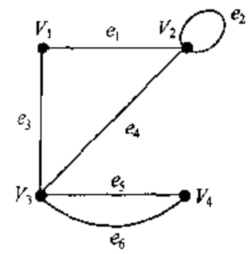


图 5-56

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&1&1&0\\1&1&0&2\\0&0&2&0\end{pmatrix}.$$

5.148 求图 5-56 的多重图 G 的关联矩阵 M.

解 ☞ 关联矩阵 $M=(m_{ij})$定义为:若顶点 v_i 与边 e_j 相关联,则 $m_{ij}=1$;否则 $m_{ij}=0$.因此

$$M=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0&0\\1&1&0&1&0&0\\0&0&1&1&1&1\\0&0&0&0&1&1\end{pmatrix}.$$

5.149 画出图 G,其邻接矩阵 $A=(a_{ij})$如下:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\1&0&0&1&1\\0&0&0&1&1\\1&1&1&0&1\\0&1&1&1&0\end{pmatrix}.$$

解 ☞ 由于 A 是五阶方阵,因此 G 有 5 个顶点,设其为 v_1,v_2,v_3,v_4,v_5.若 $a_{ij}=1$,则从 v_i 到 v_j 画一条边,此图如图 5-57 所示.

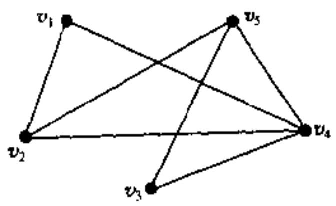


图 5-57

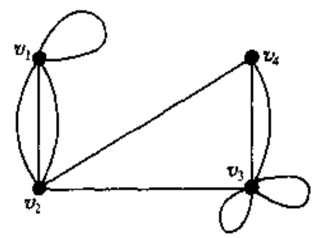


图 5-58

5.150 画出多重图 G,其邻接矩阵 $A=(a_{ij})$如下:

$$A=\begin{pmatrix}1&3&0&0\\3&0&1&1\\0&1&2&2\\0&1&2&0\end{pmatrix}.$$

解 ☞ 由于 A 是 4 阶方阵,因而 G 有 4 个顶点,设其为 v_1,v_2,v_3,v_4.若 $a_{ij}=n$,则从 v_i 到 v_j 画 n 条边.注意,若 $a_{ii}=n$,则 v_i 有 n 个环.该多重图如图 5-58 所示.

5.151 画出图 G,其邻接矩阵 A 为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

解 ☞ 由于 A 是 5 阶方阵，因而 G 有 5 个顶点，设其为 $v_1, \cdots, v_5$. 若 $a_{ij}=1$，则从 v_i 到 v_j 画一条边. 所要求的图如图 5-59 所示.

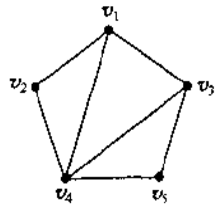


图 5-59

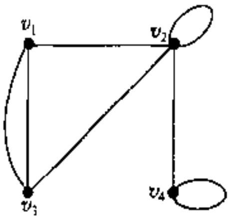


图 5-60

5.152　画出多重图 G，其邻接矩阵 A 是

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

解 ☞ 由于 A 是 4 阶方阵，因此 G 有 4 个顶点，设其为 $v_1, \cdots, v_4$. 对于每一 $a_{ij}=n$，我们从 v_i 到 v_j 画 n 条边. 所要求的多重图如图 5-60 所示.

5.153　从邻接矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

的多重图 G，求其环和多重边的数目. 画出图 G 并且检验你的回答.

解 ☞ 由于 A 是 4 阶矩阵，因此 G 有 4 个顶点，设其为 v_1, v_2, v_3, v_4. 我们可以沿着 A 的主对角线寻求环的数目，这是因为主对角元素标明起始和终止于同一顶点的边的数目. 这样，有三个环：一个在顶点 v_1，两个在顶点 v_2.

为求多重边的数目，我们只要求主对角线以下的大于 1 的元素之和再加上主对角线上大于 1 的元素. 我们包括主对角线是因为多重环也是多重边. 我们不包括主对角线以上元素是因为矩阵是对称的，否则非主对角元素被重复计算. 这样，共有 7 条多重边：从 v_3 到 v_1 有两条边，从 v_4 到 v_2 3 条边，以及在 v_2 有两个环.

G 的图形如图 5-61 所示. 多重边和环的数目正如所预料的.

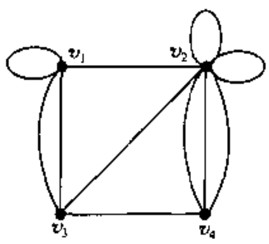


图 5-61

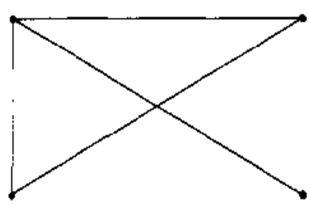


图 5-62

5.154 求图 5-62 的图 G 的邻接矩阵 A 和关联矩阵 M.

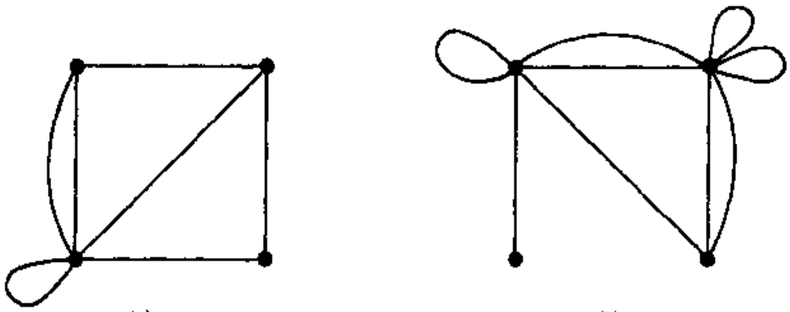
解 ☞ 这两个矩阵与顶点和边的排列次序有关.一种排列次序得到下面的矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&1\\1&0&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix};\quad M=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}.$$

5.155 对于下列的每个邻接矩阵画出多重图：

(a) $$A=\begin{pmatrix}0&2&0&1\\2&1&1&1\\0&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix};$$ (b) $$A=\begin{pmatrix}1&1&1&2\\1&0&0&0\\1&0&0&2\\2&0&2&2\end{pmatrix}.$$

解 ☞ 见图 5-63.



(a) (b)

图 5-63

5.156 设图 G 有 m 个顶点.定义 G 的联络矩阵 C.当 G 是连通图时，将 C 特征化.

解 ☞ G 的**联络**矩阵是一个 $m\times m$ 矩阵 $C=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若 } i=j \text{ 或者从 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 有一条通路；}\\0, & \text{否则.}\end{cases}$$

这样，G 是连通的当且仅当 C 没有零元素.

定理 5.5 设图 G 有 m 个顶点，其中 $m>1$，A 是 G 的邻接矩阵.那么，矩阵 A^n 的 ij 元素给出从顶点 v_i 到顶点 v_j 的长度为 n 的通路数目.

5.157 指出具有 m 个顶点的图 G 的邻接矩阵 A 和联络矩阵 C 之间的关系.

解 ☞ 由于 G 有 m 个顶点，从 v_i 到 v_j 的任一简单通路必有长度 $m-1$ 或较小些.因此，只有从 v_i 到 v_j 没有通路时，矩阵

$$A+A^2+\cdots+A^{m-1}$$

才会有零 ij 元素.(根据定理 5.2，没有简单通路即没有通路.)于是矩阵 C 和矩阵 $A+A^2+\cdots+A^{m-1}$ 有相同的非主对角零元素.

5.158 设 G 是有 m 个顶点的图.叙述用 G 的邻接矩阵 A 在计算机存贮 G 的两个主要缺点.

解 ☞ 首先，若 G 的顶点集和(或)边集是可变的，则或许难实现所需的 A 的变换.其次，G 的边数也许是 m 级的或 $m\log m$ 级的，这样，邻接矩阵 A 将是稀疏的(含有许多零元素).因此，把 A 存贮在存贮器中，则浪费了大量的空间.(因此，通常在存贮器中用习题 5.159 讨论的 AS 表示法来表示 G.)

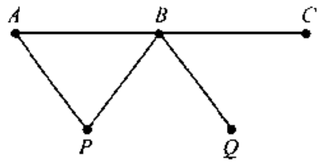
图的邻接-结构(连接)表示法

5.159 用图 5-64(a)的图 G 作为例子，定义图的邻接-结构(AS)或连接表示法.

解 ☞ G 的**邻接-结构(AS)表示法**表明 G 的每一顶点 u 继之是其邻接顶点集. 这样的表示法可以像图 5-64(b)那样显示出来,或者用紧凑形式:

$$G = [A:B,P;B:A,C,P,Q;C:B;P:A,B;Q:B].$$

注意,冒号":"从邻接顶点表中分离一个顶点,分号";"分离不同的表. 因为邻接顶点的表常常在存贮中用连接目录来表示,因此,有时这种表示法又称为 G 的**连接表示法**.



(a)

邻接表
A: B, P B: A, C, P, Q C: B P: A, B Q: B

(b)

图 5-64

5.160 求图 5-21 的图 G 的 AS 表示.

解 ☞ 列出 G 的每一顶点继之是它的邻接结点表,即

$$G = [A:B;B:A,C,D;C:B,D;D:B,C].$$

5.161 求图 5-22 的图 G 的 AS 表示.

解 ☞ 列出 G 的每一顶点继之是它的邻接结点表,即

$$G = [A:C,X;B;C:A,X;Y:Z;Z:Y].$$

注意,紧接着 B 的表是空的,反映出 B 是一个孤立顶点.

5.162 求图 5-28 的图 G 的 AS 表示.

解 ☞ 列出 G 的每一顶点继之是它的邻接结点表,即

$$G = [A:B,Y;B:A,X,Y,Z;C:Y;X:B,Z;Y:A,B,C;Z:B,X].$$

5.163 求图 5-1 的图 G 的 AS 表示.

解 ☞ 列出 G 的每一顶点继之是它的邻接结点表,即

$$G = [A:B,C;B:A,C,D;C:A,B,D;D:C,B].$$

5.164 求图 5-2 的多重图 G 的 AS 表示.

解 ☞ 列出 G 的每一顶点继之是它的邻接结点表,包括多重的,即

$$G = [A:B,C,C;B:A,C,D;C:A,A,B,D;D:B,C,D].$$

5.165 求图 5-15 的图的 AS 表示.

解 ☞ 列出 G 的每一顶点继之是它的邻接结点表,即

$$G = [A:X,Z;B:X,Y;C:Y;X:A,B,Y;Y:B,C,X;Z:A].$$

5.8　标号图

5.166 用一个例子来解释一个标号图的含义.

解 ☞ 设图 G 的边和(或)顶点被赋予一类数据或别的,则称 G 是一个**标号图**. 特别地,若 G 的每一边 e 被赋予非负整数 $\mathscr{L}(e)$,则 $\mathscr{L}(e)$ 称为 e 的**权或长度**. 图 5-65 表示一个标号图,其每边长度由明显方法给出.

5.167 设 G 是每边都赋以长度(权)的标号图. 以图 5-65 作为例子解释最短通路问题.

解 ☞ 设 P 和 Q 是 G 的顶点. 最短通路问题是在 P 和 Q 之间找一条最短长度的通路, 此处通路的长度是它的边的长度之和. 显然,这样的一条最短通路必须是一条简单通路. 图 5-65 中 P 和

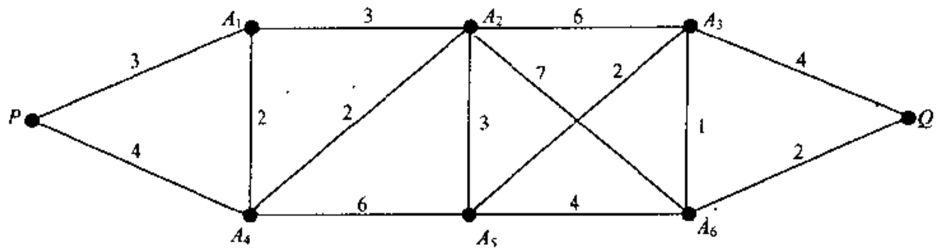


图 5-65

Q 之间的一条最短通路是

$$(P, A_1, A_2, A_5, A_3, A_6, Q),$$

其长度为 14.(读者试找另一条最短通路.)

5.168 设 G 是图 5-66 的标号图.求 A 和 D 之间的一条最短通路 α.

解 ☞ 在 A 和 D 之间有 6 条简单通路.这些通路及其相应的长度如下:

(A,B,D):	16	(A,C,D):	18
(A,B,C,D):	14	(A,C,B,D):	24
(A,B,E,C,D):	20	(A,C,E,B,D):	30

因此 $\alpha=(A,B,C,D)$ 且其长度是 14.

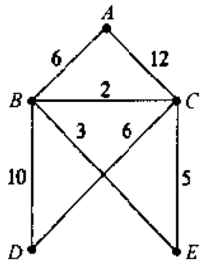


图 5-66

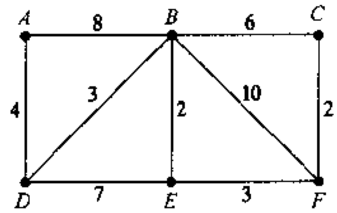


图 5-67

5.169 设 G 是图 5-67 的标号图.求(a) A 和 F 之间的所有简单通路;(b) A 和 F 之间的一条最短通路 α.

解 ☞ (a)有 10 条这样的通路:

(A,B,F)	(A,D,B,F)	(A,D,E,F)
(A,B,C,F)	(A,D,B,C,F)	(A,D,E,B,F)
(A,B,E,F)	(A,D,B,E,F)	(A,D,E,B,C,F)
(A,B,D,E,F)		

(b)求(a)中每条简单通路的长度,得到 $\alpha=(A,D,B,E,F)$,其长度为 12.

5.170 给出一个图 G 的一个"现实生活"例子,其中顶点和边都被赋予数据.

解 ☞ 令 G 的顶点表示有其人口的城市,G 的边表示城市间的距离.

5.171 说明每一个连通图怎么可认为是一个(带权的)标号图.在这样的图中一条最短的通路是什么?

解 ☞ 这里,我们可以假设 G 的每条边的长度为 1.于是顶点 P 和 Q 之间的最短通路 α 是原来意义下最短长度的一条通路,即边数最少的一条通路.

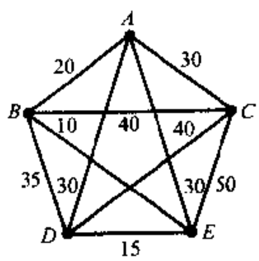


图 5-68

5.172 考虑下面的选购问题:你重新装备你的家并决定从不同商店购买下列项目:(A)相配的沙发和椅子,(B)咖啡茶几,(C)小地毯,(D)电视机和(E)落地灯.购买这些东西的顺序

有些限制.首先,购买沙发和椅子以及咖啡茶几之前必须先购买小地毯(因为这些家俱必须和地毯相配).其次,必须最后买灯,因它是消耗品,若没钱则不买它.

你已确定各商店之间的行走时间(以分钟计算),并且把此信息列入图 5-68 的图 G 中.求最有效的购买序列 α,即求选购顺序使得行走时间最短.

解 ☞ 这里要求通路 α 应包含 5 个顶点,必须从(C)开始或者从(D)开始而随后是(C).在所有情况下,必须在(E)结尾.假定放弃购买,则不减少时间.满足给定条件的有 8 条可能的简单通路.这些通路及其相应的行走时间如下:

$CABDE$:100　$CBADE$:110　$CDABE$:100　$DCABE$:100

$CADBE$:105　$CBDAE$:135　$CDBAE$:125　$DCBAE$:130

这样,$\alpha=(D,C,A,B,E)$,或者 $\alpha=(C,A,B,D,E)$,或者 $\alpha-(C,D,A,B,E)$,并且最短行走时间是 100 分钟.

5.9 同构和同胚图

5.173 定义图的同构.

解 ☞ 假设 $G(V,E)$和 $G^*(V^*,E^*)$都是图,$f:V\to V^*$是顶点集合之间的一一对应使得$\{u,v\}$是 G 的一条边的充分必要条件是$\{f(u),f(v)\}$为 G^*的一条边,那么 f 称为 G 和 G^*之间的一个**同构**,并且说 G 和 G^*是**同构图**.通常,我们在同构图之间不加区别(甚至尽管它们的图形可以"看起来不同".)

5.174 设 G 和 G^*是同构图.关于对应顶点的下面两个条件:(a)次数,(b)是一个割点,哪一个成立?

解 ☞ 关于对应的顶点,二者都必须成立.

5.175 设 G 和 G^*是同构图.若 G 有 8 个连通分图,则求 G^*的连通分图数目.

解 ☞ 图 G^*也必有 8 个连通分图.

5.176 设 G 和 G^*是同构图且 G 是可穿程的.G^*是可穿程的吗? 若是,则 G^*的可穿程通路是什么?

解 ☞ 是的,G^*可穿程.并且,若 α 是 G 的一条可穿程通路,则相应的通路,比方说 α'将是 G^*的一条可穿程通路.

5.177 图 5-69 表示画成字母的 10 个图.这 10 个图中哪些和 M 同构?

解 ☞ M 由一条单一线中的 5 个顶点组成.因此 S, V 和 Z(以及 M 本身)是和 M 同构的.

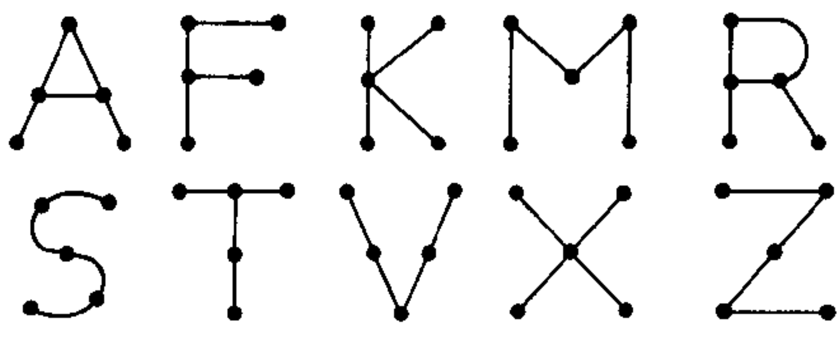


图 5-69

5.178 考虑图 5-69 中的"字母"A, F, K, R, T 和 X.它们中哪些是同构的?

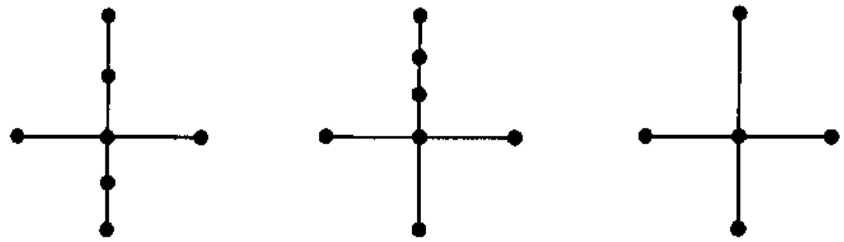
解 ☞ 字母 A 和 R, F 和 T, 以及 K 和 X 是同构的.

5.179 定义同胚图.

解 ☞ 任给一个图 G,我们可以增加顶点删除 G 的边得到一个新图 G^*.若两个图 G 和 G^* 可按这个方法从同构图得到,则说 G 和 G^* 是同胚的.

5.180 给出同胚但非同构图的例子.

解 ☞ 图 5-70 中图(a)和图(b)不是同构的,但它们的每一个都可从(c)适当增加顶点得到,因而是同胚的.

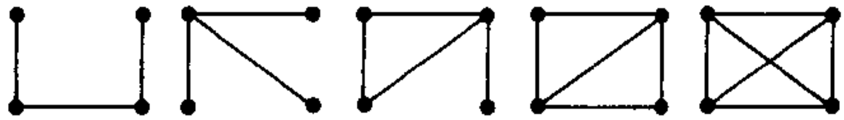


(a)　(b)　(c)

图 5-70

5.181 找出具有 4 个顶点的所有非同构连通图.

解 ☞ 有 5 个这样的连通图,如图 5-71 所示.



(a)　(b)　(c)　(d)　(e)

图 5-71

5.182 一个有限图能否与它的一个子图(除它本身)同构?

解 ☞ 不能.因同构图必须有相同数目的元素.

5.183 一个有限图能否与它的一个子图(除它本身)同胚?

解 ☞ 可以.例如,设 G 是图 5-71(a)的图.从 G 删除次数为 1 的一个或两个顶点得到一个子图,它与 G 本身同胚.

5.184 给出一个无限图的例子,它与其子图(除它本身)同构.

解 ☞ 令

$$V(G)=\{1,2,3,\cdots\}$$

和

$$E(G)=[\{1,2\},\{2,3\},\cdots,\{n,n+1\},\cdots].$$

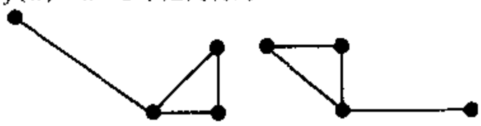
考察子图 G',此处

$$V(G')=\{2,3,4,\cdots\}$$

和

$$E(G')=[\{2,3\},\{3,4\},\cdots].$$

那么 G 和 G' 在同构 $f(n)=n+1$ 下是同构的.



(b′)　(c′)

图 5-72

5.185　考察图 5-26 中 3 个图. 说明它们是不同的, 即它们的任两个图都不同构, 并且它们中的两个图是同胚的.

解　☞ 由于图(a)有 6 条边, 而(b)和(c)各有 5 条边, 因此(a)和(b)或(c)是不同构的. 而且, 我们若删去(b)和(c)中次数为 3 的顶点, 则得到不同的子图, 因此(b)和(c)不同构.

另一方面, 由于(b)和(c)可分别从图 5-72 的同构图加上一个适当的"为"顶点得到, 因此它们是同构的.

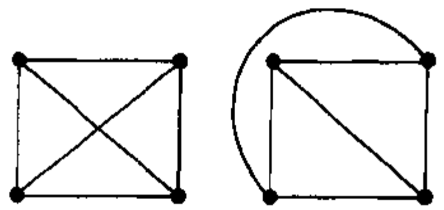
第六章　平面图和树

6.1　平面图

一个图或多重图若可在一平面上或者一球面上画出来，但它的边都不交叉，则称它为**平面图**.

6.1　图 K_4 是一个平面图，通常将它画成有交叉边的图形，如图 6-1(a). 试将它画成没有交叉边的图形.

解　☞ 画出 K_4 没有交叉边的图形如图 6-1(b)所示.

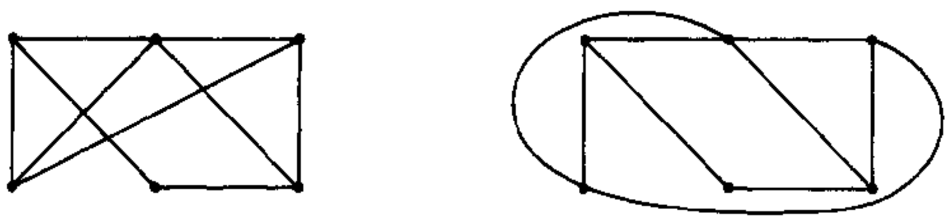


(a)　(b)

图 6-1

6.2　画出图 6-2(a)所示的平面图使它没有交叉边.

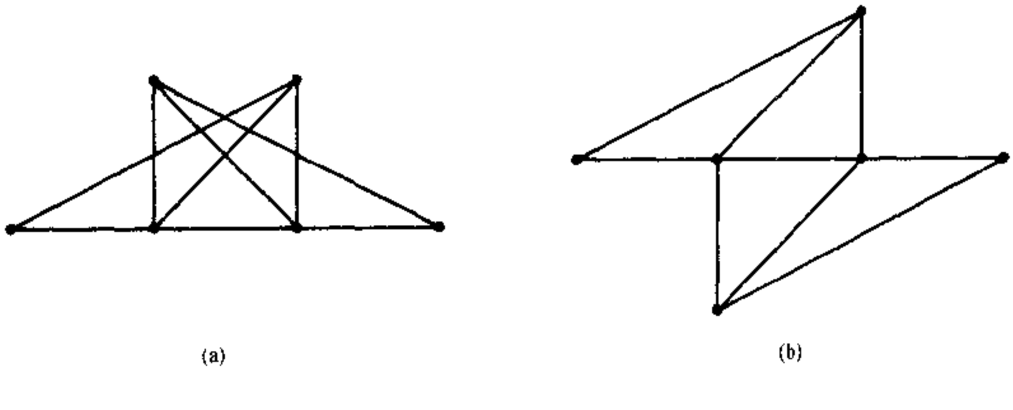
解　☞ 一个解如图 6-2(b)所示.



(a)　(b)

图 6-2

6.3　画出图 6-3(a)所示的平面图使它没有交叉边.



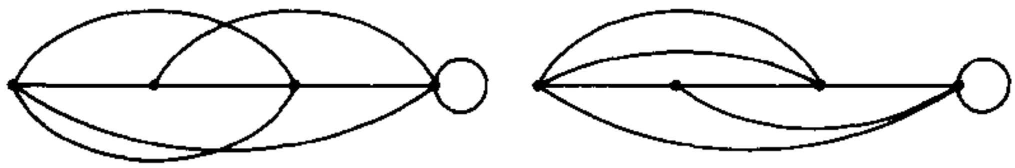
(a)　(b)

图 6-3

解 ☞ 重新安排一个顶点的位置得到一个解如图 6-3(b)所示.

6.4 画出图 6-4(a)所示的平面图使它没有交叉边.

解 ☞ 一个解如图 6-4(b)所示.



(a)　　(b)

图 6-4

6.5 鉴别图 6-5 中每一个平面图为 $K_4, K_{2,2}, K_{1,4}, K_{2,3}$之一.

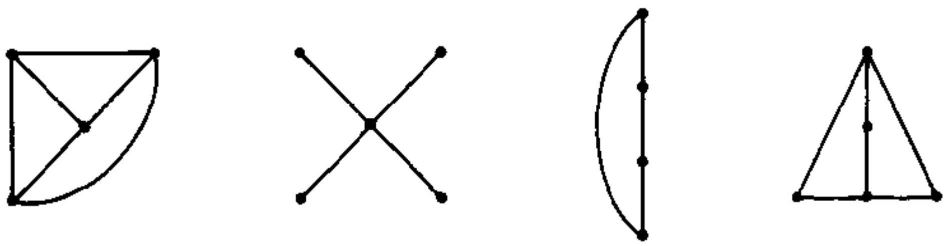
解 ☞ 回忆一下, K_n 是具有 n 个顶点的完全图, $K_{m,n}$是具有 m 个顶点连接 n 个顶点的完全偶图.

(a)K_4, 因其每一顶点与其他的每一个顶点连接.

(b)$K_{1,4}$, 因它是 $m=1$ 和 $n=4$ 的偶图.

(c)$K_{2,2}$, 因它是 $m=n=2$ 的偶图.

(d)$K_{2,3}$, 因它是 $m=2$ 和 $n=3$ 的偶图.



(a)　　(b)　　(c)　　(d)

图 6-5

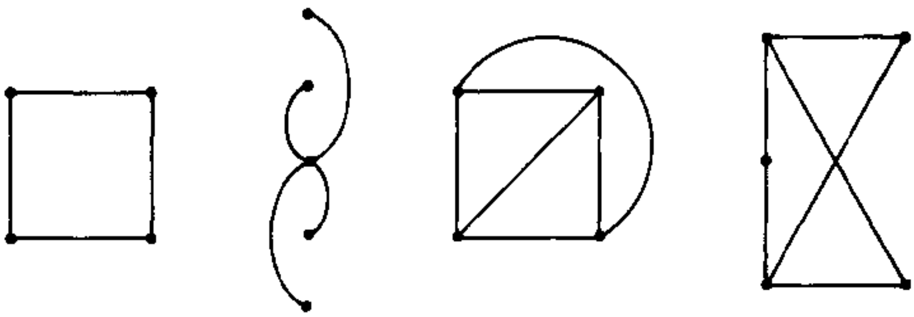
6.6 鉴别图 6-6 中每一个平面图是 $K_4, K_{2,2}, K_{1,4}, K_{2,3}$之一.

解 ☞ (a)$K_{2,2}$, 因它是 $m=n=2$ 的偶图.

(b)$K_{1,4}$, 因它是 $m=1$ 和 $n=4$ 的偶图.

(c)K_4, 因其每一顶点都与其他的每一个顶点连接.

(d)$K_{2,3}$, 因它是 $m=2$ 和 $n=3$ 的偶图.

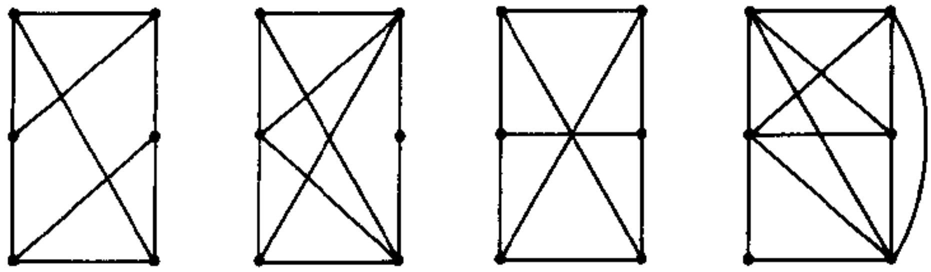


(a)　　(b)　　(c)　　(d)

图 6-6

6.7　鉴别图 6-7 中哪些图是平面图.

解　☞ 只有(a)和(b)是平面图,就是说,它们可以被画成没有交叉边的图形.(事实上,不易指出(c)和(d)都是非平面图,除非在 6.4 节中导出的简单准则.)

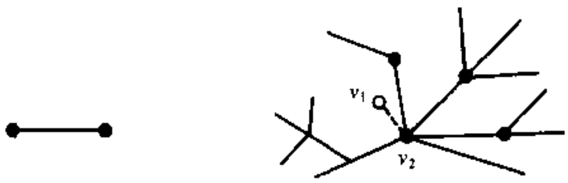


(a)　(b)　(c)　(d)

图 6-7

6.8　证明树(习题 5.131)是特殊的平面图.

证　☞ 就 T_n 的顶点数 n 应用归纳法来证明.显然,惟一的树 T_2 可认为是在平面上(图 6-8(a)),对于任一 $T_n(n>2)$,选取一次顶点(习题 5.137)如 v_1.于是图 T_n-v_1 是连通且非循环的,它是一个 T_{n-1}.由假设,可认为它在平面上(图 6-8(b)).显然能找到平面上的一点 v_1 使得直线段 v_1v_2 不会分割 T_{n-1}.因此可认为 T_n 是在平面上,从而归纳法证明完成.



(a) T_2　(b) $T_n-v_1=T_{n-1}$

图 6-8

6.2　地图和区域

6.9　解释术语地图.什么是连通地图?

解　☞ 一个有限的平面多重图的一种特殊的平面表示称为**地图**.如果作为基础的多重图是连通的,我们则说该地图是**连通的**.

6.10　解释一地图的区域是什么意思并且给出一个例子.

解　☞ 一张给定的地图将平面或球面分成连通的块部分称为**区域**.例如图 6-9 的连通地图 M 有 6 个顶点和 9 条边,它将平面分成 5 个如图 6-9 所标明的区域.

6.11　定义一个区域的次数.

解　☞ 地图 M 的每一区域 r 的边界由形成闭通路的一系列边组成.区域 r 的**次数**用 $\deg(r)$表示,它是闭通路边界的长度.有时,闭通路是一个循环.若不是,则某条边在通路中出现两次,例如,在图 6-9 中,除 r_3 外,所有的区域的边界都是循环.但是,从顶点 C(比方说)开始环绕 r_3 按逆时针方向移动,则得到一条闭通路(C,D,E,F,E,C),此处边$\{E,F\}$出现两次.

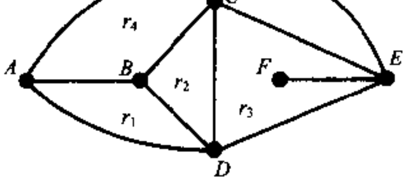


图 6-9

6.12　求图 6-9 中地图 M 的每一区域的次数.

解 ☞ 一个区域的次数是该区域的边界闭通路的长度.因此

$$\deg(r_1)=3,\quad \deg(r_2)=3,\quad \deg(r_3)=5,\quad \deg(r_4)=4,\quad \deg(r_5)=3.$$

注意,由于 r_3 的边界通路中边 $\{E,F\}$ 出现两次,因此 $\deg(r_3)=5$.

定理 6.1 任一地图 M 的区域的次数之和等于 M 的边数的两倍.

6.13 证明定理 6.1.

证 ☞ 地图 M 的每条边 e 或是两区域的边界或是包含在一个区域中,因而沿着该区域的边界的任一通路出现两次.因此一个区域所含的每条边在确定 M 的区域次数时以二次计算.

6.14 指出图 6-10 所示地图 Q 的每个区域镶上边界的循环或闭通路.

解 ☞ 为每一区域镶上边界的循环或闭通路如下:

$r_1=(A,B,G,F,A)$(循环),
$r_2=(B,C,H,D,H,G,B)$(闭通路),
$r_3=(C,E,H,C)$(循环),
$r_4=(A,B,C,E,H,G,F,A)$(循环).

6.15 求图 6-10 所示的地图 Q 的每个区域的次数,并检验定理 6.1.

解 ☞ 由计算习题 6.14 指出的每一循环或闭通路包含的边数得到各个区域的次数是

$$\deg(r_1)=4,\quad \deg(r_2)=6,\quad \deg(r_3)=3,\quad \deg(r_4)=7.$$

各区域的次数之和是 $4+6+3+7=20$.由于 Q 有 10 条边且 $2\cdot10=20$,因此定理 6.1 得到验证.

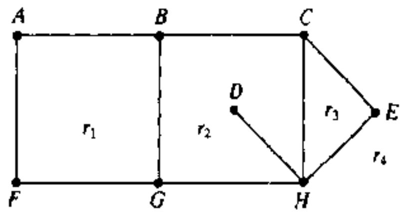


图 6-10

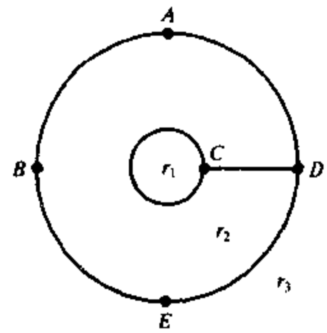


图 6-11

6.16 指出图 6-11 所示的地图 R 的每个区域镶上边界的循环或闭通路.

解 ☞ 为每个区域镶上边界的循环或闭通路如下:

$r_1=(C,C)$(闭通路),
$r_2=(A,D,C,C,D,E,B,A)$(闭通路),
$r_3=(A,D,E,B,A)$(循环).

6.17 求图 6-11 所示地图 R 的每个区域的次数,并且检验定理 6.1.

解 ☞ 由计算习题 6.16 指出的每一循环或闭通路包含的边数,得到各个区域的次数是

$$\deg(r_1)=1,\quad \deg(r_2)=7,\quad \deg(r_3)=4.$$

这些区域的次数之和是 $1+7+4=12$.由于地图 R 有 6 条边且 $2\cdot6=12$,因此定理 6.1 得到验证.

6.18 指出图 6-12 所示地图 S 的每个区域镶上边界的循环或闭通路.

解 ☞ 每个区域镶上边界的循环或闭通路如下:

$r_1=(A,D,E,A)$, $r_2=(C,F,D,C)$, $r_3=(D,F,E,D)$, $r_4=(E,F,E)$,
$r_5=(A,D,B,D,C,F,E,A)$.

6.19 求习题 6.18 的地图 S 的每个区域的次数并检验定理 6.1.

解 ☞ 由计算习题 6.18 指出的每条闭通路的边数得到各个区域的次数为

$\deg(r_1)=3$,　$\deg(r_2)=3$,　$\deg(r_3)=3$,

$\deg(r_4)=2$,　$\deg(r_5)=7$.

各区域的次数之和是 $3+3+3+2+7=18$，并且由于 S 有 9 条边，因而 $2\cdot 9=18$. 因此定理 6.1 得到验证.

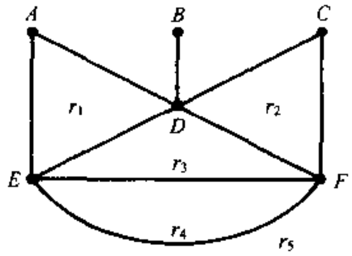


图 6-12

6.20 图 6-13 所示的两个多重图是相同的（同构的），但它们的地图却是不同的. 对于每一地图，指出每个区域的边界和次数并且检验定理 6.1.

解 ☞ 图 6-13(a)中各个区域的边界是

$r_1=(A,B,C,A)$,　$r_2=(A,C,B,E,D,E,A)$,

$r_3=(A,B,E,A)$.

这样，$\deg(r_1)=3$，$\deg(r_2)=6$ 和 $\deg(r_3)=3$，而且 $S=3+6+3=12$，显然有 6 条边.

图 6-13(b)的各个区域的边界是

$r_1=(A,B,C,A)$,　$r_2=(A,B,E,D,E,A)$,　$r_3=(A,C,B,E,A)$.

这样，$\deg(r_1)=3$，$\deg(r_2)=5$ 和 $\deg(r_3)=4$，且 $S=3+5+4=12$，它正是边数的 2 倍.

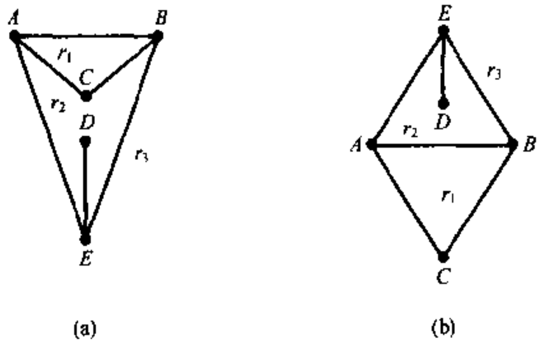


图 6-13

6.21 就图 6-14 所示的两个多重图重复习题 6.20.

解 ☞ 图 6-14(a)的各个区域的边界是

$r_1=(B,B)$,　$r_2=(A,D,C,E,B,A)$,　$r_3=(C,E,C)$,

$r_4=(C,D,E,C)$,　$r_5=(A,D,E,B,B,A)$.

这样，各个区域的次数分别为 1,5,2,3 和 5，且 $S=16$，显然有 8 条边.

图 6-14(b)的各个区域的边界是

$r_1=(A,D,E,B,A)$,　$r_2=(B,B)$,　$r_3=(D,C,E,D)$,

$r_4=(E,C,E)$,　$r_5=(A,D,C,E,B,B,A)$.

因此，各个区域的次数分别为 4,1,3,2 和 6，且如同(a) $S=16$.

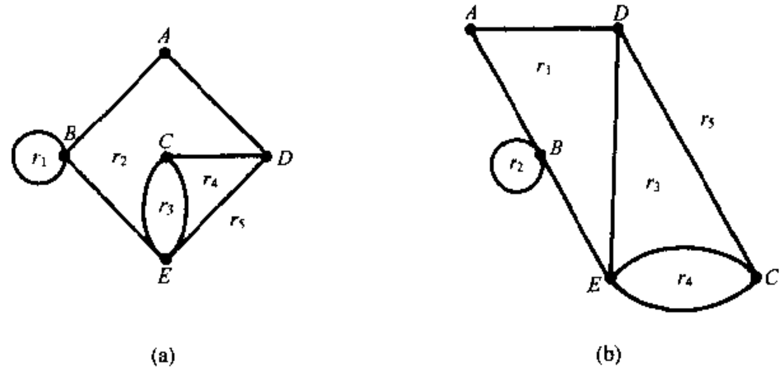


图 6-14

6.3 欧拉公式

数学家欧拉给出了任一连通地图的顶点数,边数和区域数之间关系的一个公式.

定理 6.2(欧拉) 设 M 是一个具有 V 个顶点,E 条边和 R 个区域的连通地图,则有

$$V - E + R = 2.$$

6.22 证明定理 6.2(欧拉公式).

证 ☞ 假设连通地图 M 是由图 6-15(a)单独一个顶点 P 组成,那么 $V=1, E=0$,且有一个区域,即 $R=1$.因此,在这种情况下,$V-E+R=2$.在其他情况下,M 可从单个顶点用下面两种构造方法建立起来:

(1)加一个新的顶点 Q_2 与已有的顶点 Q_1 用一条边 e 连接,此处 e 不与已有的任何边交叉,如图 6-15(b).

(2)用一条边 e 连接已有的顶点 Q_1 和 Q_2,此处 e 不与任何已有的边交叉,如图 6-15(c).

第一种方法,因 V 和 E 都增加 1 但区域数目 R 不改变,因而 $V-E+R$ 的值不改变.第二种方法亦不改变 $V-E+R$ 的值,这是因为 V 不变,E 增加 1,而区域数目 R 亦增加 1.依此,如同地图由单个顶点组成那样,M 必有相同的 $V-E+R$ 的值,即 $V-E+R=2$.定理得证.

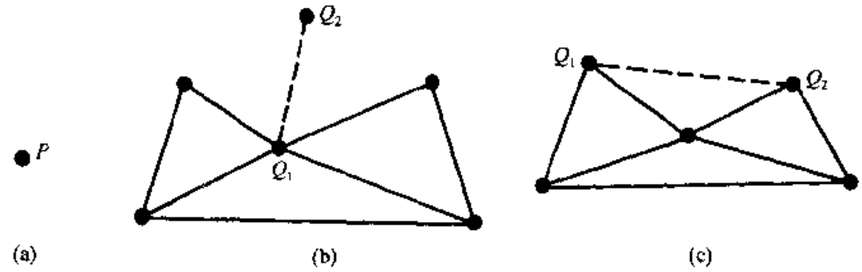


图 6-15

6.23 求图 6-16 中每个地图的顶点数 V,边数 E 和区域数 R.并且,检验欧拉公式.

解 ☞ 欧拉公式是 $V-E+R=2$.因此,

图 6-16(a): $V=5, E=8, R=5$,且 $5-8+5=2$.

图 6-16(b): $V=12, E=17, R=7$,且 $12-17+7=2$.

图 6-16(c): $V=3, E=6, R=5$,且 $3-6+5=2$.

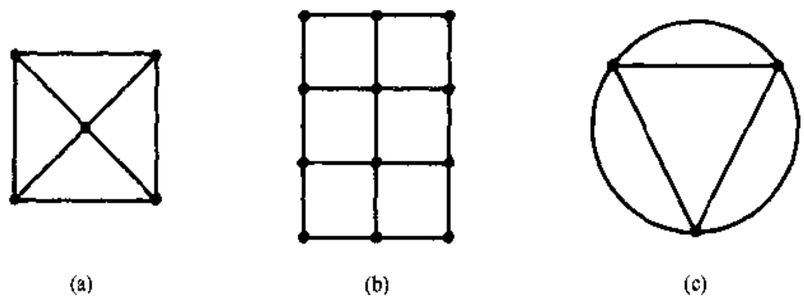


图 6-16

6.24 就图 6-17 中各地图重复习题 6.23.

解 ☞ 欧拉公式是 $V-E+R=2$.因此,

图 6-17(a): $V=4, E=4, R=2$,且 $4-4+2=2$.

图 6-17(b): $V=5, E=8, R=5$,且 $5-8+5=2$.

图 6-17(c): $V=4, E=9, R=7$,且 $4-9+7=2$.

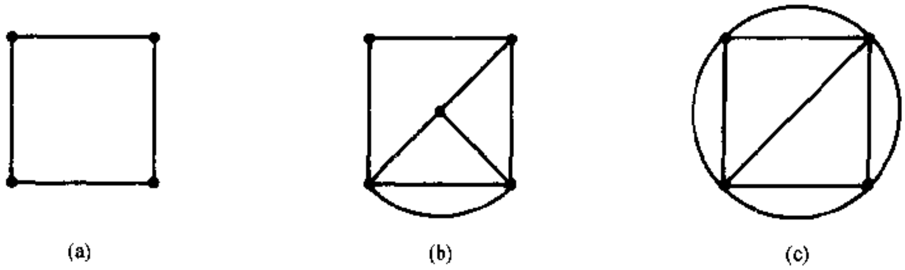


图 6-17

6.25　就图 6-18 中地图重做习题 6.23.

解　☞ 欧拉公式是 $V-E+R=2$.因此,

图 6-18(a)：　$V=4, E=6, R=4$, 且 $4-6+4=2$.

图 6-18(b)：　$V=9, E=8, R=1$, 且 $9-8+1=2$.

图 6-18(c)：　$V=8, E=11, R=5$, 且 $8-11+5=2$.

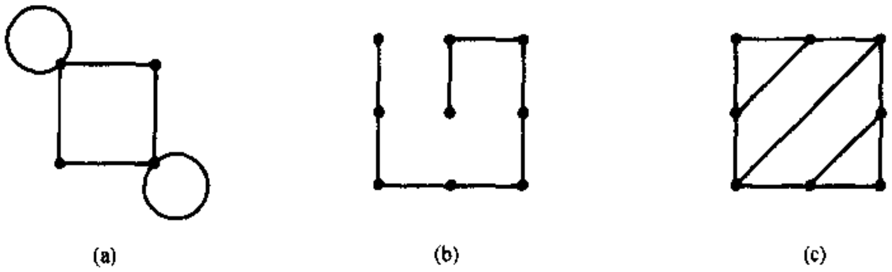


图 6-18

6.26　考察图 6-19 所示的连通地图序列.在这个序列中的每一地图都是从前面的地图或是(1)加上一个顶点并且用一条边将它与地图的一顶点连接但不与任何已有的边交叉,或是(2)用一条边连接已有的两个顶点但不与任何已有的边交叉得到的.就序列中的每一地图检验欧拉公式.

解　☞ 为检验欧拉公式,我们求每一地图的顶点数,边数和区域数目,并核对 $V-E+R=2$.这样,

图 6-19(a)：　$V=4, E=4, R=2$, 且 $4-4+2=2$.

图 6-19(b)：　$V=5, E=5, R=2$, 且 $5-5+2=2$.

图 6-19(c)：　$V=5, E=6, R=3$, 且 $5-6+3=2$.

图 6-19(d)：　$V=6, E=7, R=3$, 且 $6-7+3=2$.

图 6-19(e)：　$V=6, E=8, R=4$, 且 $6-8+4=2$.

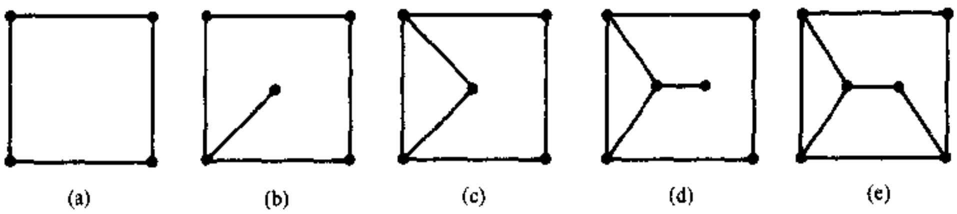


图 6-19

6.27　就图 6-20 所示的连通地图序列重复习题 6.26.

解　☞ 求每一地图的顶点数,边数和区域数目,并且核对 $V-E+R=2$.这样,

图 6-20(a)：　$V=3, E=2, R=1$，且 $3-2+1=2$.
图 6-20(b)：　$V=3, E=3, R=2$，且 $3-3+2=2$.
图 6-20(c)：　$V=4, E=4, R=2$，且 $4-4+2=2$.
图 6-20(d)：　$V=4, E=5, R=3$，且 $4-5+3=2$.
图 6-20(e)：　$V=4, E=6, R=4$，且 $4-6+4=2$.

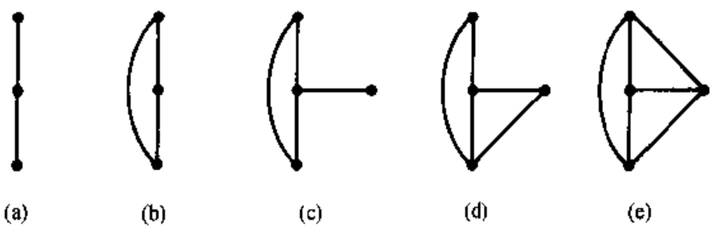


图 6-20

6.28　对于图 6-21 所示的连通地图序列重复习题 6.26.

解　☞ 求顶点，边和区域的数目，并且核对 $V-E+R=2$. 这样，

图 6-21(a)：　$V=2, E=1, R=1$，且 $2-1+1=2$.
图 6-21(b)：　$V=2, E=2, R=2$，且 $2-2+2=2$.
图 6-21(c)：　$V=3, E=3, R=2$，且 $3-3+2=2$.
图 6-21(d)：　$V=3, E=4, R=3$，且 $3-4+3=2$.
图 6-21(e)：　$V=3, E=5, R=4$，且 $3-5+4=2$.

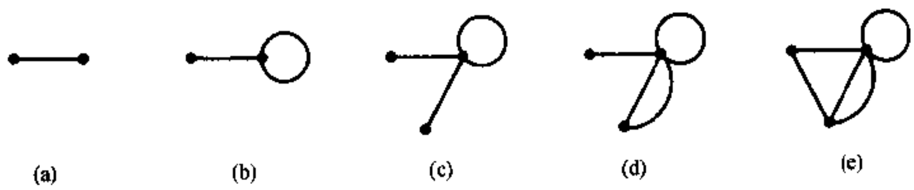


图 6-21

6.29　4 个连通平面多重图的顶点数和边数已知如下：
(a) $V=10, E=14$；　(b) $V=6, E=7$；　(c) $V=25, E=60$；　(d) $V=14, E=13$.
试求每个图必有的区域数目 R.

解　☞ 重新整理欧拉公式得到 $R=2-V+E$. 于是

(a) $R=2-10+14=6$，　(b) $R=2-6+7=3$，　(c) $R=2-25+60=37$，　(d) $R=2-14+13=1$.

6.30　4 个连通平面多重图的顶点数和区域数已知如下：
(a) $V=5, R=3$；　(b) $V=2, R=2$；　(c) $V=1, R=8$；　(d) $V=32, R=14$.
求每个图必有的边数 E.

解　☞ 重新整理欧拉公式得 $E=V+R-2$. 因此，

(a) $E=5+3-2=6$，　(b) $E=2+2-2=2$，　(c) $E=1+8-2=7$，　(d) $E=32+14-2=44$.

6.31　已知 4 个连通平面多重图的边数和区域数如下：
(a) $E=6, R=3$；　(b) $E=4, R=1$；　(c) $E=10, R=8$；　(d) $E=27, R=11$.
确定每个图必有的顶点数 V.

解　☞ 重新整理欧拉公式得 $V=E-R+2$. 这样

(a) $V=6-3+2=5$，　(b) $V=4-1+2=5$，　(c) $V=10-8+2=4$，　(d) $V=27-11+2=18$.

6.32　画出一个图有 6 条边和 3 个区域的 3 个连通地图.

解　☞ 三种可能的地图如图 6-22 所示. 注意，正如欧拉公式所推测的每种地图有 $V=E-R+2$

=6-3+2=5 个顶点.

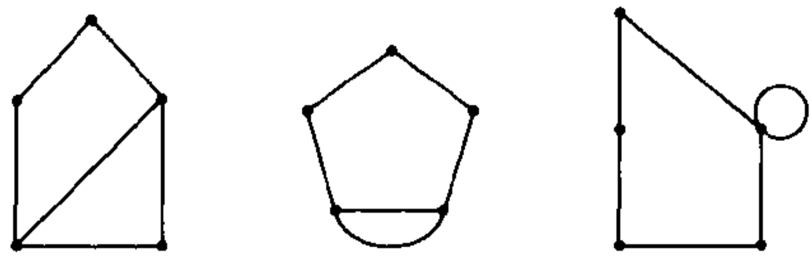


图 6-22

6.33　画出一个图有 4 个顶点和 5 个区域的 3 个连通地图.

解　☞ 三种可能的地图如图 6-23 所示.注意,正如欧拉公式所推测的每种地图有 $E=V+R-2=4+5-2=7$ 条边.

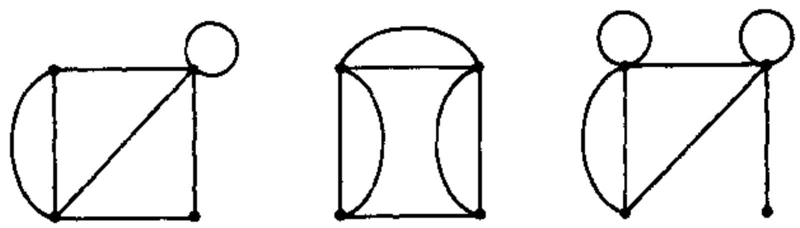


图 6-23

6.34　画出一个图有 6 个顶点和 7 条边的 3 个连通地图.

解　☞ 三种可能的地图如图 6-24 所示.注意,正如欧拉公式所推测的每一地图有 $R=E-V+2=7-6+2=3$ 个区域.

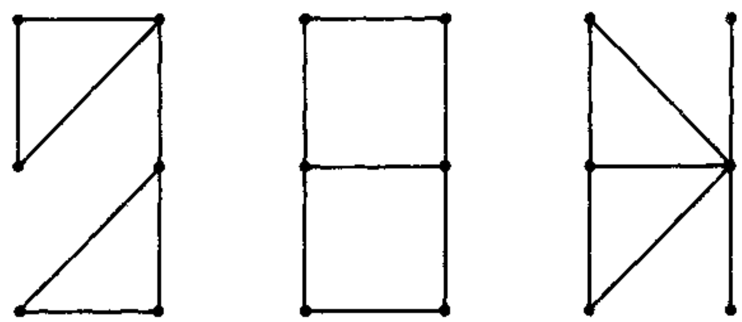


图 6-24

定理 6.3　设 G 是一个有 p 个顶点和 q 条边的连通平面图(非多重图),此处 $p\geqslant3$,那么有

$$q\leqslant 3p-6.$$

6.35　证明定理 6.3.

证　☞ 设 r 是 G 的一种平面表示的区域数目.由欧拉公式有

$$p-q+r=2.$$

现在,根据定理 6.1,各区域的次数之和等于 $2q$.但每个区域有次数 3 或更多,因此有

$$2q\geqslant 3r.$$

这样,$r\leqslant 2q/3$.将它代入欧拉公式得到

$$2 = p - q + r \leqslant p - q + 2q/3,$$

即

$$2 \leqslant p - q/3.$$

用 3 乘此不等式得 $6 \leqslant 3p - q$，这就给出我们所要证明的结果.

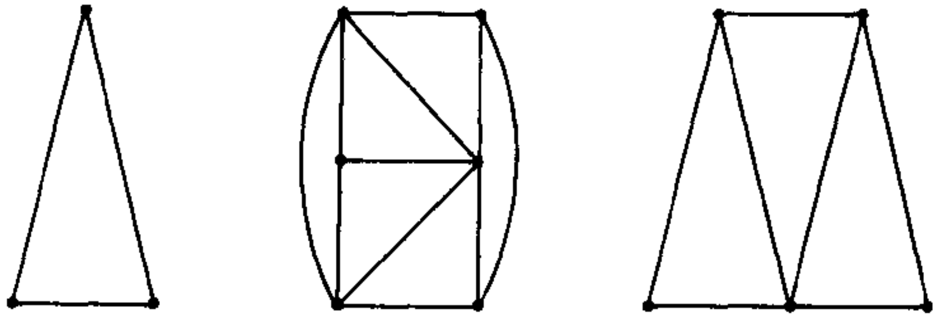
6.36 就图 6-25 所示的连通平面图，检验定理 6.3.

解 ☞ 定理 6.3 说明，若顶点数 p 满足 $p \geqslant 3$，则边数 q 满足 $q \leqslant 3p - 6$. 因此，

图 6-25(a)： $p = 3, q = 3$，且 $3 \cdot 3 - 6 = 3 = 3$.

图 6-25(b)： $p = 6, q = 11$，且 $3 \cdot 6 - 6 = 12 \geqslant 11$.

图 6-25(c)： $p = 5, q = 7$，且 $3 \cdot 5 - 6 = 9 \geqslant 7$.



(a)　(b)　(c)

图 6-25

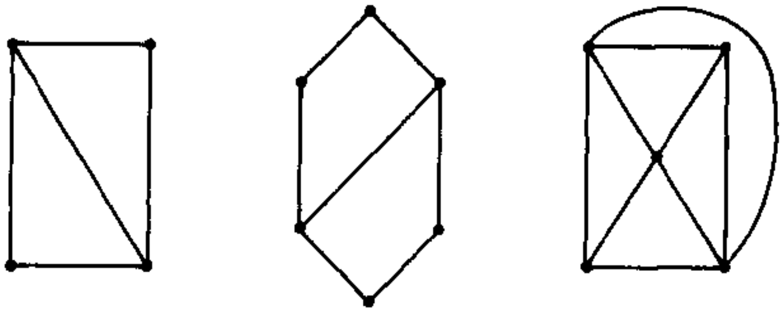
6.37 就图 6-26 所示的连通平面图重复习题 6.36.

解 ☞ 求顶点数 p 和边数 q，然后检验定理 6.3：

图 6-26(a)： $p = 4, q = 5$，且 $3 \cdot 4 - 6 = 6 \geqslant 5$.

图 6-26(b)： $p = 6, q = 7$，且 $3 \cdot 6 - 6 = 12 \geqslant 7$.

图 6-26(c)： $p = 5, q = 9$，且 $3 \cdot 5 - 6 = 9 = 9$.



(a)　(b)　(c)

图 6-26

6.38 在一个有 8 个顶点的平面图中，边数最多可能是多少？有 4 个顶点的情形又是如何？

解 ☞ 根据定理 6.3，$q \leqslant 3p - 6$. 对于一个有 8 个顶点的平面图，

$$q \leqslant 3 \times 8 - 6 = 18.$$

因此在一个有 8 个顶点的平面图中，最多边数可能是 18. 对于有 4 个顶点的平面图，

$$q \leqslant 3 \times 4 - 6 = 6.$$

因此最多边数可能是 6.

6.39 一个有 6 条边的图最少要有多少个顶点才会是平面图？有 11 条边的情形又是如何？

解 ☞ 重新整理定理 6.3 的公式得到 $p \geqslant (6 + q)/3$. 对于一个有 6 条边的平面图，

$$p \geqslant (6+6)/3 = 4.$$

因此，一个有6条边的图是平面图，则要求最少顶点数是4. 对于一个具有11条边的图，

$$p \geqslant (6+11)/3 = 17/3.$$

由于顶点数必须是一个正整数，因此要求最少顶点数将是6，此最小整数大于17/3.

6.40　设 G 是至少有3个顶点的有限连通平面图. 证明 G 至少有一个次数为5或小于5的顶点.

证　☞ 设 p 是 G 的顶点数，q 是边数，且对 G 的每个顶点 u，$\deg(u) \geqslant 6$. 但 $2q$ 等于 G 的各顶点的次数之和，即有 $2q \geqslant 6p$. 因此，

$$q \geqslant 3p > 3p - 6.$$

这与定理6.3矛盾. 因此 G 有某一顶点的次数为5或小于5.

6.4　非平面图

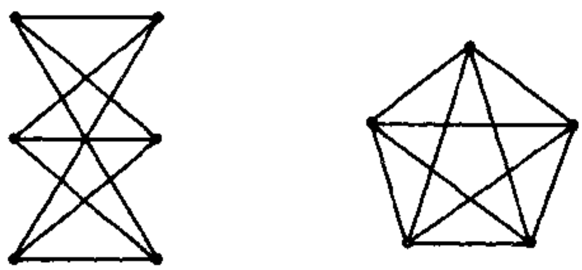
由库拉托夫斯基(Kuratowski)提出的如下定理给出了确定一个给定图是否是平面图的一个简单判别法.

定理 6.4　一个图是非平面图的充分必要条件是它含有一个与 $K_{3,3}$ 或 K_5 同胚的子图.

注　回忆一下，若图 G 和 H 可分别从同构图 G' 和 H' 增加顶点删除 G' 和 H' 的边得到，则 G 和 H 是同胚的.

6.41　应用欧拉公式和定理6.1证明 $K_{3,3}$ 是非平面图.

证　☞ $K_{3,3}$ 是一个完全偶图，它有 $p=6$ 个顶点和 $q=9$ 条边，如图6-27(a)所示. 设该图是平面图. 根据欧拉公式，这个图的平面表示将有5个区域. 我们看到没有3个顶点相互连接，因此每个区域的次数必为4或更大些，且次数之和必为20或更大. 根据定理6.1，该图有10或更多条边. 由于该图只有9条边，因此我们假设该图是平面图是错的. 于是我们证明了 $K_{3,3}$ 是非平面图.



(a)　(b)

图 6-27

6.42　应用定理6.3证明 K_5 是非平面图.

证　☞ 图 K_5 是如图6-27(b)所示的星图. 它是有 $p=5$ 个顶点和 $q=10$ 条边的完全图. 根据定理6.3，有

$$10 = q \leqslant 3p - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 15 - 6 = 9.$$

这是错误的. 因此 K_5 是非平面图.

6.43　图6-28(a)所示的图有一个子图与 $K_{3,3}$ 同构. 指出这个子图.

解　☞ 移去边 $\{C, F\}$ 便得到一个与 $K_{3,3}$ 同构的图. 为清楚看到这一点，调换顶点 E 和 F 的位置并且重新画边，得到的图如图6-28(b)所示.

6.44　图6-29(a)所示的图有一个子图与 K_5 同构. 指出这个子图.

解　☞ 删除顶点 A 和关联 A 的三条边 $\{B, A\}$, $\{C, A\}$ 和 $\{D, A\}$，我们得到一个与 K_5 同构的图. 为了清楚地看到这一点，把顶点 D 移到连接 B 和 C 的边的上方，得到的图如图6-29(b)所示.

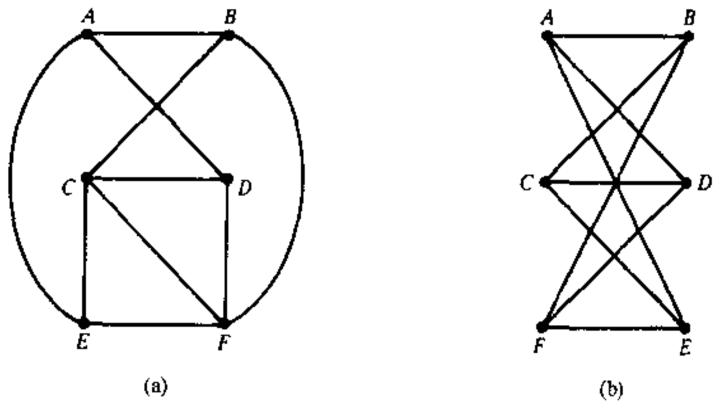


图 6-28

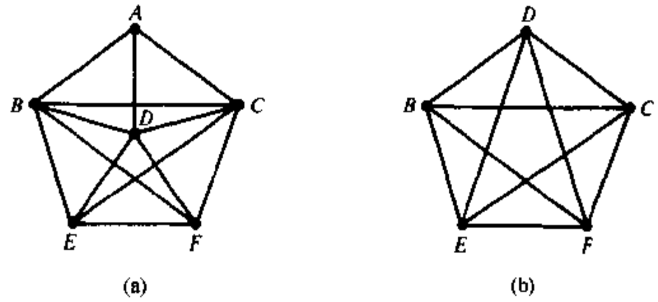


图 6-29

6.45　图 6-30(a)所示的图有一个子图与 $K_{3,3}$同胚.指出这个子图.

解　☞ 删去边{B,D},{D,F},{C,E}和{E,G},我们得到一个与 $K_{3,3}$同胚的图.这个子图如图 6-30(b)所示.

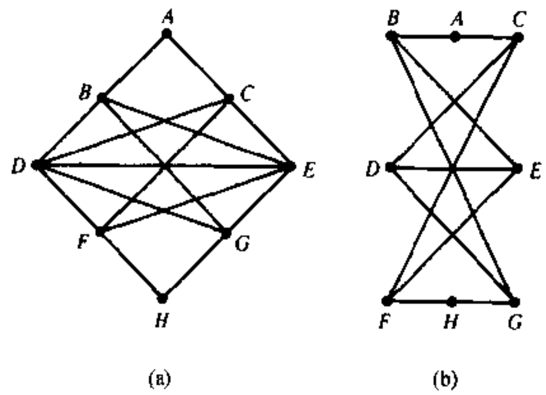


图 6-30

6.46　图 6-31(a)所示的图有一个子图与 K_5 同胚.指出这个子图.

解　☞ 删除顶点 H 及与其关联的边{F,H}和{G,H},又删除边{A,C},得到一个与 K_5 同胚的图.调换顶点 A 和 D,C 和 E 的位置便容易识别出这个子图.该子图如图 6-31(b)所示.

6.47　指出图 6-32 所示的哪些图是非平面图,即指出哪些图有一个子图与 $K_{3,3}$或 K_5 同胚.

解　☞ 图(a),(c)和(d)是非平面图.图(a)有一个子图与 K_5 同构,图(c)本身与 $K_{3,3}$同胚,图(d)本身与 $K_{3,3}$同构.

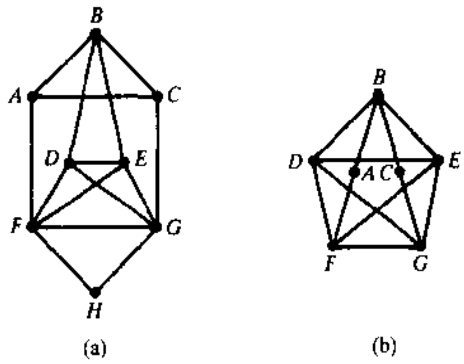


图 6-31

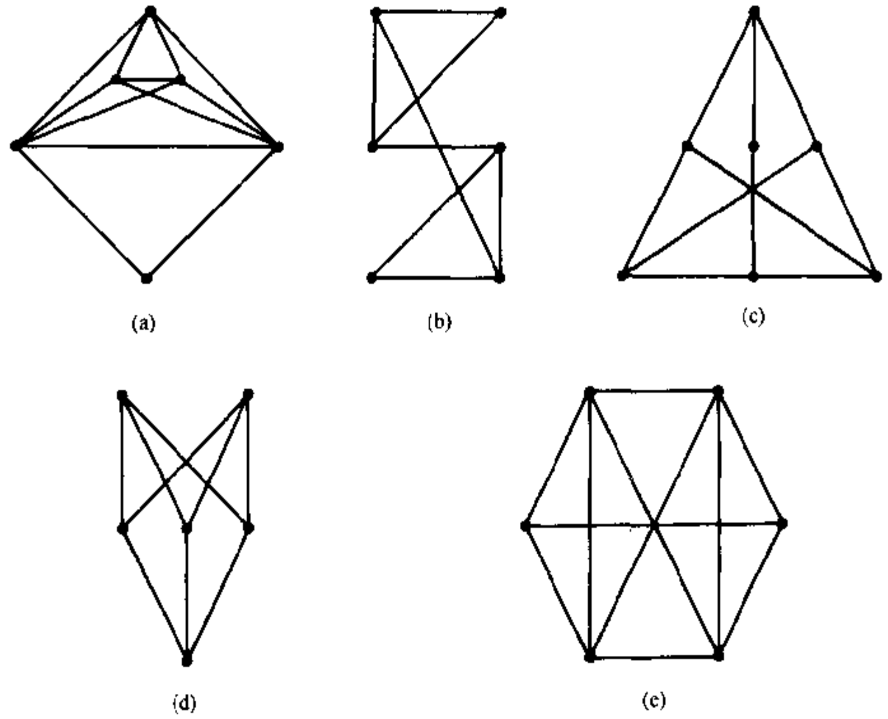


图 6-32

6.48　指出图 6-33 所示的哪些图是非平面图.

解　☞ 图(b)和(c)是非平面图.图(b)本身与 $K_{3,3}$同胚,图(c)有一个子图与 $K_{3,3}$同构.

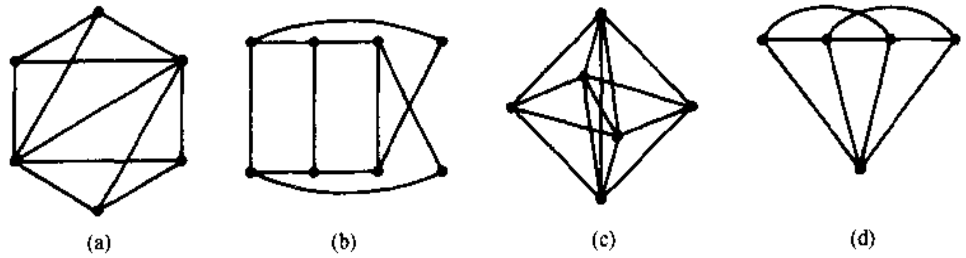


图 6-33

6.49　指出图 6-34 所表示的哪些图是非平面图.

解 ☞ 图(a),(c)和(e)是非平面图.图(a)有一个子图与 $K_{3,3}$ 同胚,图(c)是 K_6 且有子图与 $K_{3,3}$ 和 K_5 同构,(e)本身与 K_5 同胚.

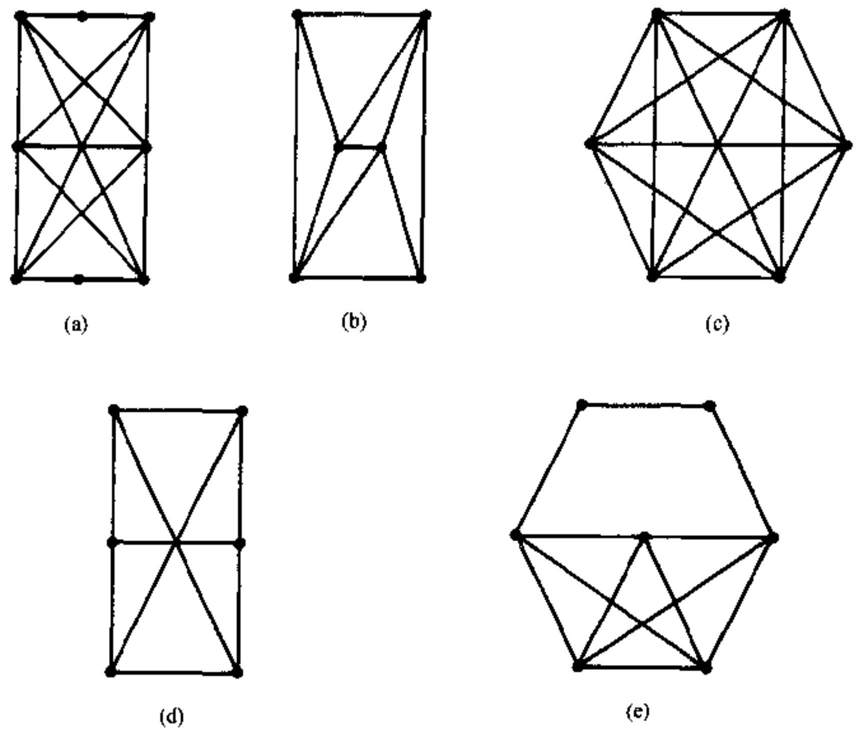


图 6-34

6.5 着色图

6.50 定义一个图 G 的一种**顶点着色**或简单地**着色**,以及 G 的色数,用 $\chi(G)$ 表示.

解 ☞ 一个图 G 的一种**着色**是赋予 G 的顶点一种颜色使得邻接顶点有不同的颜色.若 G 存在一种着色使用了 n 种颜色,则说 G 是 **n-可着色的**.给 G 着色的最少颜色种数称为 G 的**色数**.

6.51 求完全图 K_6,K_{10} 以及一般的 K_n 的色数.

解 ☞ 由于图 K_6 的每个顶点是与其他的每个顶点邻接的,因而对各个顶点需要不同的颜色,因此为 K_6 着色要用六种颜色.同理,为图 K_{10} 着色要用十种颜色,为图 K_n 着色要用 n 种颜色.于是 $\chi(K_6)=6$, $\chi(K_{10})=10$,并且一般地,$\chi(K_n)=n$.

6.52 叙述为一个图 G 着色的韦尔奇-鲍威尔(Welch-Powell)算法.

解 ☞ 首先将 G 的顶点按次数减小的顺序排序.(由于某些顶点可能有相同的次数,因此这样的排序可能不是惟一的.)然后,用一种颜色涂第一个顶点并依序用此颜色去涂表上的不与原先涂过这种颜色的顶点邻接的各个顶点.再从表的前头开始重复这个过程,用第二种颜色涂原先没有着色的顶点.继续重复加颜色直至所有顶点都已着色为止.

注 韦尔奇-鲍威尔算法是给一个图着色的一种有效的方法.我们强调这个方法只是给出 $\chi(G)$ 的一个上界.这就是说,该算法总不能给出为 G 着色所需的最少种颜色的数目.事实上,求 $\chi(G)$ 或许是极其困难的,除非一些简单的情形,如作为解释的下列习题.

6.53 考察图 6-35 的图 G.(a)用韦尔奇-鲍威尔算法为 G 着色(简单地认为颜色是"a","b",等等).(b)求 G 的色数.

解 ☞ (a)按顶点次数减少的顺序列出 G 的顶点(如下面的表所示).对第一个顶点 v_1 赋予颜色 a.表中不与 v_1 邻接的下一个顶点是 v_7,我们赋予 v_7 颜色 a.现在改用颜色 b.第一个没有着色的顶

点 v_4，赋予颜色 b. 下一个不与 v_4 邻接的未着色的顶点是 v_2，赋予 v_2 颜色 b. 由于所剩的未着色的顶点都与 v_4 或 v_2 邻接，因此改用颜色 c. 增加颜色重复这个过程直到所有顶点都着色为止. 整个着色过程列表如下：

顶点	v_1	v_4	v_5	v_6	v_2	v_3	v_7
次数	5	4	4	4	3	3	3
颜色	a	b	c	c	b	d	a

(b)顶点 v_1, v_3, v_4 和 v_6 相互连接，因此必须涂不同颜色. 这样给 G 着色至少需要四种颜色. 由于(a)仅用四种颜色为 G 着色，因此 $\chi(G)=4$.

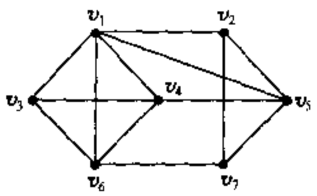


图 6-35

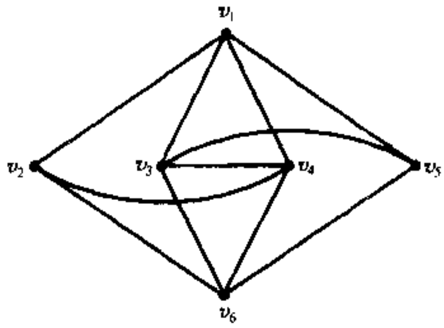


图 6-36

6.54　用图 6-36 的图 H 重复习题 6.53.

解　☞ (a)依照像习题 6.53 那样的步骤得到下面的数据：

顶点	v_1	v_3	v_4	v_6	v_2	v_5
次数	4	4	4	4	3	3
颜色	a	b	c	a	b	c

(b)顶点 v_1, v_3 和 v_4 相互连接，因此为图 H 着色至少需要三种颜色. 由于(a)用三种颜色，因此 $\chi(H)=3$.

6.55　用图 6-37 的图 G 重复习题 6.53.

解　☞ (a)依照像习题 6.53 那样的步骤，我们有

顶点	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
次数	3	3	3	3	3	3
颜色	a	b	b	a	b	a

(b)顶点 v_1 和 v_2 相互连接，因而为 G 着色至少需要两种颜色. 由(a)，$\chi(G)=2$.

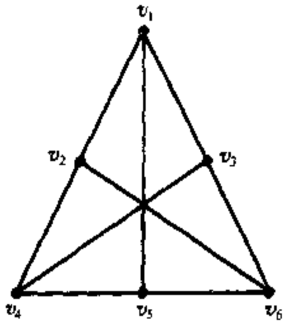


图 6-37

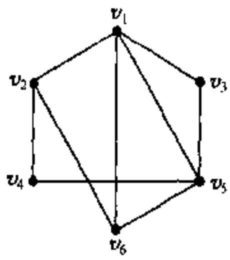


图 6-38

6.56　用图 6-38 的图 H 重复习题 6.53.

解　☞ (a)按照像习题 6.53 那样的步骤，我们有

顶点	v_1	v_5	v_2	v_6	v_3	v_4
次数	4	4	3	3	2	2
颜色	a	b	b	c	c	a

(b)顶点 v_1, v_3 和 v_5 相互连接,因而为 H 着色至少需要三种颜色. 由(a), $\chi(H)=3$.

6.57 应用韦尔奇-鲍威尔算法为图 6-39 的图着色,并求该图的色数 n.

解 ☞ 首先,将顶点按次数减少顺序排序得到序列

$$H,\ A,\ D,\ F,\ B,\ C,\ E,\ G.$$

继之,我们用第一种颜色涂顶点 H, B 和 G.(我们不能给 A, D 或 F 涂第一种颜色,因为它们每一个都与 H 连接,并且不能给 C 或 E 涂第一种颜色,因为每一个或与 H,或与 B 连接.)接着,对未着色的顶点,我们用第二种颜色涂顶点 A 和 D. 剩下的顶点 F, C 和 E 必须涂第三种颜色. 这样,色数 n 不会大于 3. 然而,在任何一种着色中,由于 H, D 和 E 是相互连接的,因此它们必须涂不同的颜色. 故 $n=3$.

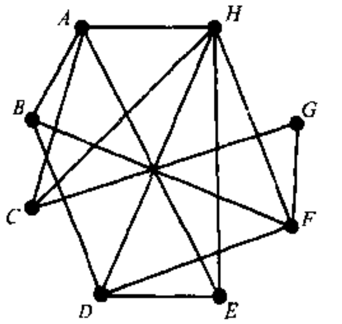


图 6-39

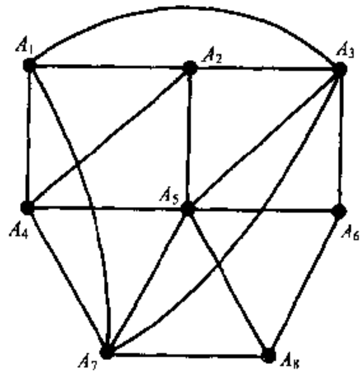


图 6-40

6.58 用韦尔奇-鲍威尔算法给图 6-40 的图 G 着色,并求 G 的色数 n.

解 ☞ 将顶点按次数减小顺序排序得到序列

$$A_5, A_3, A_7, A_1, A_2, A_4, A_6, A_8.$$

第一种颜色用来涂顶点 A_5 和 A_1. 第二种颜色用于涂顶点 A_3, A_4 和 A_8. 第三种颜色用于涂 A_7, A_2 和 A_6. 这样, G 是 3-可着色的. 注意,由于 A_1, A_2 和 A_3 必须涂上不同的颜色,因此 G 不是 2-着色的. 故 $n=\chi(G)=3$.

6.59 判定哪些连通图 G 是 1-可着色的,若有,请指出.

解 ☞ 若 G 有一条边 e 连接顶点 v 和 v',则 v 和 v' 必须涂不同的颜色. 这样, G 只能是具有一个顶点而无边的图.

偶图和着色

6.60 求偶图 $K_{3,4}$ 和 $K_{2,6}$ 的色数.

解 ☞ 一个偶图是这样的一个图:它的所有顶点可分成两个子集,其中每个子集的顶点都与另一个子集的所有顶点连接,但子集本身的顶点是不连接的(见习题 5.125). 由于同一子集没有顶点与任一其他顶点连接,因此一个给定的子集的所有顶点可赋予相同的颜色. 由于两个子集是连接的,因此每个子集必须涂上不同的颜色. 故任一偶图着色需要两种颜色. 据此, $\chi(K_{3,4})=2$, $\chi(K_{2,6})=2$. 定理 6.5 将这个概念公式化并加以推广.

定理 6.5 对于一个图 G,下面的结论是等价的:

(i) G 是 2-可着色的;

(ii) G 是偶图;

(iii) G 的每个循环的长度都是偶数.

6.61　证明定理 6.5.

证　(i)推得(ii). 设 G 是 2 -可着色的. 令 M 是涂上第一种颜色的顶点集合, N 是涂上第二种颜色的顶点集合. 由于 M 的顶点颜色相同, N 的顶点颜色也相同, 因此 M 的各顶点相互不邻接, N 的各顶点也相互不邻接, 从而 M 和 N 形成 G 的顶点的一个偶划分.

(ii)推得(iii). 设 G 是偶图且 M 和 N 形成 G 的顶点的一个偶划分. 若一个循环开始于比方说 M 的一个顶点 u, 则它将走到 N 的一个顶点, 然后到 M 的一个顶点而又到 N, 等等. 因此当该循环回到 u 时, 它必有偶数长度. 这就是说, G 的所有循环长度都是偶数.

(iii)推得(i). 最后, 假设 G 的每个循环的长度都是偶数. 我们在每个连通分图选一个顶点并且涂上第一种颜色, 比方说是红色的. 然后我们逐次给所有顶点着色如下: 若一个顶点涂上红色, 则任一个与它邻接的顶点涂上第二种颜色, 例如蓝色. 若一个顶点涂上蓝色, 则任一个与它邻接的顶点涂上红色. 由于每一循环的长度为偶数, 因此没有邻接的顶点将涂上相同的颜色. 故 G 是 2 -可着色的, 定理得证.

6.62　习题 6.55 的图是 2 -可着色的. 据定理 6.5 知 G 必是偶图. 指出生成 G 的两个顶点子集来检验之.

解　根据观察, 我们看到 G 是 $K_{3,3}$, 其中 $m=\{v_1, v_4, v_6\}$ 和 $n=\{v_2, v_3, v_5\}$. 然而, 我们知道同一子集的所有顶点必有相同的颜色, 因此我们容易检验赋予的颜色来识别每个子集.

6.63　考虑图 6-41 的偶图 $K_{2,4}$ 求(a)该图的一种 2 -着色; (b)从 v_1 开始的 6 个循环并说明它们都是偶数长度的.

解　(a)这里由 $m=\{v_1, v_2\}$ 和 $n=\{v_3, v_4, v_5, v_6\}$ 便得到偶图. 这样, v_1 和 v_2 涂上一种颜色, 以及 v_3, v_4, v_5 和 v_6 涂上另一种颜色.

(b)从顶点 v_1 出发的 6 个循环是

$$(v_1, v_3, v_2, v_4, v_1),\qquad (v_1, v_3, v_2, v_6, v_1),$$
$$(v_1, v_4, v_2, v_6, v_1),\qquad (v_1, v_3, v_2, v_5, v_1),$$
$$(v_1, v_4, v_2, v_5, v_1),\qquad (v_1, v_5, v_2, v_6, v_1),$$

所有的循环长度为 4, 因而每一长度都是偶数.

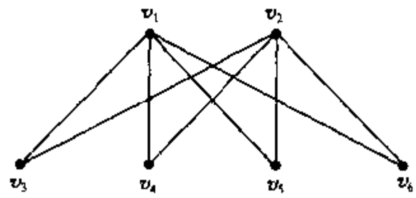


图 6-41

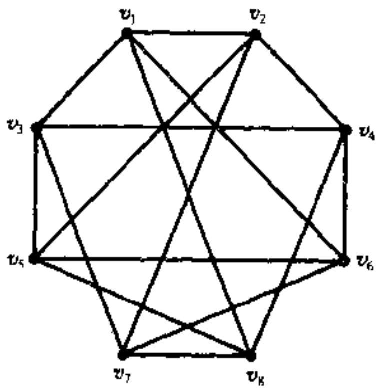


图 6-42

6.64　图 6-42 所示的图 G 是偶图. 为了识别生成 G 的两个顶点子集, 用韦尔奇-鲍威尔算法给 G 的顶点着色.

解　由于每个顶点都是 4 次的, 因而 G 必是 $K_{4,4}$. 应用韦尔奇-鲍威尔算法, 我们可以识别出两个子集为 $m=\{v_1, v_4, v_5, v_7\}$ 和 $n=\{v_2, v_3, v_6, v_8\}$.

平面图和着色

定理 6.6　任一平面图是 5 -可着色的.

6.65　证明定理 6.6.

证 ☞ 关于 G 的顶点数 p 用归纳法证明. 若 $p \leqslant 5$, 则定理显然成立. 设 $p>5$, 且对顶点数小于 p 的图定理成立. 根据习题 6.40, G 有一个顶点 v, 使得 $\deg(v) \leqslant 5$. 由归纳法, 子图 $G-v$ 是 5 -可着色的. 假设有这样的一种着色. 若与 v 邻接的顶点用了少于五种的颜色, 我们则只要用剩余的颜色的一种去涂 v, 从而得到 G 的一种 5 -着色. 我们还留下的情形是, v 与涂上不同颜色的顶点邻接, 比方说, 这些顶点绕 v 按逆时针方向移动是 $v_1, \cdots, v_5$, 并且分别涂上颜色 $c_1, \cdots, c_5$(图 6-43).

现在考虑由涂上颜色 c_1 和 c_3 的顶点生成的 G 的子图 H. 注意 H 包含 v_1 和 v_3. 若 v_1 和 v_3 属于 H 的不同分图, 则可交换包含 v_1 的分图中的颜色 c_1 和 c_3 并不破坏 $G-v$ 的着色. 于是 v_1 和 v_3 都涂上 c_3, c_1 可以用来涂 v, 从而我们有 G 的一个 5 -着色. 另一方面, 假设 v_1 和 v_3 在 H 的同一分图中, 则从 v_1 到 v_3 有一条通路 P, 它的顶点或是涂上颜色 c_1 或是 c_3. 这条通路 P 和边 $\{v, v_1\}$ 以及 $\{v, v_3\}$ 一起形成或是包围 v_2 或是包围 v_4 的一个循环 C. 现在考虑由着色 c_2 或 c_4 的顶点生成的子图 K. 由于 C 包围 v_2 或 v_4, 但非二者, 因此顶点 v_2 和 v_4 属于 K 的不同分图. 这样, 我们可以交换包含 v_2 的分图中的颜色 c_2 和 c_4 而不破坏 $G-v$ 的着色. 因此 v_2 和 v_4 都涂上颜色 c_4, 并且我们可选取 c_4 来涂 v, 得到 G 的一种 5 -着色. 于是 G 是 5 -可着色的, 定理得证.

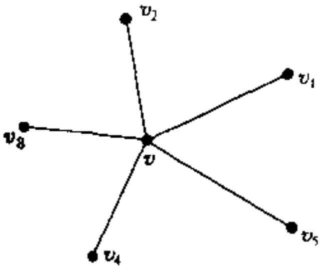


图 6-43

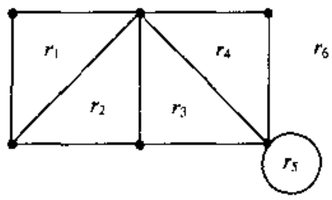


图 6-44

6.6 颜色和地图

6.66 定义一地图的邻接区域.

解 ☞ 若一个平面多重图的两个区域有一条公共边, 则说这两个区域是**邻接的**. 例如, 考察图 6-44所示的地图. 区域 r_2 和 r_3 是邻接的, 但区域 r_2 和 r_4 则不是邻接的.

6.67 考虑图 6-45 的地图 N. 指出 N 的与区域: (a) r_7, (b) r_2, (c) r_6 邻接的区域.

解 ☞ 与区域 r_k 有公共边的区域是与 r_k 邻接的. 因此, (a) r_4, r_5 和 r_8; (b) r_1 和 r_4; (c) 只有 r_4 与 r_6 邻接.

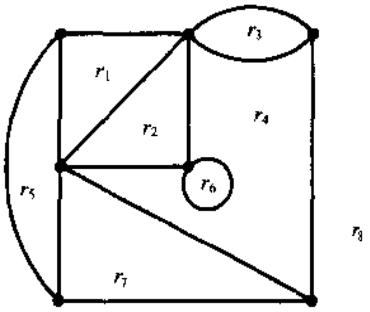


图 6-45

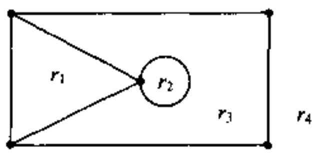


图 6-46

6.68 求图 6-46 所示的地图 R 的每一个区域的邻接区域的数目.

解 ☞ 求与一个给定区域邻接的区域数目是计算与该区域至少有一条公共边的区域数目. 因此 R 的四个区域 r_1, r_2, r_3 和 r_4 分别有 2, 1, 3 和 2 个邻接区域.

6.69 解释一张地图的一种着色是什么意思.

解 ☞ 一张地图 M 的一种**着色**的含义是给 M 的区域涂上颜色使得邻接区域有不同的颜色. 如果 M 存在使用 n 种颜色的一种着色,则说地图 M 是 **n-可着色的**. 图 6-44 的地图是 3-可着色的,这是因为它的区域可着色如下:

r_1 蓝色, r_2 白色, r_3 蓝色, r_4 白色, r_5 蓝色, r_6 绿色.

6.70 考虑 6-47 中的地图 P, (a)找 P 的一种 4-可着色, (b)P 是 3-可着色吗?

解 ☞ (a)地图 P 的一个 4-可着色是给 P 的区域着四种颜色使邻接的区域涂不同的颜色. 一种可能的 4-着色如下:

红色: r_1 和 r_3, 蓝色: r_2 和 r_6, 绿色: r_5 和 r_4, 黄色: r_7.

(b)不. 我们不能用三种颜色给 P 着色. 注意区域 r_1, r_2, r_5 和 r_7 都是相互邻接的, 因此必须涂不同颜色. 故给 P 着色至少需要四种颜色.

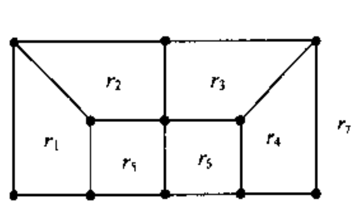


图 6-47

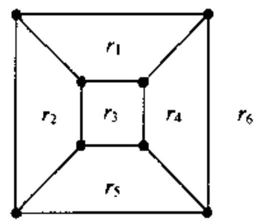


图 6-48

6.71 考虑图 6-48 的地图 Q. (a)求 Q 的一种 4-着色, (b)Q 是 3-可着色吗?

解 ☞ (a)一种可能的 4-着色如下:

红色: r_1 和 r_5, 蓝色: r_3, 绿色: r_2 和 r_4, 黄色: r_6.

(b)是. 例如, Q 的一种 3-着色如下:

红色: r_1 和 r_5, 蓝色: r_2 和 r_4, 绿色: r_3 和 r_6.

6.72 用最少种颜色给图 6-49 的地图 M 着色. 颜色名称简单地用"a","b",等等.

解 ☞ 给地图 M 着色只需两种颜色. 一种这样的着色如下:

颜色 a: r_1, r_4, r_6; 颜色 b: r_2, r_3, r_5, r_7, r_8.

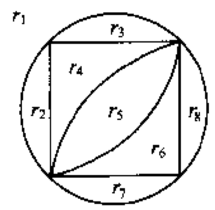


图 6-49

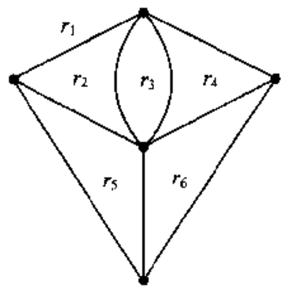


图 6-50

6.73 用图 6-50 的地图 N 重复习题 6.72.

解 ☞ 给地图 N 着色需要三种颜色. 一种这样的着色如下:

颜色 a: r_1, r_3; 颜色 b: r_2, r_6; 颜色 c: r_4, r_5.

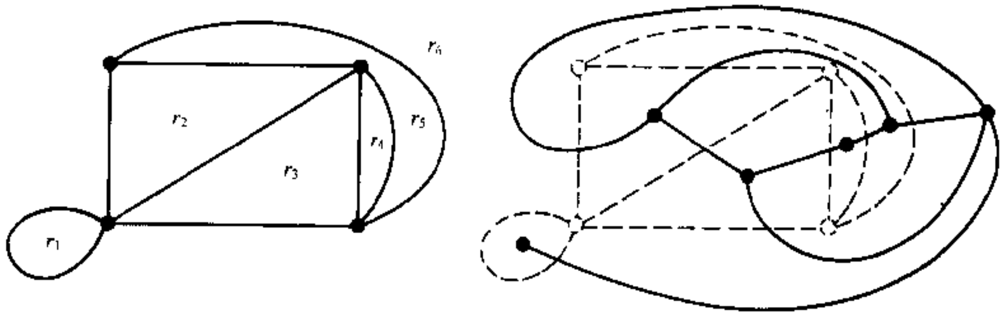
由于 r_1, r_2 和 r_5 相互邻接, 因此三种颜色是需要的.

对偶图

6.74 结合一个例子定义一张地图 M 的(惠特尼(Whitney))对偶.

解 ☞ 考察一张地图 M. 在 M 的每一个区域中选取一个点. 若两个区域有一条公共边, 则对应的

点可以用通过公共边的一条线连接起来.这些曲线可以画成不相交叉.这样,我们得到一张新的地图 M^*,使得 M^* 的每个顶点恰好对应 M 的一个区域,M^* 称为 M 的对偶.图 6-51(b)表示图 6-51(a)的地图的对偶.我们可以证明 M^* 的每一个区域恰好含 M 的一个顶点而且 M^* 的每一条边将恰好与 M 的一条边交叉,反之亦然.这样,M 将是图 M^* 的对偶.



(a)　　(b)

图 6-51

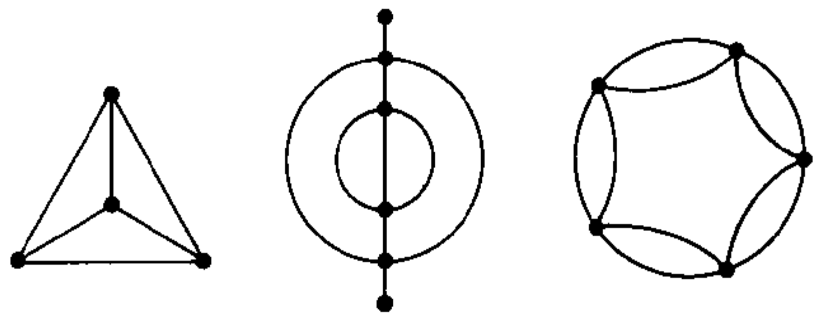
6.75 关于对偶地图,说明图的着色(即顶点着色)和地图着色(即区域着色)之间的关系如何.

解 ☞ 我们看到地图 M 的区域着色对应于对偶地图 M^* 的顶点着色.换言之,一张地图 M 是 n-可着色的当且仅当对偶地图 M^* 的平面图是 n-可着色的.因此定理 6.6 可重述如下.

定理 6.6′(交替) 每一平面地图 M 是 5-可着色的.

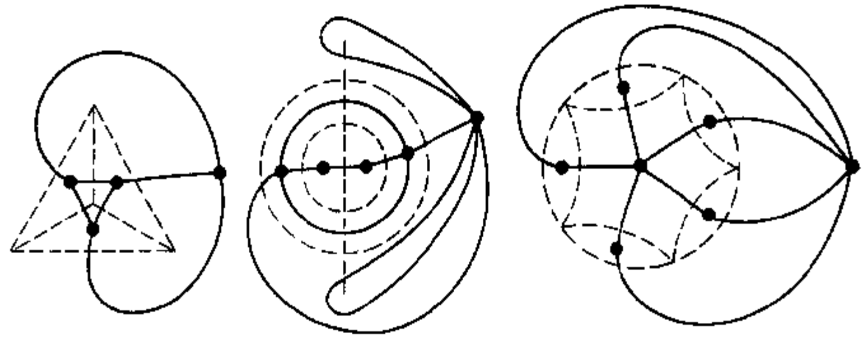
6.76 画出与图 6-52 的各地图对偶的地图.

解 ☞ 在每一个区域选取一个顶点(点),如果两个顶点的相应区域有一条公共边,则连接这两个顶点.我们强调一地图和它的对偶必须有相同的边数.相应结果如图 6-53 所示.我们看到图6-53(b)中有两个环,它们对应原来地图的完全被"外"区域包含的两条边.



(a)　　(b)　　(c)

图 6-52

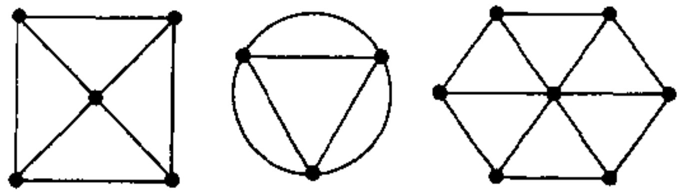


(a)　　(b)　　(c)

图 6-53

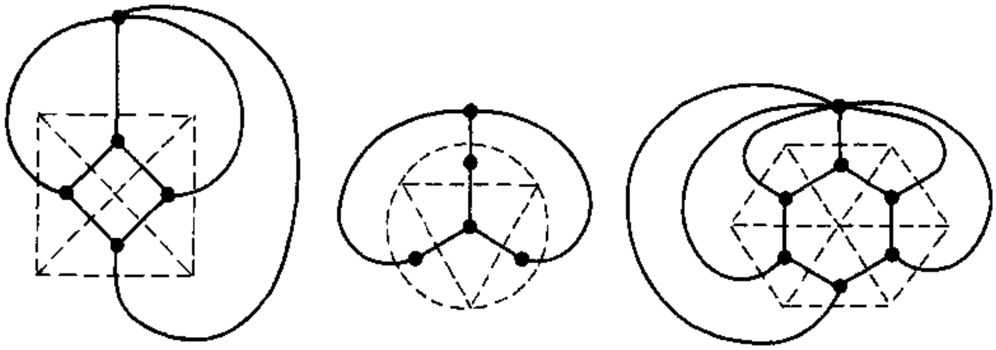
6.77　画出与图 6-54 的各地图对偶的地图.

解　☞ 先在各个地图 M 的每一区域中放置一个顶点(点),然后,若两个顶点的相应区域有一条公共边,则把它们连接起来.按此方法,我们得到的对偶地图 M^* 在图 6-55 中.



(a)　(b)　(c)

图 6-54



(a)　(b)　(c)

图 6-55

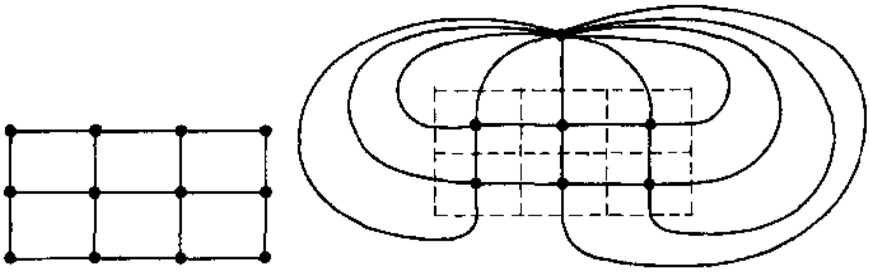
6.78　考虑图 6-56(a)的地图 M.(a)M 有多少个区域? (b)画出与 M 对偶的地图 M^*,(c)确定 M^* 有多少个顶点,(d)画出与 M^* 对偶的地图.

解　☞ (a)M 有 6 个有界区域和一个无界区域.

(b)对偶地图 M^* 呈现在图 6-56(b)中.

(c)M^* 有 7 个顶点,对应于 M 的每个区域有一个顶点.

(d)原来的图 6-56(a)的地图 M 是图 6-56(b)的地图 M^* 的对偶.



(a)　(b)

图 6-56

四色定理

6.79　解释四色定理.

解　☞ 从上一世纪就知道的定理 6.6 说明每张地图是 5-可着色的.猜测仅仅需要四种颜色

是最后于1976年阿佩尔(Appel)和哈肯(Haken)用计算机分析了包括数亿种情形的差不多2000张地图给予证明.现在我们叙述这个结果,称之为四色定理.

四色定理 6.7(a) 一张地图 M 的区域着色,欲使邻接区域有不同的颜色,则无需多于四种颜色.

四色定理 6.7(b) 每个平面图是(顶点)4-可着色的.

6.7 树

一个没有循环的图 G 称为**非循环的**或**循环-自由的**.一棵**树** T 是一个没有循环的连通图.一片**森林** F 是没有循环的图,因此森林 F 的连通分图是树.由单一顶点而没有边构成的树称为**退化树**.

下列定理给出定义树的等价方法和重要的有关性质.(定理6.8和定理6.9分别在习题6.90和6.91中给予证明.)

定理 6.8 设 G 是有多于一个顶点的图,则下面结论是等价的:

(i) G 是一棵树.

(ii)每对顶点恰好由一条简单通路所连接.

(iii) G 是连通的,但若删除任一条边则所得的图是不连通的.

(iv) G 是循环-自由的,但若任加一条边到 G 中则所得图恰有一个循环.

定理 6.9 设 G 是具 $n>1$ 个顶点的有限图,则下面结论是等价的:

(i) G 是一棵树.

(ii) G 是循环-自由的,且有 $n-1$ 条边.

(iii) G 是连通的,且有 $n-1$ 条边.

定理 6.10 树(且因此森林)是2-可着色的.

6.80 设 T 是有6个顶点的一棵树. T 有多少条边?

解 ☞ 据定理6.9, T 有 $6-1=5$ 条边.

6.81 就图6-57的图 A 检验定理6.8.

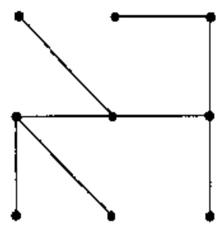


图 6-57

解 ☞ 对于图 A,下面结论成立:

(i)由于 A 是连通的且没有循环,因此 A 是一棵树.

(ii)在 A 中任选两个顶点,它们恰好由一条简单通路连接.

(iii)若删除任一条边,则 A 不再是连通的.

(iv)若在 A 中任加一条边,则 A 恰有一个循环.

因此,对于图 A,定理6.8得到验证.

6.82 就图6-57的图 A 检验定理6.9.

解 ☞ 对于图 A,下面结论成立:

(i)由于图 A 是连通的且没有循环,因此 A 是一棵树.

(ii) A 是循环-自由的,且有9个顶点和8条边.

(iii) A 是连通的且有9个顶点和8条边.

因此,对于图 A,定理6.9得到验证。

6.83 考虑图6-58的树 T.(a)若 T 有割点的话,则哪些顶点是割点?若 T 有桥的话,则哪些边是桥?

解 ☞ (a)在一棵树中,每一个次数大于1的顶点都是割点,因此 c, r, u, w 和 y 都是割点.

(b)若在一棵树中移去任一条边,则该树是不连通的(定理6.8),因此在一棵树中的每条边都是一座桥.

6.84 求图6-59的树 T 的一种2-着色.

解 ☞ 为了求任一树的一种2-着色,首先赋予任一顶点第一种颜色,然后把第二种颜色赋予与

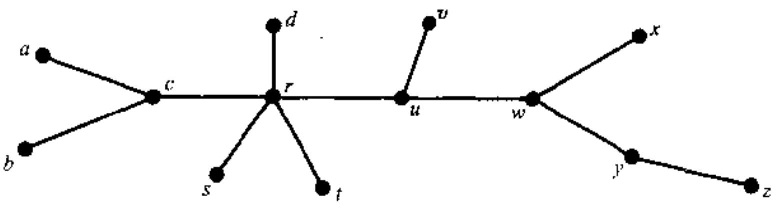


图 6-58

第一个顶点邻接的所有顶点.其次,所有与赋予第二种颜色的顶点邻接的顶点赋予第一种颜色.重复这个过程直到所有顶点都着色.例如,在树 T 中,赋予顶点 v_2 红色,然后,赋予顶点 v_1, v_4 和 v_5 绿色,随后,再赋予顶点 v_7 和 v_8 红色.按这种方法继续进行下去,得到颜色分配:

红色:v_2, v_3, v_7, v_8,　　绿色:v_1, v_4, v_5, v_6, v_9.

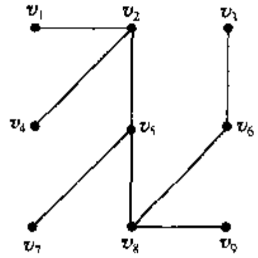


图 6-59

6.85　求图 6-60 的树 T 的一种 2-着色.

解　☞ 使用红和绿两种颜色,赋予 v_1 红色,如同习题 6.84 的过程,得到 T 的如下着色:

红色:v_1, v_6, v_7,　　绿色:v_2, v_3, v_4, v_5, v_8.

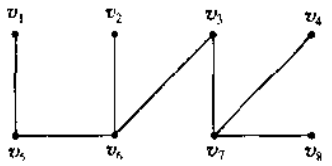


图 6-60

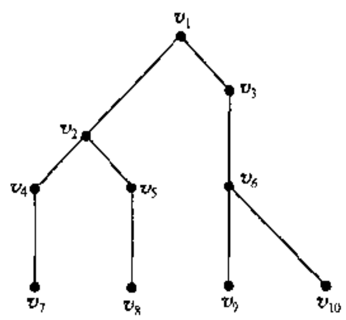


图 6-61

6.86　求图 6-61 的树 T 的一种 2-着色.

解　☞ 如同习题 6-85 的过程,得到 T 的如下着色:

红色:v_1, v_4, v_5, v_6,　　绿色:$v_2, v_3, v_7, v_8, v_9, v_{10}$.

6.87　考察完全偶图 $K_{m,n}$,证明 $K_{m,n}$ 不是树,此处 m 和 n 都大于 1.

证　☞ 设 u 和 u' 是第一个集合的顶点,v 和 v' 是第二个集合的顶点,则 (u, v, u', v', u) 是一个循环.因此,对 $m, n>1$, $K_{m,n}$ 不是树.

6.88　考察完全图 K_n.证明 K_n 不是树,此处 $n>2$.

证　☞ 设 u, v 和 w 是 K_n 的三个顶点,则 (u, v, w, u) 是 K_n 中的一个循环.因此对 $n>2$, K_n 不是树.

6.89　假设一个图 G 中从一个顶点 u 到一个顶点 v 有两条不同的简单通路,比方说 P_1 和 P_2.证明 G 含有一个循环.

证　☞ 设 w 是 P_1 和 P_2 上的一个顶点使得 P_1 和 P_2 上随后的顶点是不同的.设 w' 是继 w 之后同时在 P_1 和 P_2 上的第一个顶点.(参见图 6-62)那么在 w 和 w' 之间 P_1 和 P_2 的子通路除 w 和 w' 外没有公共顶点,因此这两条子通路形成一个循环.

6.90　证明定理 6.8.

证　☞ (i)蕴含(ii).设 u 和 v 是 G 的两个顶点.由于 G 是一棵树,因此在 u 和 v 之间至少有一

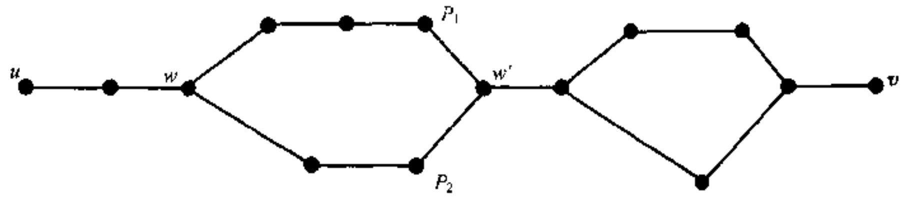


图 6-62

条通路.而且,在 u 和 v 之间只能有一条通路,否则 G 将有一个循环(习题 6.89).

(ii)蕴含(iii).假定我们从 G 删去一条边 $e=\{u,v\}$.注意 e 是从 u 到 v 的一条通路.假设得到的图 G-e 有一条从 u 到 v 的通路 P,则 P 和 e 是从 u 到 v 的两条不同的通路,这与假设矛盾.因此在 G-e 中 u 和 v 之间没有通路,从而 G-e 是不连通的.

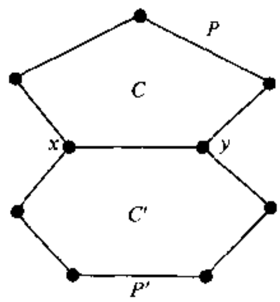


图 6-63

(iii)蕴含(iv).设 G 有包含一条边 $e=\{u,v\}$ 的一个循环 C.根据假设,G 是连通的但 $G'=G-e$ 是不连通的,u 和 v 属于 G' 的两个不同分图(习题 5.32).这就与 u 和 v 是由 G' 中的通路 $P=C-e$ 连接起来的事实相矛盾.因此 G 是循环-自由的.现设 x 和 y 是 G 的两个顶点,且设 H 是 G 中由邻接边 $e=\{x,y\}$ 得到的图.由于 G 是连通的,因此 G 中从 x 到 y 有一条通路 P,从而 $C=Pe$ 形成 H 中的一个循环.设 H 还有另一个循环 C'.由于 G 是循环-自由的,因此 C' 必包含边 e,比方说 $C'=P'e$.因此 P 和 P' 是 G 中从 x 到 y 的两条通路(参见图 6-63).于是(习题 6.89),G 有一个循环,这与 G 是循环-自由的事实相矛盾.故 H 仅仅含有一个循环.

(iv)蕴含(i).由于加一条边 $e=\{x,y\}$ 到 G 产生一个循环,因此顶点 x 和 y 必定已经是连接的.于是 G 是连通的,且由假设 G 是循环-自由的,就是说,G 是一棵树.

6.91　证明定理 6.9.

证 ☞ 对 G 的顶点数 n 用归纳法证明.设 $n=1$,即 G 仅有一个顶点,则 G 有 $0=1-1$ 条边,因而 G 是连通的和循环-自由的.于是,对 $n=1$ 定理成立.

假设 $n>1$,即 G 有多于一个顶点.我们证明,对于 G,(i),(ii)和(iii)是等价的,这里,我们假设对于所有具有少于 n 个顶点的图,它们是等价的

(i)蕴含(ii).设 G 是一棵树.那么 G 是循环-自由的,因此我们只须证明 G 有 $n-1$ 条边.根据习题 5.137 知,G 有次数为 1 的一个顶点.删去这个顶点及其边,我们得到一棵具有 $n-1$ 个顶点的树 T.对于 T 定理成立,因此 T 有 $n-2$ 条边.故 G 有 $n-1$ 条边.

(ii)蕴含(iii).设 G 是循环-自由的且有 $n-1$ 条边.我们只需证明 G 是连通的.假设 G 是不连通的且有 k 个分图 $T_1,\cdots,T_k$,由于它们的每一个都是连通的且循环-自由的,因此它们都是树.例如,T_i 有 n_i 个顶点.注意 $n_i<n$,因此对于 T_i 定理成立,从而 T_i 有 n_i-1 条边.这样

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

以及

$$\begin{aligned} n-1 &= (n_1-1)+(n_2-1)+\cdots+(n_k-1) \\ &= n_1+n_2+\cdots+n_k-k = n-k, \end{aligned}$$

因此 $k=1$.然而,这与假设 G 是不连通的且有 $k>1$ 个分图相矛盾.故 G 是连通的.

(iii)蕴含(i).设 G 是连通的且有 $n-1$ 条边.我们只需证明 G 是循环-自由的.设 G 有包含一条边 e 的一个循环,删除 e 便得到图 $H=G-e$,它仍是连通的.但 H 有 n 个顶点和 $n-2$ 条边,从而必定不连通.这样,G 是循环-自由的从而它是一棵树.

生成树

6.92　解释生成树是什么含义.

解 ☞ 若图 G 的一个子图 T 是一棵树且 T 包含 G 的所有顶点,则称 T 是 G 的**生成树**.

6.93 求图 6-64 所示的图 G 的两棵生成树.

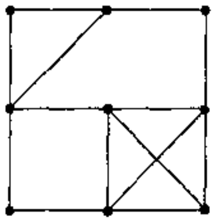


图 6-64

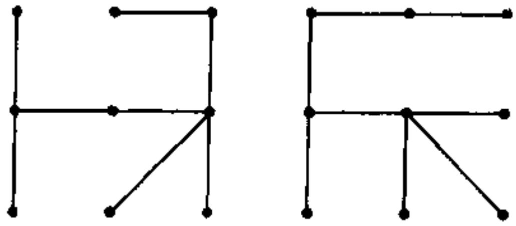


图 6-65

解 ☞ G 的一棵生成树是 G 的一个子图,该子图是一棵树且包含 G 的所有顶点.图 6-65 表示两个可能的生成树.

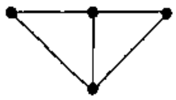


图 6-66

6.94 求图 6-66 所示的图 G 的所有的生成树.

解 ☞ 见图 6-67.注意,所有的生成树或是与(i)或是与(ii)同构.

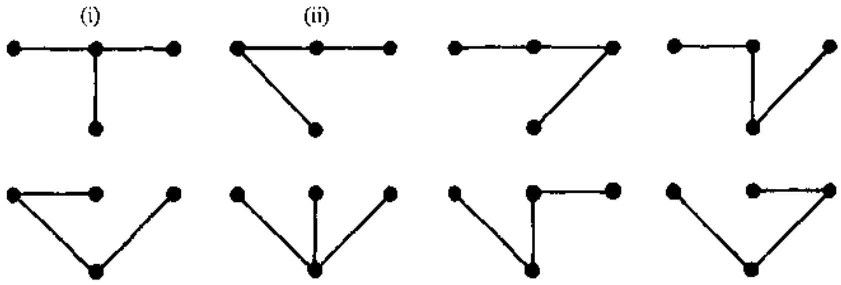


图 6-67

6.95 求图 6-68 所示的图 H 的所有生成树.

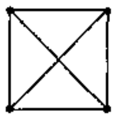


图 6-68

解 ☞ 见图 6-69.我们再一次看到,所有生成树与图 6-67 的(i)或(ii)同构.

6.96 考虑一个有限连通图 G.G 的所有生成树 T 必有相同的边数?

解 ☞ 是.事实上,若 G 有 n 个顶点,则 G 的任一生成树 T 必有 $n-1$ 条边.

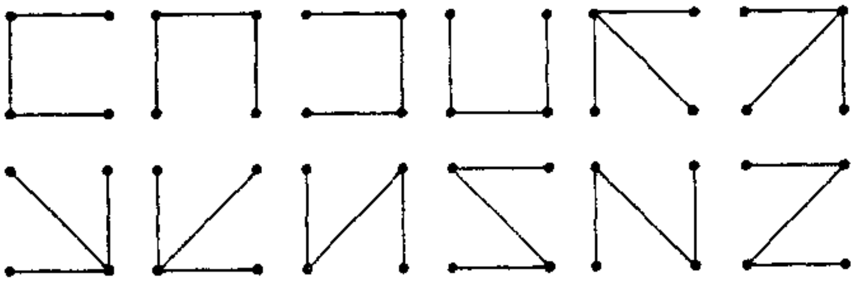


图 6-69

最小生成树

6.97 设 G 是一个图,它的边都赋以长度,即标上正数.定义 G 的一棵**最小(或最短)生成树** T.

解 ☞ G 的所有生成树中,T 有最小的长度和.

6.98 图 6-70 中标号图 G 有三棵生成树.(a)求 G 的生成树及其长度,(b)G 的最小生成树

是哪一棵?

解 ☞ (a)三棵生成树为图 6-71 所表示．每棵生成树的长度是它的边的长度之和．因此 T_1, T_2 和 T_3 的长度分别是 14,11 和 15.

(b)在所有三棵生成树中 T_2 的长度最短,因此 T_2 是最小生成树.

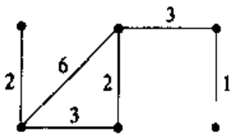


图 6-70

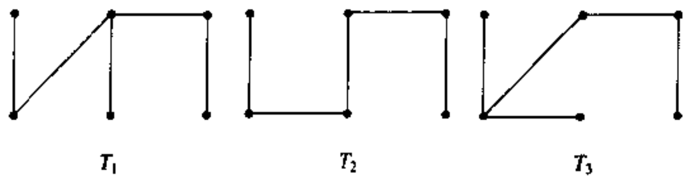


图 6-71

6.99　给出求一个有限的连通标号图 G 的最小生成树的两种算法.

解 ☞ **算法 6.1**　输入具有 m 个顶点的一个图 G.

第 1 步．将 G 的边按长度减少的顺序排序.

第 2 步．逐次地进行删除不致于使图不连通的每一条边,直到剩下 $m-1$ 条边为止.

第 3 步．输出剩余的边(它们形成 G 的一棵最小生成树 T).

算法 6.2　输入具有 m 个顶点的一个图 G.

第 1 步．将 G 的边按长度增加的顺序排序.

第 2 步．逐次地进行,在 G 的 m 个顶点上一次添加一条边使得不形成循环,直到 $m-1$ 条边都添加完为止.

第 3 步．输出添加上的 $m-1$ 条边(它们形成 G 的一棵最小生成树 T).

6.100　对于图 6-72(a)的标号连通图 Q,应用习题 6.99 的算法 6.1 求 Q 的最小生成树.

解 ☞ 图 Q 有 6 个顶点,因此 Q 的任一生成树有 5 条边．由算法 6.1,这些边按长度减少的顺序排序并逐次删除(不致于使 Q 不连通)直到剩下 5 条边．这就得到下面的数据资料:

边	AF	BC	AC	BE	CE	BF	AE	DF	BD
长度	9	8	7	7	6	5	4	4	3
删除?	是	是	是	否	否	是			

因此,Q 的最小生成树包含边

$$\{BE, CE, AE, DF, BD\}.$$

这棵生成树有长度 24,且它是图 6-72(b)所表示的.

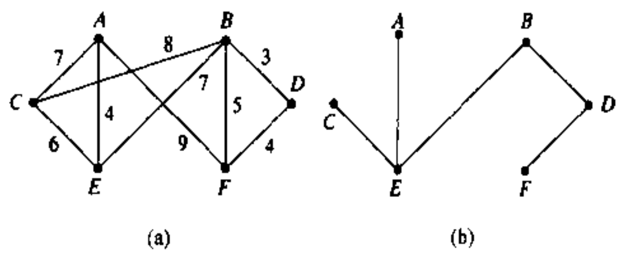


图 6-72

6.101　对于图 6-72(a)的图应用习题 6.99 的算法 6.2.

解 ☞ Q 的任一生成树有 5 条边．由算法 6.2,所有的边按长度增加的顺序排序并且逐次添加(不致于形成循环)直到含有 5 条边为止．这就得到下面的数据资料:

边	BD	AE	DF	BF	CE	AC	BE	BC	AF

长度	3	4	4	5	6	7	7	8	9
添加?	是	是	是	否	是	否	是		

因此,Q 的最小生成树包含边

$$\{BD, AE, DF, CE, BE\}.$$

这棵生成树与习题 6.100 应用算法 6.1 得到的结果相同.

6.102　对于图 6-73(a)的标号连通图 R,应用算法 6.1 求 R 的最小生成树.

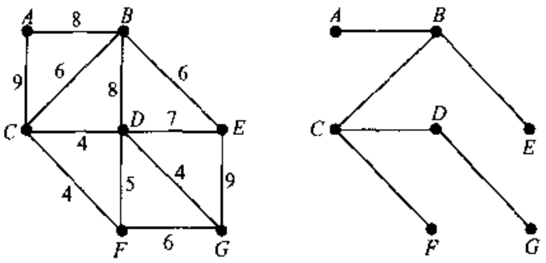
解 ☞ 图 R 有 7 个顶点,因此 R 的任一生成树将有 6 条边.应用算法 6.1(如同习题 6.100)得到下面的数据资料:

边	AC	EG	AB	BD	DE	BC	BE	FG	DF	CD	CF	DG
长度	9	9	8	8	7	6	6	6	5	4	4	4
删除?	是	是	否	是	是	否	否	是	是			

因此 R 的最小生成树包含边

$$\{AB, BC, BE, CD, CF, DG\}.$$

这棵最小生成树有长度 32,它是图 6-73(b)所表示的.



(a)　　(b)

图 6-73

6.103　就图 6-73(a)的图 R,应用算法 6.2.

解 ☞ R 的任一生成树包含 6 条边.应用算法 6.2(如同习题 6.101)得到下面的数据资料:

边	CD	CF	DG	DF	BC	BE	FG	DE	AB	BD	AC	EG
长度	4	4	4	5	6	6	6	7	8	8	9	9
添加?	是	是	是	否	是	是	否	否	是	否		

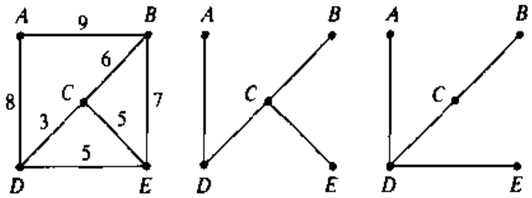
因此 R 的最小生成树包含边

$$\{CD, CF, DG, BC, BE, AB\}.$$

这棵生成树与习题 6.102 应用算法 6.1 得到的结果相同.

6.104　求图 6-74(a)的标号图 G 的两棵不同的最小生成树.(这样,最小生成树未必惟一.)

解 ☞ 应用算法 6.1,我们首先删除边 AB 和 BE.然后,我们删除长度相同的边或是 CE 或是 DE.删除一条或者另一条边得到两种最小生或树如图 6-74(b)和(c)所示.



(a)　　(b)　　(c)

图 6-74

6.105 应用算法 6.2 求图 6-75(a)的标号图的两棵不同的最小生成树.

解 ☞ 如同习题 6.100 概括的进程得到下面的数据资料:

边	AB	CE	FG	EH	DH	AC	BD	DE	BC	CF	EG	GH	AF
长度	4	4	4	5	6	7	7	7	8	8	9	10	12
添加?	是	是	是	是	是	是	否	否	否	是			

这就产生图 6-75(b)的生成树,它具有边

$$\{AB, CE, FG, EH, DH, AC, CF\}.$$

注意,边 AC 和 BD 都具有长度 7,二者都添加上则会产生一个循环,因此或是添加 AC 或是添加 BD.图 6-75(c)表示这样的第二棵最小生成树,它有边

$$\{AB, CE, FG, EH, DH, BD, CF\}.$$

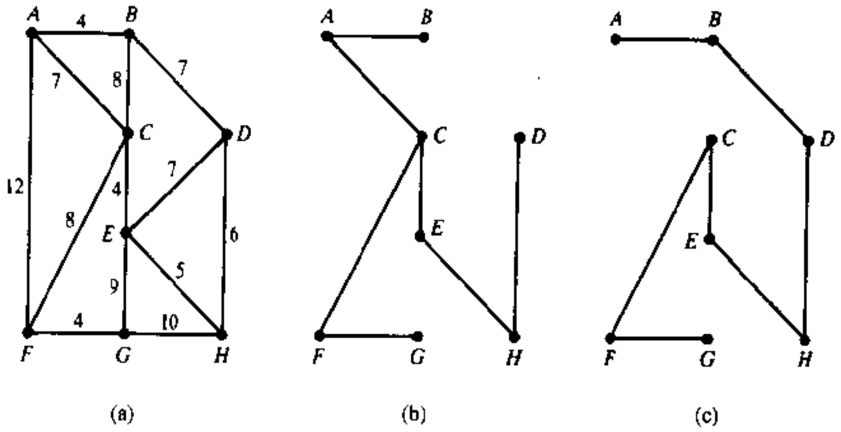


图 6-75

第七章 有向图和二元树

7.1 有向图

这一章研究一种称为有向图的特殊类型图.可以作为特殊类型有向图的有根树和二元树亦将加以讨论.

7.1 定义一个有向图.

解 ☞ 一个**有方向的图**,或**有向图** G 是由下面两个集合组成:

(i)一个集合 $V=V(G)$,其元素称为**顶点**,**点**或**结点**;

(ii)一个集合 $E=E(G)$,它由称为**弧**或**有向边**,或简单地,**边**的有序顶点对组成.

当我们强调 G 的两个部分时,将它记作 $G(V,E)$.若顶点集合 V 和弧集合 E 是有限的,则说有向图 G 是**有限的**.

7.2 描述一个有向图 $G=G(V,E)$ 的图形并举一个例子.

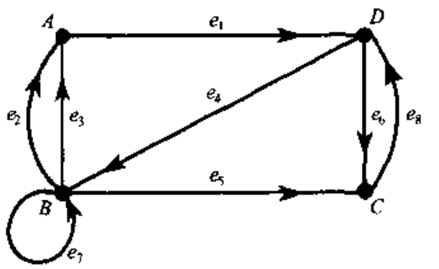


图 7-1

解 ☞ 在 V 的每个顶点用一个圆点(或小圆圈)表示,每一条弧(有向边)$e=[u,v]$用一个箭头,即从起点 u 到终点 v 的有向曲线表示.例如,图 7-1 表示有向图 $G(V,E)$,此处 $V=\{A,B,C,D\}$,E 由 8 条弧(有向边)

$$e_1=[A,D],\quad e_2=[B,A],$$
$$e_3=[B,A],\quad e_4=[D,B],$$
$$e_5=[B,C],\quad e_6=[D,C],$$
$$e_7=[B,B],\quad e_8=[C,D]$$

组成.有可能的话,我们通常画一个图形而不是列出顶点和边来表示一个有向图.

7.3 用例子解释术语:环和平行弧.

解 ☞ 一个**环**是起点和终点相同的一段弧,即起点和终点在同一点的一段弧.有相同起点和有相同终点的弧称为**平行弧**.例如,在图 7-1 中 $e_7=[B,B]$是一个环,$e_2=[B,A]$和 $e_3=[B,A]$是平行弧.(虽然 $e_6=[D,C]$和 $e_8=[C,D]$有相同的顶点,但它们有不同的起点和终点,因而它们不是平行弧.)

7.4 形式上描述图 7-2 所表示的图 G.

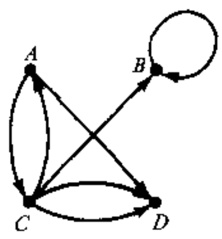


图 7-2

解 ☞ 图 7-2 表示一个有向图 $G(V,E)$,此处 $V=\{A,B,C\}$,E 由 7 条有向边

$$[A,C],\quad [A,D],\quad [B,B],\quad [C,A],$$
$$[C,B],\quad [C,D],\quad [C,D]$$

组成.

7.5 指出习题 7.4 的有向图中的环或平行弧.

解 ☞ 弧$[B,B]$是一个环.从 C 到 D 的两段弧是平行的.

7.6 形式上描述图 7-3 所示的每一个有向图 G.

解 ☞ G 的一个形式描述是列出它的顶点集合 $V(G)$和它的弧集合$E(G)$.这样,在图 7-3(a)中

$$V(G)=\{A,B,C,D,E,F\},$$
$$E(G)=\{[A,B],[A,D],[A,F],[C,E],$$
$$[C,F],[D,C],[E,E],[F,C]\}.$$

在图 7-3(b)中

$$V(G)=\{A,B,C\},$$

$E(G) = \{[A,B],[A,B],[A,C],[B,A],[B,C],[C,A],[C,C]\}$.

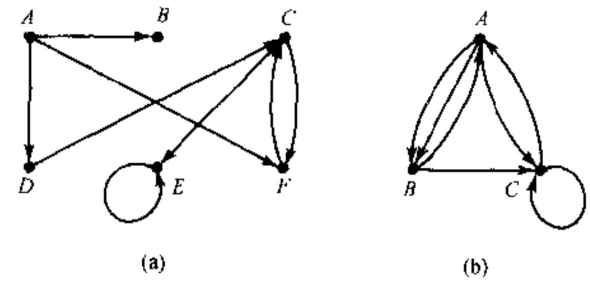


图 7-3

7.7 指出图 7-3(a)的有向图中的环或平行弧.

解 ☞ 弧$[E,E]$是一个环.该有向图没有平行弧.

7.8 指出图 7-3(b)的有向图中的环或平行弧.

解 ☞ 有一个环$[C,C]$和两条从 A 到 B 的平行弧.

7.9 画出下列每一个有向图 G 的一个图形,此处 $V(G)=\{A,B,C,D,E\}$且

(a) $E(G)=\{[A,B],[A,C],[B,C],[B,D],[C,C],[D,B]\}$;

(b) $E(G)=\{[A,D],[B,C],[C,E],[D,B],[D,D],[D,E],[E,A]\}$.

解 ☞ 首先画出顶点,然后用箭头连接它们表示所给的弧.图 7-4 表示所求的解.图 7-4(a)中的顶点 E 是孤立点,因没有边在 E 开始或终止.

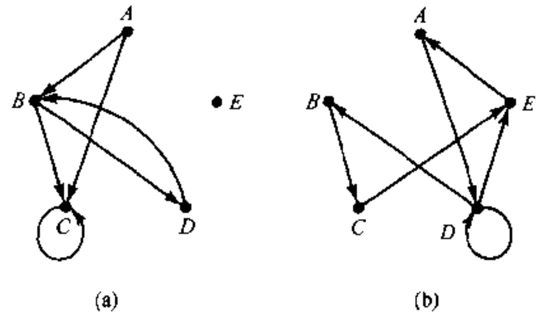


图 7-4

7.10 指出有向图 G 的环或平行弧,此处

$$V(G) = \{a,b,c,d,e,f,g\},$$

$$E(G) = \{[a,a],[b,e],[a,e],[e,b],[g,c],[a,e],[d,f],[d,b],[g,g]\}.$$

解 ☞ 由定义(习题 7.3),若一弧的起点也是终点,则它是一个环.因此$[a,a]$和$[g,g]$都是环.若两条或更多条弧的起点相同,终点也相同,则它们是平行弧,于是$[a,e]$和$[a,e]$是平行弧.

子图

7.11 解释一个有向图 $G(V,E)$的子图是什么含义.

解 ☞ 设 V'是 V 的一个子集,E'是 E 的一个子集而 E'的所有弧的端点属于 V',那么 $H(V',E')$是一个有向图,称它为 $G(V,E)$的一个**子图**.若 E'包含 E 的端点属于 V'的所有的弧,则 $H(V',E')$称为 V'**生成的**子图.

7.12 考虑图 7-5 所表示的有向图 $G(V,E)$.画出由(a) $V'=\{v_1,v_4,v_5,v_8\}$,(b) $V'=\{v_1,v_2,v_3,v_7,v_8\}$生成的子图的图形.

解 ☞ 由 V'生成的子图是由 V'和 E 的端点在 V'中的所有的弧组成.因此,这样的子图分别如图 7-6(a)和(b)所示.

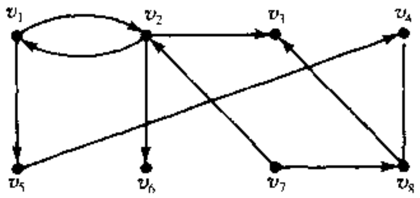
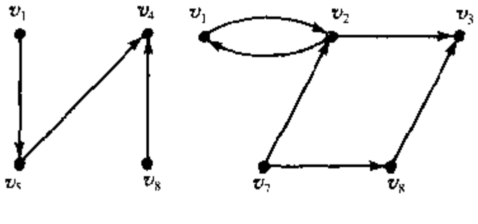


图 7-5



(a)　　(b)

图 7-6

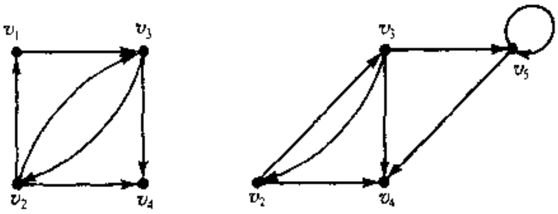
7.13 考虑图 $G(V,E)$,此处

$$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\},$$

$$E=\{[v_1,v_3],[v_2,v_1],[v_2,v_3],[v_2,v_4],[v_3,v_2],[v_3,v_4],[v_3,v_5],[v_4,v_6],[v_5,v_5],[v_5,v_4],[v_6,v_2]\}.$$

画出由(a) $V'=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$,(b) $V'=\{v_2,v_3,v_4,v_5\}$生成的子图的图形.

解 ☞ 图 7-7 表示这两个顶点集合生成的子图.



(a)　　(b)

图 7-7

标号有向图

7.14 叙述标号有向图的含义.

解 ☞ 若一个有向图的弧和(或)顶点都标注某种类型的资料(数据),则称该有向图是一个**标号有向图**.例如,考虑图 7-8 表示的三个州.赋予每段弧的数表示每年从开始的州到终点的州迁移的州的人口的百分比.这样纽约每年有 10% 的人口迁移到加利福尼亚,而加利福尼亚的 14% 人口迁移到纽约.

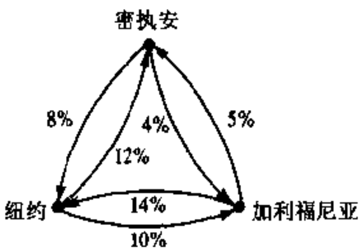


图 7-8

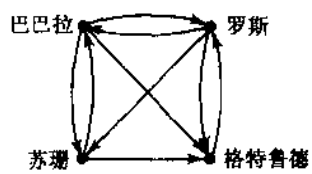


图 7-9

7.15 考虑图 7-8 的标号图.(a)每年密执安的人口的百分之几迁移到纽约?(b)每年加利福尼亚的人口的百分之几迁移到纽约或密执安?(c)每年纽约的 10% 人口迁移到哪个州?

解 ☞ 利用标号图所含的信息,我们有

(a)每年密执安的 8% 人口迁移到纽约.

(b)由于加利福尼亚的 14% 人口迁移到纽约,5% 人口迁移到密执安,因此每年总共有 19% 人口迁移到这两个州.

(c)每年纽约的 10% 人口迁移到加利福尼亚.

7.16 画一个表示下面的情况的标号有向图.三姐妹 Barbara(巴巴拉)、Rose(罗斯)和 Susan(苏珊)各人经常给她们的母亲 Gertrude(格特鲁德)打电话,尽管格特鲁德只给罗斯打电话.虽然罗斯不断地给苏珊打电话,但苏珊不给罗斯打电话,巴巴拉和苏珊相互打电话,巴巴拉和罗斯也相互打电话.

解 ☞ 该标号有向图有 4 个顶点,每一个表示三姐妹和她们的母亲.弧表示联络线.图 7-9 表示这种情况得到的标号有向图.

7.17 图 7-10(a)中地图表明 3 个艺术长廊 A,B 和 C 的位置,它们只是在单行道的街坊中,画一个标号有向图指示你驶车从一个长廊到另一个长廊至少要经过几块.

解 ☞ 该标号有向图有 3 个顶点表示 3 个长廊以及弧标注上块数用来反映各长廊之间的距离.得到的有向图表示在图 7-10(b)中.

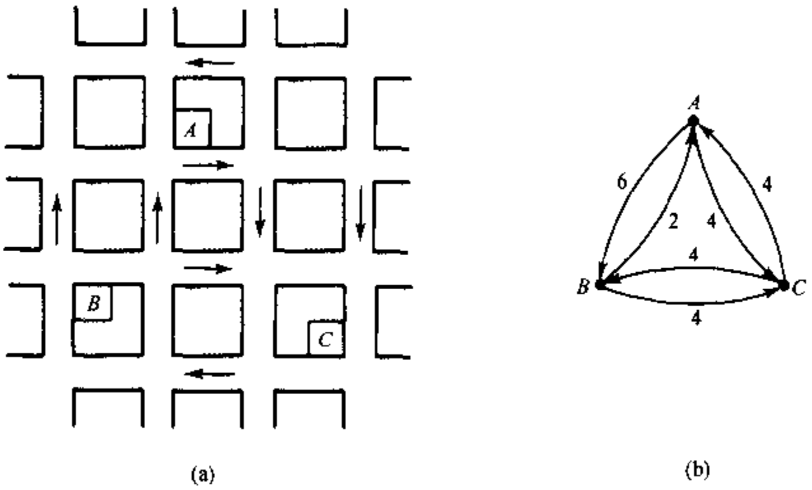


图 7-10

7.18 考虑习题 7.17 中的 3 个长廊.从任一个长廊,比方说 A 开始环行,包括 3 个长廊回到你出发的地点,只有两条可能的路线:A 到 B 到 C 到 A,或 A 到 C 到 B 到 A.哪一条环行最短?

解 ☞ 参考图 7-10(b)的标号有向图,在每个环行中添加上块数.这样,最短的环行是 A 到 C 到 B 到 A.具体地,这条环行只包括 10 块,而另一条环行则需 14 块.

7.19 假设友谊航空公司每天有 9 个航班,其相应班次如下:

103	亚特兰大到休斯敦
106	休斯敦到亚特兰大
201	波士顿到芝加哥
203	波士顿到丹佛
204	丹佛到波士顿
301	丹佛到里诺
305	芝加哥到迈阿密
308	迈阿密到波士顿
401	里诺到芝加哥

用标号有向图描述这个资料.

解 ☞ 这个资料描述在图 7-11 中(此处为表示方便省去 9 个班次).

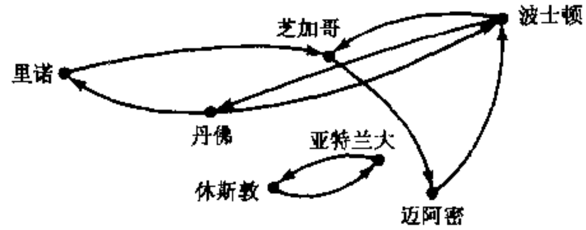


图 7-11

7.20 考虑习题 7.19 的飞行信息.指出还可以赋予(a)边和(b)顶点其他资料.

解 ☞ (a)飞行路线(边)通常包含价格,时间,机型,等等.

(b)城市(顶点)可包括它们的机场名称,在机场的旅馆,等等.

7.2 基本定义:次数、通路、连通性

假设 G 是一个有向图.我们说一条有向边 $e=[u,v]$ 从起点 u **开始**而在它的终点 v **终止**,并且说 u 和 v 是**邻接的**.

7.21 定义一个顶点 v 的引出次数和引入次数.

解 ☞ 顶点 v 的**引出次数**,记作 outdeg(v),是在 v 开始的边的条数;v 的**引入次数**,记作 indeg(v),是在 v 终止的边的条数.

7.22 解释一个有向图 G 中的一个源和一个收点的含义.

解 ☞ 若 G 中的一个顶点 v 有正的引出次数而引入次数为零,则 v 称为一个**源(点)**.类似地,若 v 有正的引入次数而引出次数为零,则 v 称为一个**收点**.

7.23 证明一个有向图 G 的所有顶点的引入次数之和等于引出次数之和,且等于 G 的弧的数目 n.

证 ☞ 由于每一弧开始和终止在一个顶点,因此引入次数之和和引出次数之和必等于 G 的弧的数目 n.

7.24 求图 7-12 的图 M 的每一顶点的引入次数和引出次数.

解 ☞ 计算终止于 v 的弧的数目得到 indeg(v),以及计算开始于 v 的弧的数目得到 outdeg(v).这就得到下面的数据:

顶点	A	B	C	D	E	F	G
引入次数	0	2	2	4	1	1	2
引出次数	4	1	0	0	3	3	1

注意,引入次数之和以及引出次数之和等于弧的数目 12.

7.25 就图 7-12 的图 M,指出源或收点.

解 ☞ 因有开始于顶点 A 而无终止于 A 的边,因此 A 是一个源.类似地,C 和 D 都是收点,因有在 C 和 D 终止而无在那里开始的弧.

7.26 求图 7-13 的图 N 的各个顶点的引入次数和引出次数.

解 ☞ 计算在 v 终止的弧的数目得到 indeg(v),以及计算在 v 开始的弧的数目得到 outdeg(v).这就得到下面的数据:

顶点	A	B	C	D	E	F
引入次数	2	0	2	4	3	0

引出次数　1　3　3　1　0　3

注意,引入次数之和以及引出次数之和等于弧的数目 11.

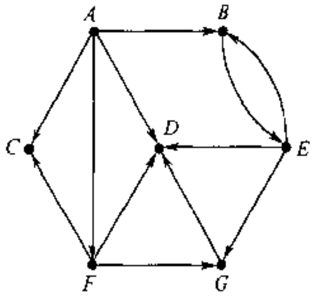


图 7-12

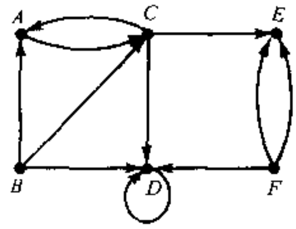


图 7-13

7.27　就习题 7.26 的图 N,指出源或收点.

解　☞ 因有在顶点 B 和 F 开始而无在那里终止的弧,因此 B 和 F 都是源.类似地,E 是一个收点,因有在 E 终止而无在那里开始的弧.

通路和循环

7.28　通路概念是从非有向图(5.3 节)引出来的,只是现在弧的方向必须与通路或循环的方向一致.根据这个差别重写通路的定义.

解　☞ 一个有向图 G 中的一条**通路** W 是一个形式为

$$W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \cdots, e_n, v_n)$$

的顶点和有向边交替的序列,此处每条边 e_i 开始于 v_{i-1} 而终止于 v_i.若不会引起混淆,则用顶点或弧的序列来表示 W.注意,有向图中的一条通路也可以是闭的,此时序列中第一个和最后一个顶点是相同的.

7.29　给出一个有向图中的一条简单通路和一个循环的定义.

解　☞ 有向图 G 中的一条**简单通路**是 G 中每个顶点都不同的一条通路.有向图中的一个**循环**是 G 中除第一个和最后一个顶点相同外其他所有顶点都不同的一条通路.注意,通路必须满足弧的方向的必要条件.

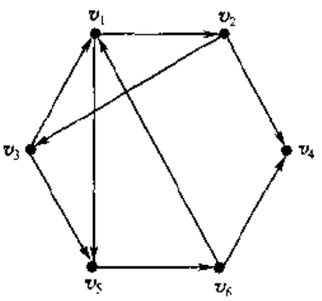


图 7-14

7.30　考虑图 7-14 的图 G.求从 v_1 到 v_6 的两条通路.

解　☞ 从 v_1 到 v_6 有许多通路.两条这样的通路是

$$(v_1, v_5, v_6), \qquad (v_1, v_2, v_3, v_1, v_5, v_6).$$

注意,顶点序列 v_1, v_2, v_4, v_6 不是从 v_1 到 v_6 的一条通路,因接连 v_4 到 v_6 的弧不开始于 v_4,即此弧的指向与通路的方向不同.

7.31　求习题 7.30 的图 G 中从 v_1 到 v_6 的两条简单通路.

解　☞ 一条简单通路是所有顶点都不同的一条通路.图 7-14 中从 v_1 到 v_6 只有两条简单通路:

$$(v_1, v_5, v_6), \qquad (v_1, v_2, v_3, v_5, v_6).$$

7.32　求习题 7.30 的图 G 中含顶点 v_3 的一个循环.

解　☞ 在 G 中有两个循环包含顶点 v_3:

$$(v_3, v_1, v_2, v_3), \qquad (v_3, v_5, v_6, v_1, v_2, v_3).$$

注意,在 G 中顶点序列 v_3, v_1, v_5, v_3 不是一条通路(因而不是循环),因连接 v_5 到 v_3 的弧不在 v_5 开始且不在 v_3 终止.

7.33　考虑图 7-15 的图 G.求:

(a)从 v_1 到 v_4 的两条简单通路;

(b)从 v_1 到 v_4 的一条非简单通路；

(c)包含 v_4 的循环.

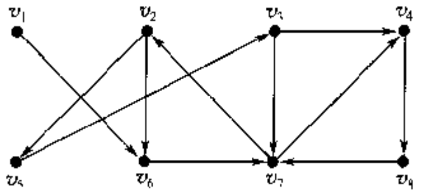


图 7-15

解 ☞ (a)从 v_1 到 v_4 的两条简单通路是

(v_1, v_6, v_7, v_4),　　$(v_1, v_6, v_7, v_2, v_5, v_3, v_4)$.

(b)一条非简单通路至少必须一个顶点重复.这样,从 v_1 到 v_4 的非简单通路是

$(v_1, v_6, v_7, v_2, v_6, v_7, v_4)$.

(c)两个这样的循环是

(v_4, v_8, v_7, v_4),　　$(v_4, v_8, v_7, v_2, v_5, v_3, v_4)$.

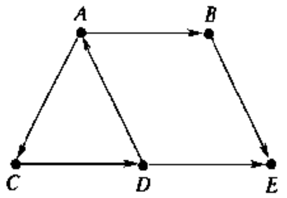


图 7-16

7.34 设 G 是一个有向图.(a)定义 G 的一条生成通路.(b)解释陈述:一个顶点 v 是从顶点 u 可达到的是什么意思.

解 ☞ (a)G 的一条**生成通路**是包含 G 的所有顶点的一条通路.并非每个有向图都有一条生成通路.

(b)若从顶点 u 到 v 有一条通路,则说顶点 v 从 u 是**可达到的**.

7.35 求图 7-16 所示的图 M 的最短生成通路.

解 ☞ 任一条生成通路必须在收点 E 终止.往回寻找,我们找到 (C, D, A, B, E)是一条简单的,从而是最短的生成通路.

7.36 考虑习题 7.35 的图 M.对下面的每对顶点,判定第二个顶点是否从第一个顶点可达到.若行,则指出此通路:

(a)A 和 E;　(b)E 和 A;　(c)C 和 B;　(d)B 和 D.

解 ☞ (a)顶点 E 是从顶点 A 由通路(A, B, E)可达到的.

(b)顶点 A 从顶点 E 不可达到.

(c)顶点 B 是从顶点 C 由通路(C, D, A, B)可达到的.

(d)顶点 D 是从顶点 B 不可达到的.

连通性

7.37 定义强连通有向图和单向连通有向图.

解 ☞ 如果一个有向图 G 的任何两个顶点 u 和 v, u 是从 v 可达到的且 v 是从 u 可达到的,即从 u 到 v 有一条通路且从 v 到 u 亦有一条通路,那么称 G 是**强连通的**.若从 u 到 v 有一条通路或从 v 到 u 有一条通路(但无须从 u 到 v 和从 v 到 u 都有一条通路),则称 G 是**单向连通的**.显然,强连通图必是单向连通图.

7.38 指出图 7-17 的各图是否强连通.

解 ☞ 从习题 7.37,我们有

(a)A 是强连通的.

(b)B 不是强连通的,因例如从 X 到 W 没有通路.

(c)C 不是强连通的,因例如从 X 到 Z 没有通路.

7.39 指出图 7-17 中各图是否单向连通.

解 ☞ 从习题 7.37,我们有

(a)A 是强连通的,从而它是单向连通的.

(b)B 不是单向连通的,因从 W 到 Z 或从 Z 到 W 没有通路.

(c)虽然 C 不是强连通的,但它却是单向连通的.

定理 7.1　设 G 是一个有限的有向图,那么

(i)G 是强连通的充分必要条件是 G 有一条闭的生成通路.

(ii)G 是单向连通的充分必要条件是 G 有一条生成通路.

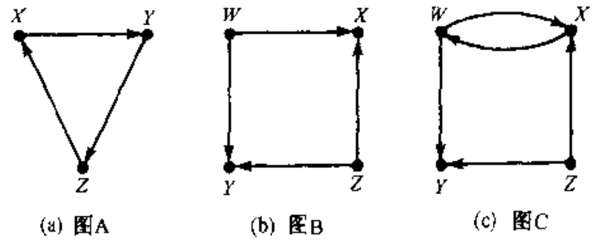


图 7-17

7.40 证明定理 7.1(i).

证 ☞ 假设 G 是强连通的. 设 $P=(u,v,\cdots,u)$是 G 中一条包含顶点最多的一条闭通路.(因 G 是有限的,这样的一条通路是存在的.)再设 P 不是一条生成通路,比方说 P 不包含顶点 w. 由于 G 是强连通的,因此有通路 $Q=(w,\cdots,u)$和 $Q'=(u,\cdots,w)$.于是通路 QPQ'是包含 P 的顶点且包含 w 的一条闭通路.这与 P 的最大性矛盾.故 P 是一条闭的生成通路.

相反地,假设 G 包含一条闭的生成通路 P.那么 G 的每个顶点都可从 G 的其他任何顶点达到.故 G 是强连通的.

7.41 就图 7-17 的图检验定理 7.1.

解 ☞ (a)A 是强连通的.注意(X,Y,Z,X)是 A 的一条生成闭通路.

(b)根据习题 7.38 和 7.39 知道,B 既不是强连通的又不是单向连通的.因此 B 没有一条生成通路.的确,一条生成通路必须在收点 X 和收点 Y 终止,这是不可能的.

(c)根据习题 7.38 和 7.39 知道,C 是单向连通的但非强连通,因此 C 有一条生成通路,但它不是闭的生成通路.一条生成通路是(Z,X,W,Y).

为了看到没有闭的生成通路是可能的,注意在一条闭通路中的每个顶点必须有既进入又离开它的弧.由于顶点 Y 是收点,没有闭路能够包含 Y,因而没有闭的生成通路是可能的.

定理 7.2 设一个有限的有向图 G 不含有(有向的)循环,则 G 含有一个源和一个收点.

7.42 证明定理 7.2.

证 ☞ 设 $P=(v_0,v_1,\cdots,v_n)$是一条最长的简单通路.(由于 G 是有限的,因此这样的一条通路存在.)那么最后的顶点 v_n 必是一个收点,否则一条弧$[v_n,u]$或是延伸 P 或是对某一 i,若 $u=v_i$,则形成一个循环.同理,第一个顶点必是一个源.

7.43 图 7-18 的图 G 不含有向循环.求一条最长的简单通路且验证第一个顶点是一个源以及最后顶点是一个收点.

解 ☞ 一条最长的简单通路是(W,X,Y,Z).注意到顶点 W 是一个源,以及顶点 Z 是一个收点.

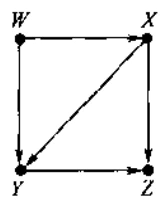


图 7-18

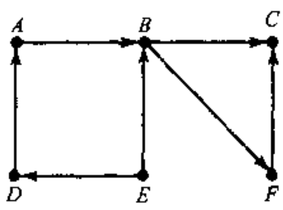


图 7-19

7.44 就图 7-19 的图 H 重复习题 7.43.

解 ☞ 一条最长的简单通路是(E,D,A,B,F,C).注意到顶点 E 是一个源而顶点 C 是一个收点.

7.3　有向图、关系和矩阵

7.45　叙述没有平行弧的有向图怎么和一个集合上的关系实际上是相同的概念.

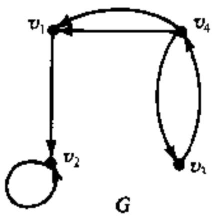
解　☞ 设 $G(V,E)$是一个没有平行弧的有向图.那么 E 只不过是 $V\times V$ 的一个子集,从而 E 是 V 上的一个关系.相反地,若 R 是一个集合 V 上的一个关系,则 $G(V,R)$是一个没有平行弧的有向图.这样,没有平行弧的有向图和一个集合的关系是一致且相同的概念.(回忆一下,在第二章中我们讨论了有向图对应一个集合上的关系.)

7.46　叙述怎样能用一个方阵来表示有向图.

解　☞ 设 G 是一个有顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 的有向图.G 的矩阵是一个 $m\times m$ 矩阵 $M_G=(m_{ij})$,其中

m_{ij} = 开始于 v_i 和终止于 v_j 的弧的数目.

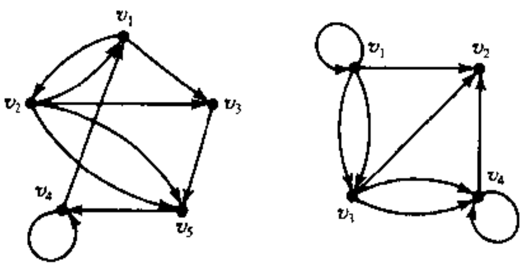
若 G 没有平行弧,则 M_G 的元素或是 0 或是 1;否则 M_G 的元素将是非负整数.相反地,每一个具有非负整数元素的 $m\times m$ 矩阵M 惟一确定一个具有m 个顶点的有向图.图 7-20 表示一个有向图 G 及其矩阵M.



$$M=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\2&0&1&0\end{pmatrix}$$

图 7-20

7.47　求图 7-21 的每个有向图的矩阵 M.



(a)　　(b)

图 7-21

解　☞ 一个有 m 个顶点的有向图的矩阵 M 是 $m\times m$ 方阵,其中 m_{ij} 等于在 v_i 开始和在 v_j 终止的弧的数目,因此

图 7-21(a):

$$M=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\1&0&1&0&2\\0&0&0&0&1\\1&0&0&1&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix},$$

图 7-21(b):

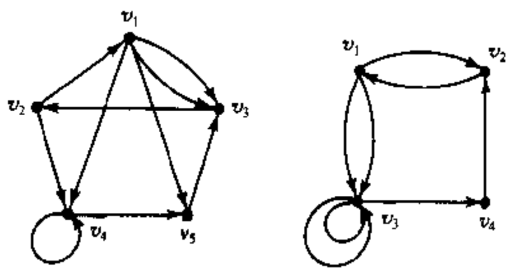
$$M=\begin{pmatrix}1&1&2&0\\0&0&0&0\\0&1&0&2\\0&1&0&1\end{pmatrix}.$$

7.48　求图 7-22 中每个有向图的矩阵 M.

解　☞ 像习题 7.46 概括的那样,构造矩阵 M,得到下面的矩阵:

图 7-22(a):

$$M=\begin{pmatrix}0&0&2&1&1\\1&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&1&0&0\end{pmatrix},$$



(a)　　(b)

图 7-22

图 7-22(b):

$$M=\begin{pmatrix}0&1&2&0\\1&0&0&0\\0&0&2&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

7.49 画出对应于下面每个矩阵的有向图 G：

(a)

$$M=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&1&1&1\\0&2&0&0\end{pmatrix},$$

(b)

$$M=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1\\0&0&2&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&1&0&0\end{pmatrix}$$

解 ☞ M 的每一个元素 m_{ij}对应于开始在顶点 v_i 而终止在顶点 v_j 的弧的数目.这样,为画出有向图,首先画出恰当数目的顶点,然后用 M 中元素所表明的弧来连接它们.得到的有向图表示在图 7-23 中.

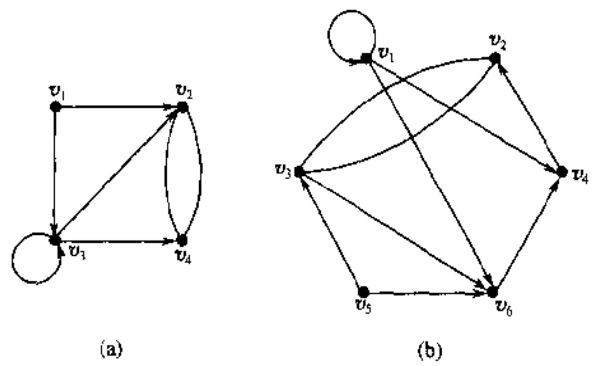


图 7-23

7.50 就下面的每个矩阵,重复习题 7.49：

(a)

$$M=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\\0&1&1&0&0\end{pmatrix},$$

(b)

$$M=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&1&0&1\\0&0&1&1&0\end{pmatrix}$$

解 ☞ 如同习题 7.49 进行过程得到图 7-24 表示的图.

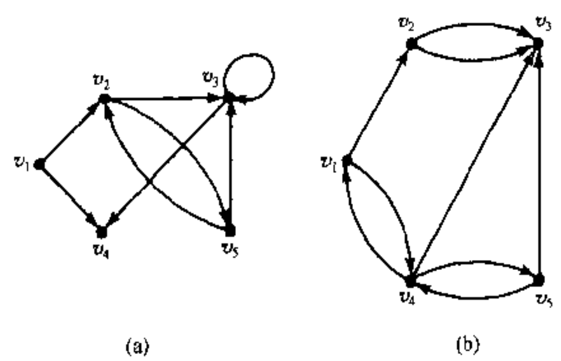


图 7-24

定理 7.3　设 M 是一个有向图 G 的矩阵. 那么,矩阵 M^n 的 ij 元素给出从 v_i 到 v_j 的长度为 n 的通路的数目.

7.51　证明定理 7.3.

证　对 n 用归纳法证明. 首先注意到从 v_i 到 v_j 的长度为 1 的一条通路止好是弧$[v_i, v_j]$. 由于 M 的 ij 元素给出弧$[v_i, v_j]$的数目,它是从 v_i 到 v_j 的长度为 1 的通路条数,因此对于 $n=1$ 定理成立.

现设 $n>1$ 且 $M^{n-1}=(a_{ik})$, $M=(b_{kj})$, $M^n=(c_{ij})$, 其中 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. 由归纳法假设, a_{ik}等于从 v_i 到 v_k 的长度为 $n-1$ 的通路数目. 而且 b_{kj}等于从 v_k 到 v_j 的弧的数目. 因此 $a_{ik}b_{kj}$是从 v_i 到 v_j 的长度为 n 的通路数目,此处 v_k 是通路中紧接最后顶点的一个顶点. 这样,所有的从 v_i 到 v_j 的长度为 n 的通路数目可由$a_{ik}b_{kj}$对所有的 k 求和得到. 这就是说, c_{ij}是从 v_i 到 v_j 的长度为 n 的通路数目. 定理得证.

7.52　考虑图 7-25 表示的图 G. 应用定理 7.3 确定 G 中存在多少条长度为 3 的通路,并且哪些顶点由长度为 3 的通路连接起来?

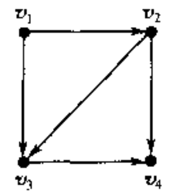


图 7-25

解　首先构造表示 G 的矩阵 M,然后计算 M^3. 这两步得到的结果是

$$M=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad M^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

由此可得, G 只有一条长度为 3 的通路,并且这些通路连接顶点 v_1 到 v_4.

7.53　设一个有向图 G 有 m 个顶点. 证明,若存在一条从 u 到 v 的通路 P,则从 u 到 v 有一条长度小于或等于 $m-1$ 的(简单)通路 P'.

证　假设 $P=(u, Q_1, w, Q_2, w, Q_3, v)$, 此处某一顶点 w 在 P 中出现两次, Q_1, Q_2, Q_3 是子通路. 那么 $P_1=(u, Q_1, w, Q_3, v)$也是从 u 到 v 的一条通路 P', 并且其长度较 P 短, 即 P'是一条简单通路. 由于 G 有 m 个顶点, 因此 P'不可能包含多于 $m-1$ 条弧.

定理 7.4　设 M 是具有 m 个顶点的一个有向图 G 的矩阵. 令

$$C = M + M^2 + M^3 + \cdots + M^{m-1},$$

则 G 是强连通的充分必要条件为 C 的主对角线外没有零元素.

7.54　证明定理 7.4.

证　C 的 ij 元素是零当且仅当 $M, M^2, \cdots, M^{m-1}$的 ij 元素都是零. 这就表示从 v_i 到 v_j 没有长度小于或等于 $m-1$ 的通路, 因而(习题 7.53)从 v_i 到 v_j 没有通路. 因此, G 是强连通的充分必要条件是 C 的 $ij(i\neq j)$元素均非零.

7.4　有根树

回忆一下(6.7 节),一棵树 T 是一个没有循环的连通图,且在树 T 中的任何一对顶点是由惟一的一条简单通路连接的.

7.55　结合一个例子,定义一棵有根树,并说明这样一棵树怎么可以看作一个有向图.

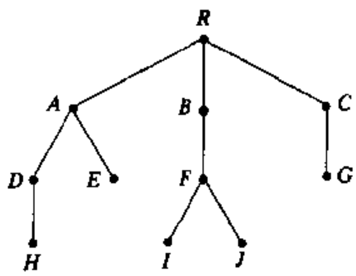


图 7-26

解　一棵**有根树** T 是由一个树图和一个称为树的**根**的指定顶点 R 一起组成的. 图 7-26 是有根树的图形,此处正如现在通常的画法,根出现在树的顶上(即树向下生长). 可将一方向强加于树如下:连接顶点 u 和 v 的一条边 e 的方向是从 u 到 v 或是从 v 到 u 是依 R 到 v 的惟一简单通路包含或不包含 u 而定.

注　这一节自始至终术语树意味着有根树,术语通路意味着简单通路,除非特别申明.

7.56　定义一棵有根树 T 中的术语叶和分枝，并给出例子.

解　☞ 次数为 1 的顶点若不是根，我们则称它为 T 的**叶**. 从任何一个顶点到一片叶的一条有向(简单的)通路称为一个**分枝**. 图 7-26 中树 T 有 5 片叶 H, E, I, J 和 G. 通路 (B, F, J), (R, A, E) 和 (A, D, H) 都是分枝.

7.57　设 v 是有根 R 的有根树 T 的一个顶点. 定义 v 的级或层次.

解　☞ 由于从根 R 到顶点 v 有惟一一条简单通路 P，因此我们定义 v 的级或层次为 P 的长度. 这样，例如图 7-26 中 F 的级是 2，以及 H 的级是 3.

7.58　考虑图 7-27 中有根树 T. 指出从根 R 到如下各顶点的通路：(a) A，(b) H，(c) F，(d) M.

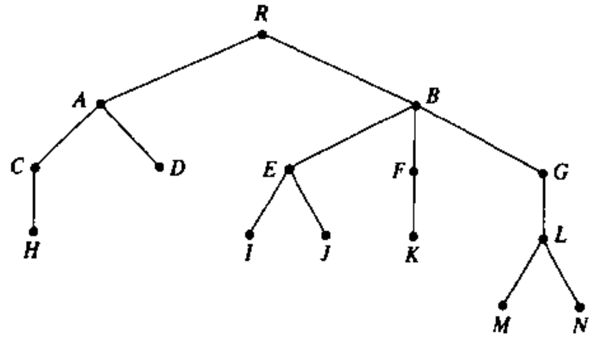


图 7-27

解　☞ 列出从 R 到给定顶点的沿树前进的顶点. (a) R, A；(b) R, A, C, H；(c) R, B, F；(d) R, B, G, L, M.

7.59　考虑习题 7.58 的有根树 T. 求下列各顶点的级：(a) A，(b) H，(c) F，(d) M.

解　☞ 在 T 中一个顶点的级是从根 R 到该顶点的通路的长度. 这样，(a)1，(b)3，(c)2，(d)4.

7.60　设 T 是有根 R 的有根树. (a)解释在 T 中一个顶点在另一个顶点之前或在另一顶点之后是什么意思. (b)定义 T 中母亲、孩子和兄弟姐妹的概念.

解　☞ (a)由于 T 给出边的一个方向，因此，如果从根 R 到顶点 v 的通路包含顶点 u，我们则说顶点 u 在顶点 v 之前或 v 在 u 之后. 特别地，若 u 和 v 之间没有顶点，即 v 是邻接于 u，则说 v 紧跟 u 之后.

(b)设 v 是 T 的一个顶点. 我们说 v 是所有紧跟 v 之后的顶点的母亲，并且说这些顶点是 v 的儿子或孩子. 而且，一个给定顶点的孩子们称为兄弟姐妹.

7.61　考虑图 7-27 的树 T. 指出：(a)所有在 L 之前的顶点；(b)所有在 A 之后的顶点；(c) B 的孩子；(d) C 的兄弟姐妹.

解　☞ (a)从根 R 到 L 的通路包含顶点 R, B, G 和 L. 因此 R, B 和 G 在 L 之前.

(b)从 A 开始的所有通路包含顶点 C, D 和 H，这就是说，C, D 和 H 在 A 之后.

(c)顶点 E, F 和 G 是 B 的孩子，因它们紧跟 B 之后.

(d) C 的母亲是 A 并且 A 的孩子是 C 和 D，因此 D 是 C 的惟一兄弟姐妹.

7.62　为枚举每个事件能按有限种方式出现的一系列事件的所有逻辑可能性，树是有用的方法. 用一棵树来标明两名选手查尔斯和达夫妮之间的网球比赛的所有可能结果，首先连续胜两盘的选手是胜者，或者首先共胜三盘的选手是胜者.

解　☞ 图 7-28 的有根树表示比赛能进行的所有结局. 每一分枝表示一盘的胜者并标注上胜者的开头字母. 从根到一片叶的每条通路表示导出比赛结果的一系列事件(即那一盘谁胜). 有十片叶子对应十种可能的比赛结果：

$$CC, CDCC, CDCDC, CDCDD, CDD,$$
$$DCC, DCDCC, DCDCD, DCDD, DD.$$

(这里,树的根在左边且树向右生长.)

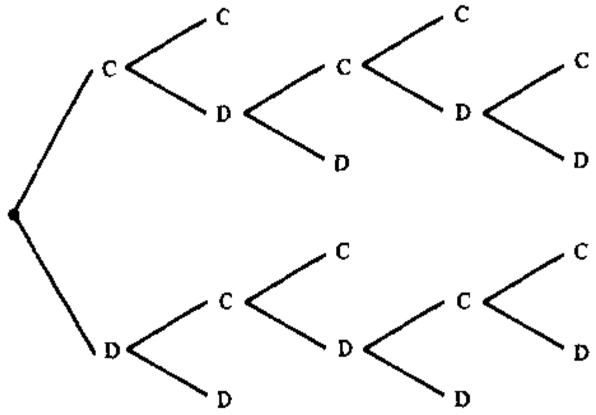


图 7-28

7.63 考虑这类商务情况.一个公司卖其产品给计划引进新产品的两个主要地区.正常的产品引进过程如下:首先,在产品地区Ⅰ中一个很小的试验市场上推销.若失败,则停止推销;若成功,则在整个地区Ⅰ推销.如果产品在地区Ⅰ推销成功,则在整个地区Ⅱ推销;如果不成功,则在地区Ⅱ的一个小试验市场推销.再一次,若推销成功,则在整个地区Ⅱ推销.用一棵树表示推销过程的所有可能结果.

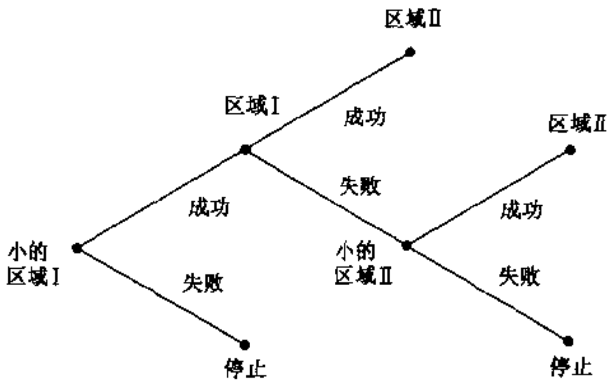


图 7-29

解 ☞ 可能结果用图 7-29 的树来描述.用树的根到叶的 4 个分枝表示有四种结果:

(1)产品在地区Ⅰ中的第一个小试验市场推销不成功并且停止推销.

(2)产品在第一个小试验市场推销成功,在地区Ⅰ也成功,并且在地区Ⅱ推销.

(3)产品第一个小试验市场推销成功,但在地区Ⅰ不成功,它在地区Ⅱ中的小试验市场推销也不成功,且停止推销.

(4)产品在第一个小试验市场推销成功但在地区Ⅰ不成功.在地区Ⅱ中的小试验市场推销成功并且在该地区推销.

(这里,再一次,树的根在叶的左边.)

有序的有根树

7.64 定义有序的有根树.

解 ☞ 一棵有根树称为有序的树,如果离开每个顶点的边都是有序的,或等价地,如果任一个母亲的孩子都是有序的.画这样的树根在顶上且边向下引出,以及孩子的次序是从左到右.

7.65 就有序的有根树 T 的顶点,描述通用地址系统,并给出一个例子.

解 ☞ T 的顶点标号如下：首先根 R 标上0，紧跟 R 的顶点依这些顶点顺序标上1,2,…．然后，剩下的顶点标号如下：若一个顶点 v 标上 a，则紧跟 v 的顶点依顶点的顺序标上 $a.1, a.2, \cdots$．图7-30表示这个地址系统的一个例子，此处顶点是自左至右排序的．

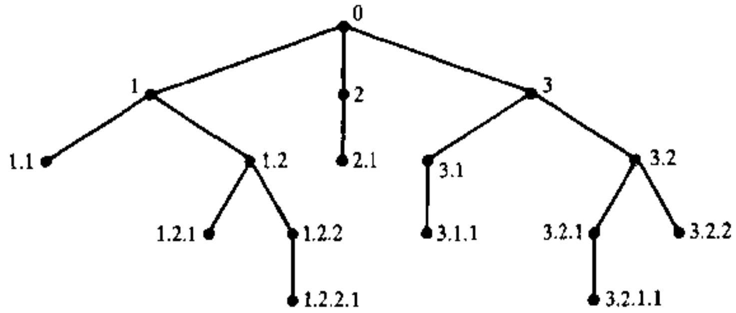


图 7-30

7.66 就一个有序的有根图描述一个词典次序．

解 ☞ 通用地址系统是提供直线地描述（或贮存）一个有序的有根树的一个重要方法．具体地，给定地址 a 和 b，每当

(i) a 是 b 的一个开始部分，即若 $b = a.c$（例如，$a = 2.4$ 且 $b = 2.4.1$）

或

(ii) 存在正数 m 和 n，$m < n$ 使得 $a = r.m.s$ 和 $b = r.n.t$（例如，$a = 1.4.1$ 以及 $b = 1.5.1$），

我们则令 $a < b$．这个次序称为一个**词典次序**，因它是类似于在一本词典中排字的方法．

7.67 通常画一个有序的有根树是使得边从左到右排序．这是容易得到词典次序，正好从最左边的分枝往下读，然后从右边第二分枝往下读，等等．试用这个方法找图7-31表示的树 T 的地址的词典次序．

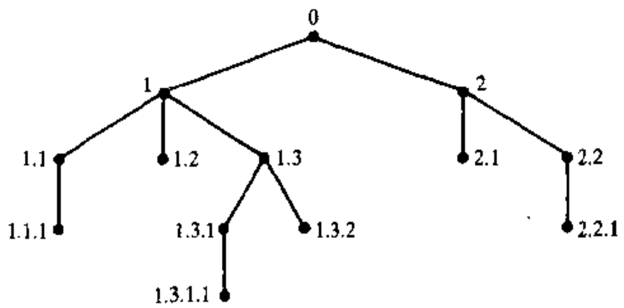


图 7-31

解 ☞ 从最左边的分枝往下读，我们得到

0　1　1.1　1.1.1

第二个分枝是1.2．这样，我添加1.2到表中得到

0　1　1.1　1.1.1　1.2

类似地，下一个分枝添加

1.3　1.3.1　1.3.1.1

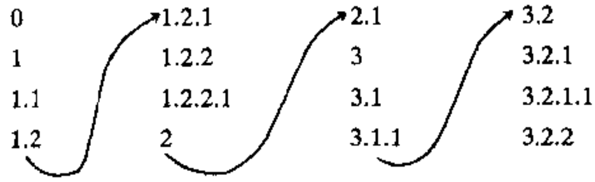
到表中．按此方法进行下去，我们得到

0　1　1.1　1.1.1　1.2　1.3　1.3.1　1.3.1.1

1.3.2　2　2.1　2.2　2.2.1

7.68 给出图7-30的地址的词典次序．

解 ☞ 将地址直线地排序如：



7.69 下面的地址是按词典排序.画出相应的有序的有根图.

0　1　1.1　2　2.1　2.1.1　2.2　2.2.1
2.2.1.1　2.2.1.2　3　3.1　3.1.1　3.2

解 ☞ 为了画出与一个给定的词典次序结合的树,我们从最左边的分枝开始,然后添加下一个分枝,等等.在这个问题中,画 0 生出枝到 1 生出枝到 1.1.2.由于 2 的级低于 1.1 的级,即在这棵树中 2 不继 1.1 之后,它是下一个分枝 2,2.1,2.1.1 的起点.按此方法继续进行下去,得到图 7-32表示的树.

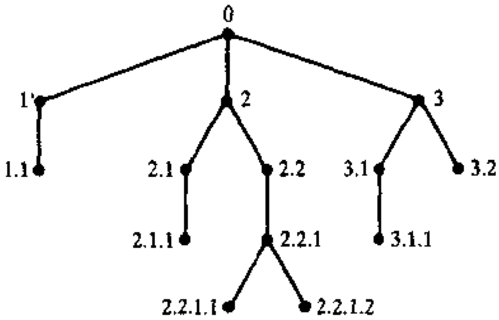


图 7-32

7.70 考虑下面的随机次序地址:

1　2.2.1　3.2　2.2.1.1
1.1.1　0　2.1　3.2.1.1
3　3.1　2.2　2.1.1
3.2.1　1.1　3.2.1.2　2　1.1.2

(a)按词典次序排地址.
(b)画出相应有序的有根树.

解 ☞ (a)这些地址的词典次序是

0　1　1.1　1.1.1　1.1.2　2　2.1　2.1.1　2.2
2.2.1　2.2.1.1　3　3.1　3.2　3.2.1　3.2.1.1　3.2.1.2

(b)图 7-33 表示所要求的有序的有根树.

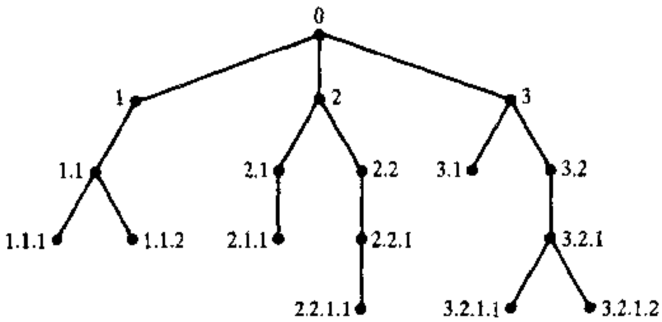


图 7-33

7.5 二元树

二元树是数学和计算机科学中的一个基本结构.通常的有根树的某些术语,例如种植、孩子、边、通路、叶、分枝、层次和级数亦将用于二元树.但是,在此宁可用术语结点而不用顶点.

7.71 定义二元树并给出例子.

解 ☞ 一颗**二元树** T 定义为一些元素的有限集合,这些元素称为结点,使得

(a) T 是空的(称为**零树**或**空树**),或

(b) T 的一个卓越的结点 R,称为 T 的**根**,

并且 T 的剩下的结点形成一个分离的双树 T_1 和 T_2 有序对.

若 T 包含一个根 R,则两棵树 T_1 和 T_2 分别称为 R 的**左**和**右子树**.若 T_1 是非空的,则它的根称为 R 的**左继承者**;类似地,若 T_2 是非空的,则它的根称为 R 的**右继承者**.

图 7-34 表示一棵二元树 T.(i)T 由 11 个结点组成,用字母 A 到 L 但不含 I 来表示.(ii)T 的根是在图顶上的结点 A.(iii)从某一个结点 N 左向下(右向下)线结点表示 N 的一个左(右)继承者.

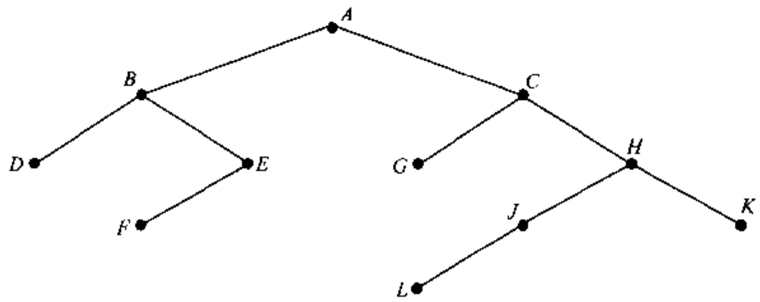


图 7-34

7.72 考虑图 7-34 的二元树 T.指出:(a)A 的左和右继承者;(b)A 的左和右子树.

解 ☞ (a)B 是 A 的左继承者,C 是 A 的右继承者.

(b)根 A 的左子树由结点 B,D,E 和 F 组成,A 的右子树由结点 C,G,H,J,K 和 L 组成.

7.73 在一棵二元树 T 中任一结点 N 可以有或是 0,1 或是 2 个继承者.没有继承者的结点称为**顶生结点**.指出图 7-34 中每个结点的继承者的数目.

解 ☞ 结点 A,B,C 和 H 有两个继承者,结点 E 和 J 只有一个继承者,结点 D,F,G,L 和 K 没有继承者.

7.74 考虑图 7-35 中三棵树 T_1,T_2 和 T_3.指出哪些表示相同的(a)有根树,(b)有序的有根树,(c)二元树.

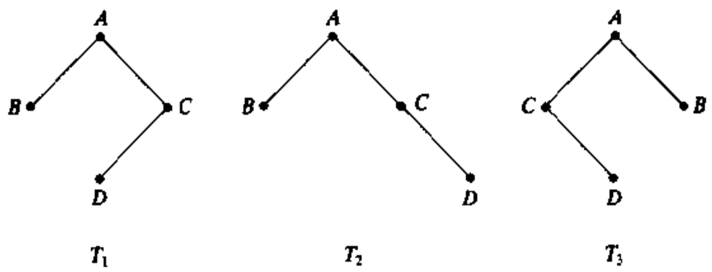


图 7-35

解 ☞ (a)它们都表示相同的有根树,这就是说,A 是有孩子(直接继承者)B 和 C 的根,C 有独个孩子 D.

(b)这里 T_1 和 T_2 是相同的有序的有根树,但 T_3 是不同的.具体地说,B 是 T_1 和 T_2 中 A 的第一个孩子,但在 T_3 中 B 则是 A 的第二个孩子.

(c)它们表示不同的二元树.具体地说,由于我们区分左和右继承者,甚至只有一个继承者的情形(这对有序的有根树并非如此).这就是说,在 T_1 中 D 是 C 的一个左继承者,但在 T_2 中 D 则是 C 的一个右继承者.

7.75 解释关于二元树的术语相似和复制.

解 ☞ 若二元树 T 和 T' 有相同的结构,或换句话说,它们有相同的形状,则称它们是**相似的**.若它们是相似的并且在对应的结点有相同的内容,则说它们是**复制的**.

7.76 考虑图 7-36 中 4 棵二元树. 指出它们哪些是相似的, 哪些是复制的.

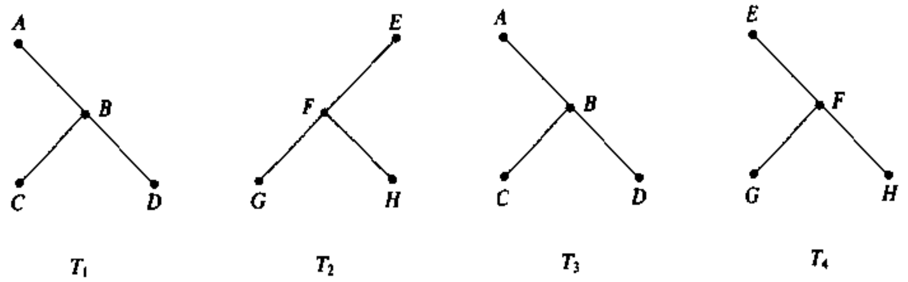


图 7-36

解 ☞ 树 T_1, T_2 和 T_4 有相同的形状, 因而它们是相似的. 特别是, T_1 和 T_3 是复制的, 因它们的对应结点有相同的资料. 树 T_2 既不与 T_4 相似也不是 T_4 的复制, 因在二元树中左和右继承者是有区别的.

7.77 画出有三个结点的非相似二元树.

解 ☞ 有 5 棵这样的树, 如图 7-37 所示.



图 7-37　有三个结点的二元树

7.78 考虑仅包含二元运算的代数式 $E=(2x+y)(5a-b)^3$. (a)画出对应于此式 E 的二元树; (b)求指数型算子的**辖域**, 即求生根在指数型算子的子树.

解 ☞ (a)用一个箭号(↑)表示取幂以及乘法用一个星号(*)表示, 得到树 T 在图 7-38 中. 注意 E 中的每个运算以 T 的一个"内部"结点出现, 并且每个变量或常数以一个终结点出现.

(b) ↑ 的辖域是图 7-38 中阴影的树. 它对应于子表达式 $(5a-b)^3$.

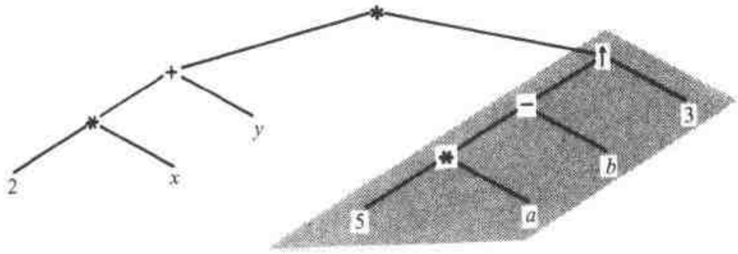


图 7-38

7.79 一棵二元树 T 通常用三个平行线数组 INFO, LEFT 和 RIGHT 以及一个指示变量 ROOT 按如下方法存储在存储器中. 首先, T 的每个结点 N 将对应一个单元 K, 使得

(1) INFO[K]含结点 N 的数据;

(2) LEFT[K]含结点 N 的左孩子的单元;

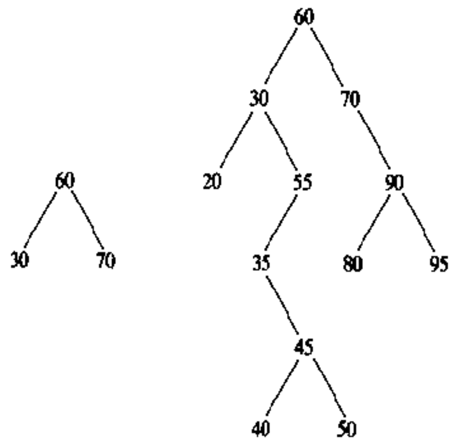
(3) RIGHT[K]含结点 N 的右孩子的单元.

而且, ROOT 将含 T 的根 R 的单元. 若任何子树是空的, 则相应的指示将含零值; 若树 T 本身是空的, 则 ROOT 将含零值. 画出如图 7-39 所示的存储在存储器中的树 T 的图形.

	INFO	LEFT	RIGHT
1	20	0	0
2	30	1	13
3	40	0	0
4	50	0	0
5	60	2	6
6	70	0	8
7	80	0	0
8	90	7	14
9			
10			
11	35	0	12
12	45	3	4
13	55	11	0
14	95	0	0

ROOT=5

图 7-39



(a)　　(b)

图 7-40

解 ☞ 从树 T 的根 R 向下画树 T 如下：

(a)根 R 是从指示 ROOT 的值得到的.注意 ROOT = 5,因此 INFO[5] = 60 是 T 的根 R.

(b)R 的左孩子是从 R 的左指示域得到.注意 LEFT[5] = 2,因此 INFO[2] = 30 是 R 的左孩子.

(c)R 的右孩子是从 R 的右指示域得到.注意 RIGHT[5] = 6.因此 INFO[6] = 70 是 R 的右孩子.

现在我们可画出如图 7-40(a)所表示的该树的顶上部分.用每个新的结点重复上述过程,最后得到所要求的树 T 在图 7-40(b)中.

7.80 画出如图 7-41 所示的存储在存储器中的二元树 T 的图形.

解 ☞ 注意 ROOT = 14,因此 INFO[14] = A 是 T 的根.注意 LEFT[14] = 5,因此 INFO[5] = B 是 A 的左孩子.注意,RIGHT[14] = 9,因此 INFO[9] = C 是 A 的右孩子.对每个新结点继续此过程得所要求的 T 的图形如图 7-42 所示.

穿程二元树

7.81 给出穿程有根 R 的二元树 T 的 3 个标准算法.

解 ☞ 这 3 个算法称为前序、内序和后序如下：

前序:(1) 分理根 R.

(2) 按前序穿程 R 的左子树.

(3) 按前序穿程 R 的右子树.

内序:(1) 按内序穿程 R 的左子树.

(2) 分理出根 R.

(3) 按内序穿程 R 的右子树.

后序:(1) 按后序穿程 R 的左子树.

(2) 按后序穿程 R 的右子树.

	INFO	LEFT	RIGHT
1	H	4	11
2	R	0	0
3			
4	P	0	0
5	B	18	7
6			
7	E	1	0
8			
9	C	0	10
10	F	15	16
11	Q	0	12
12	S	0	0
13			
14	A	5	9
15	K	2	0
16	L	0	0
17			
18	D	0	0

ROOT = 14

图 7-41

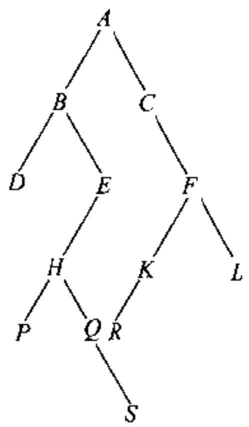


图 7-42

(3) 分理根 R.
显然,每个算法包含相同的三步,且 R 的左子树总是在右子树之前被穿程.这里,算法之间的差别在于分理根的时间.具体地说,在前序算法中,在穿程子树之前分理根 R;在内序算法中,在子树的穿程之间分理根 R;在后算法中,在子树的穿程之后分理根 R.

有时,这 3 个算法分别称为结点-左-右(NLR)穿程,左-结点-右(LNR)穿程和左-右-结点(LRN)穿程.

7.82 考察图 7-43 的二元树 T.显然 A 是 T 的根,A 的左子树 L_T 由结点 B, D 和 E 组成,A 的右子树 R_T 由结点 C 和 F 组成.用下面 3 个算法:(a)前序,(b)内序,(c)后序穿程 T.

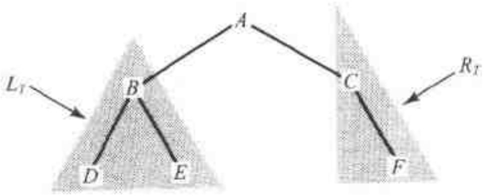


图 7-43

解 ☞ (a) T 的前序穿程分理 A,穿程 L_T 和穿程 R_T.但是 L_T 的前序穿程分理根 B,然后分理 D 和 E,以及 R_T 的前序穿程分理根 C,然后 F.因此,ABDECF 是 T 的前序穿程.

(b) T 的内序穿程是穿程 L_T,分理 A 和穿程 R_T.但是 L_T 的内序穿程分理 D, B 然后 E,以及 R_T 的内序穿程分理 C,然后 F.因此,$DBEACF$ 是 T 的内序穿程.

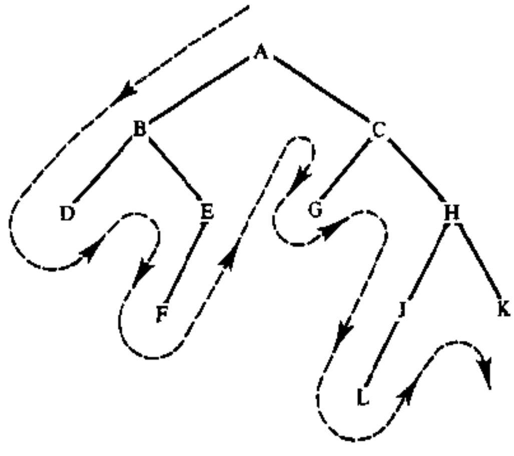


图 7-44

(c)T 的后序穿程是穿程 L_T，穿程 R_T 和分理 A. 但是，L_T 的后序穿程分理 D,E，然后 B，以及 R_T 的后序穿程分理 F，然后 C. 因此，$DEBFCA$ 是 T 的后序穿程.

7.83 应用前序穿程算法穿程图 7-44 的二元树 T.

解 ☞ T 的前序穿程是 $ABDEFCGHJLK$. 这个次序与从左到右扫描该树，如图 7-44 中的路线所指示的相同. 就是说，它是从最左边分枝向下"移动"直到遇到一个末端结点，然后往回退到下一个分枝，等等. 在前序穿程中，最右末端结点 K 是最后扫描到的结点. 显然，根 A 的左子树是在右子树之前穿程的，并且都在 A 之后穿程的.

7.84 考虑图 7-44 的二元树 T. (a)求 T 的内序和后序穿程；(b)找出三种穿程中末端结点的共同特性.

解 ☞ (a)由观察可得到如下穿程：

内序：$D\quad B\quad F\quad E\quad A\quad G\quad C\quad L\quad J\quad H\quad K$

后序：$D\quad F\quad E\quad B\quad G\quad L\quad J\quad K\quad H\quad C\quad A$

(b)在三种穿程中，末端结点 D,F,G,L 和 K 都是按从左到右的相同次序穿程的. 我们强调这对任何二元树 T 都是如此.

7.85 一棵二元树 T 有 9 个结点. T 的内序和前序穿程得到如下的结点序列：

内序：$E\quad A\quad C\quad K\quad F\quad H\quad D\quad B\quad G$

前序：$F\quad A\quad E\quad K\quad C\quad D\quad H\quad G\quad B$

画出树 T.

解 ☞ 从树 T 的根如下往下画.

(a)T 的根是在其前序中由选取第一个结点得到的. 这样，F 是 T 的根.

(b)结点 F 的左孩子是如下得到的. 首先用 T 的内序去找 F 的左子树 T_1 的结点. 这样，T_1 由结点 E，A，C 和 K 组成. 然后，在 T_1 前序中选择第一个结点(出现在 T 的前序中)得到 F 的左孩子. 这样 A 是 F 的左孩子.

(c)类似地，F 的右子树由结点 H,D,B 和 G 组成，且 D 是 T_2 的根，即 D 是 F 的右孩子.

对每个新的结点重复上述过程，我们最后得到的所要求的树在图 7-45 中.

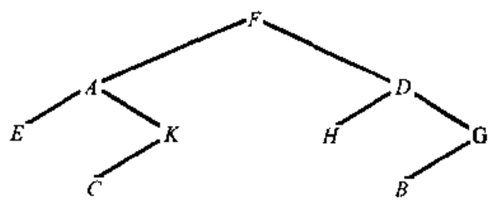


图 7-45

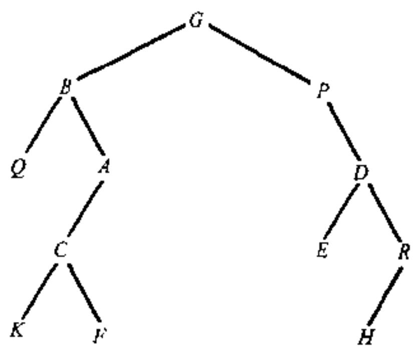


图 7-46

7.86 假设下列的序列分别按前序和内序列出一棵二元树 T 的结点：

前序：$G\quad B\quad Q\quad A\quad C\quad K\quad F\quad P\quad D\quad E\quad R\quad H$

内序：$Q\quad B\quad K\quad C\quad F\quad A\quad G\quad P\quad E\quad D\quad H\quad R$

画出该树的图形.

解 ☞ 如同习题7.85的过程得到所要求的树在图7-46中.

一般树

7.87 给出一般树的一个(递归)定义.

解 ☞ 一棵一般树定义为一些元素,称为**结点**的非空有限集合 T,使得

(1) T 包含一个卓越的元素 R.称为 T 的**根**.

(2) T 的剩下的元素形成零或更多不接连的树 $T_1,T_2,\cdots,T_m$ 的一个有序集.

树 $T_1,T_2,\cdots,T_m$ 称为根 R 的**子树**,且 $T_1,T_2,\cdots,T_m$ 的根称为 R 的**继承者**.

家系学,图论和园艺学上的术语像二元树那样用于一般树.具体地说.若 N 是一个有继承者 $S_1,S_2,\cdots,S_m$ 的结点,则 N 称为诸 S_i 的**母亲**,诸 S_i 称为 N 的**孩子**,而且诸 S_i 彼此称为**兄弟姐妹**.

注 一般树的上述定义等价7.4节讨论的有序的有根树.

7.88 给出一个使用图形的一般树例子.

解 ☞ 图7-47表示一个有13个结点

$A,B,C,D,E,F,G,H,J,K,L,M,N$

的一般树 T.除非另有说明,一棵树 T 的根在图形的顶上,并且一个结点的孩子是从左至右排序的.因此 A 是 T 的根,并且 A 有三个孩子,第一个孩子是 B,第二个孩子是 C,第三个孩子是 D.

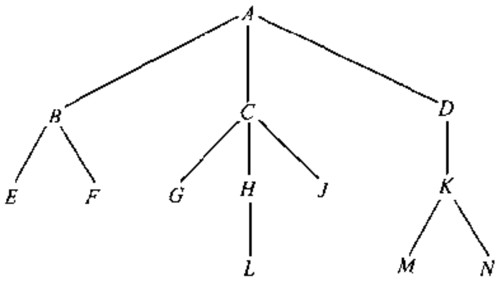


图7-47

7.89 考虑图7-47的一般树.指出哪些结点有

(a)3个孩子,(b)2个孩子,(c)1个孩子,(d)没有孩子.

解 ☞ (a)A 和 C,(b)B 和 K,(c)D 和 H,(d)E,F,G,L,J,M 和 N.(这些结点又称为顶生结点)

7.90 一棵二元树是一般树的特殊情形吗?

解 ☞ 不,二元树和一般树是不同的对象.两个基本差别如下:(1)一棵二元树 T' 可以是空的,但一般树 T 是非空的;(2)假设一个结点 N 只有一个孩子,那么一棵二元树 T' 中该孩子有左孩子和右孩子之区分,但在一般树 T 中却不存在这种区分.

我们用图7-35的树 T_1 和 T_2 来说明第二个差别.具体地说,作为二元树,在树 T_1 中 D 是 C 的左孩子但在 T_2 中 D 却是 C 的右孩子.因此 T_1 和 T_2 是不同的树.另一方面,T_1 和 T_2 作为一般树时,它们之间没有差别.

7.91 定义一片森林(在一般树).

解 ☞ 一片**森林** F 定义为零或更多不同树的一个有序集.如果我们从一棵一般树删除根 R,则得到由 R 的子树(可以是空的)组成的森林 F.相反地,若 F 是一片森林,则添加一个结点 R 到 F 以形成一棵一般树 T,此处 R 是 T 的根且 R 的子树由 F 的原来的树组成.

7.92 设 T 是一棵一般树.描述如何将 T 存储在计算机的存储器中.

解 ☞ 通常,用3个平行数组INFO,CHILD(或DOWN)和SIBL(或HORZ)以及一个指示变量ROOT如下地将 T 存储在存储器中.首先,T 的每个结点对应一个单元 K 使得:

(1) INFO[K]含结点 N 的资料;

(2) CHILD[K]含 N 的第一个孩子的单元,条件CHILD[K]=NULL表示 N 没有孩子;

(3) SIBL[K]含 N 的一个兄弟(姐妹)的单元,条件SIBL[K]=NULL表示 N 是他的母亲的最后一个孩子.

此外,ROOT将含 T 的根 R 的单元.虽然这个表示法似乎是人为的,但它有极大的优点,就是 T 的每个结点 N 不管有多少孩子都准确地包含在3个信息组中.

上述表示法容易推广到表示由树 $T_1,T_2,\cdots,T_m$ 组成的森林中,这只要假定这些树的根是兄弟(姐妹).在此情形中,ROOT将包含第一棵树 T_1 的根 R_1 的单元,或者当 F 是空的时,ROOT等于

NULL.

7.93 考虑图 7-47 的一般树 T. 假设 T 的结点的资料如图 7-48 那样用一个数组 INFO 来存储. 设 CHILD 和 SIBL 是平行于 INFO 的数组, ROOT 是一个指示变量. 赋值给 ROOT, CHILD 和 SIBL 以反映 T 的结构表示.

解 ☞ 赋值给 ROOT, CHILD 和 SIBL 如下:

(a)由于 T 的根 A 存储在 INFO[2]中, 因此置 ROOT: = 2.

(b)由于 A 的第一个孩子是结点 B, 它存储在 INFO[3]中, 因此置 CHILD[2]: = 3. 由于 A 没有兄弟姐妹, 因此置 SIBL[2]: = NULL.

(c)由于 B 的第一个孩子是结点 E, 它存储在 INFO[15]中, 因此置 CHILD[3]: = 15. 由于结点 C 是 B 的下一个兄弟且 C 存储在 INFO[4]中, 因此置 SIBL[3]: = 4.

如此等等, 图 7-49 给出 CHILD 和 SIBL 的最后值.

	INFO
1	
2	A
3	B
4	C
5	
6	G
7	H
8	J
9	N
10	M
11	L
12	K
13	
14	F
15	E
16	D

图 7-48

	CHILD	SIBL
1		
2	3	0
3	15	4
4	6	16
5		
6	0	7
7	11	8
8	0	0
9	0	0
10	0	9
11	0	0
12	10	0
13		
14	0	0
15	0	14
16	12	0

图 7-49

7.94 假设 T 是一棵一般树. 说明对 T 怎么指定惟一的一棵二元树 T', 它基本上保持 T 的结构. 用图 7-47 的一般树解释之.

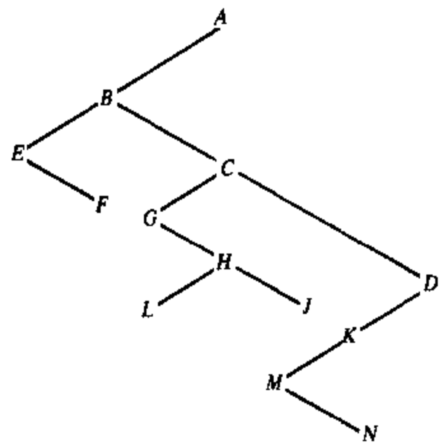


图 7-50 二元树 T'

解 ☞ 二元树 T' 是从 T 如下得到. 首先, 二元树 T' 的结点与 T 的结点相同, 并且 T' 的根是 T 的根. 设 N 是二元树 T' 的任意一个结点, 则在 T' 中 N 的左孩子是一般树 T 的结点 N 的第一个孩子, 并且 T' 中 N 的右孩子是一般树 T 中 N 的下一个兄弟.

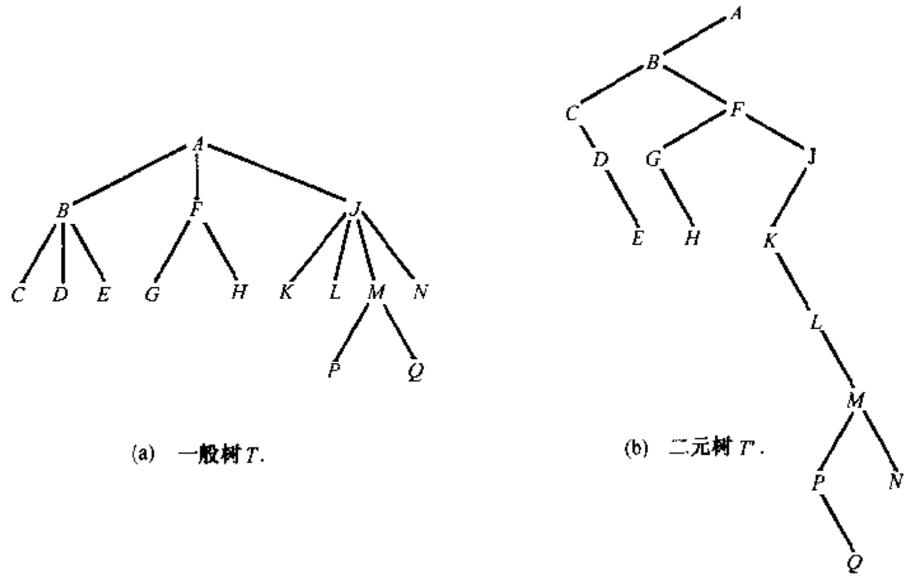
读者可以验证图 7-50 的二元树 T' 如上所描述的对应于图 7-47 的一般树 T. 显然按逆时针方向旋转, 图 7-50 中 T' 的图形直到边指向到右孩子是水平的为止, 我们得到一个图形, 在此结点占有与图 7-47 中结点一样的相对位置.

7.95 在一般树 T 的计算机表示和二元树 T' 的计算机表示之间若有关系，则描述这种关系．

解 ☞ 除了一般树的数组 CHILD 和 SIBL 的名称对应于二元树 T' 的数组 LEFT 和 RIGH 的名称之外，它们的表示确是相同的．这种对应关系的重要性在于应用到二元树的某种算法，如穿程算法，现在可以应用于一般树．

7.96 考虑图 7-51(a)的一般树 T．求相应的二元树 T'．

解 ☞ T'的结点和一般树 T 的结点相同，特别地，T'的根与 T 的根相同．而且，若 N 是二元树 T'的一个结点，则它的左孩子是 T 中 N 的第一个孩子，它的右孩子是 T 中 N 的下一个兄弟．从根往下构造 T'，得到的树在图 7-51(b)中．



(a)　一般树 T.　　(b)　二元树 T'.

图 7-51

7.97 设 T 是一棵一般树，它有根 R 和子树 $T_1, T_2, \cdots, T_M$．T 的前序穿程和后序穿程定义如下：

前序：(1)分理根 R．

　　(2)按前序穿程子树 $T_1, T_2, \cdots, T_M$．

后序：(1)按后序穿程子树 $T_1, T_2, \cdots, T_M$．

　　(2)分理根 R．

设 T 是图 7-51(a)的一般图．(a)按前序穿程 T，(b)按后序穿程 T．

解 ☞ 注意 T 有根 A 以及子树 T_1, T_2, T_3，其中

T_1 由结点 B, C, D 和 E 组成；

T_2 由结点 F, G 和 H 组成；

T_3 由结点 J, K, L, M, N, P 和 Q 组成．

(a) T 的前序穿程由下列步骤组成．

(i)分理根 A．

(ii)按前序穿程 T_1：分理结点 B, C, D, E．

(iii)按前序穿程 T_2：分理结点 F, G, H．

(iv)按前序穿程 T_3：分理结点 J, K, L, M, P, Q, N．

这就是说，T 的前序穿程如下：

$$A, B, C, D, E, F, G, H, J, K, L, M, P, Q, N.$$

(b) T 的后序穿程由下列步骤组成：

(i)按后序穿程 T_1：分理结点 C, D, E, B．

(ii)按后序穿程 T_2：分理结点 G, H, F．

(iii)按后序穿程 T_3:分理结点 K, L, P, Q, M, N, J.

(iv)分理根 A.

换句话说, T 的后序穿程如下:

$$C, D, E, B, G, H, F, K, L, P, Q, M, N, J, A.$$

7.98 考虑图 7-51(b)的二元树 T'.求 T'的前序、内序和后序穿程.把它们和习题 7.97 得到的与 T'对应的一般树 T 的前序和后序穿程进行比较.

解 ☞ 应用习题 7.81 中二元树穿程算法,我们得到 T'的如下穿程:

前序: $A, B, C, D, E, F, G, H, J, K, L, M, P, Q, N$.

内序: $C, D, E, B, G, H, F, K, L, P, Q, M, N, J, A$.

后序: $E, D, C, H, G, Q, P, N, M, L, K, J, F, B, A$.

我们看到,二元树 T'的前序穿程和一般树 T 的前序穿程是相同的,二元树 T'的内序穿程和一般树 T 的后序穿程相同.没有一般树 T 的固有穿程和与之对应的二元树 T'的后序穿程相对应.

第八章 组合分析

8.1 计数原理、阶乘记号

下面的基本计数原理始终应用于这一章中.

基本计数原理 若某一事件能按 n_1 种不同方式出现,且若随其后的第二个事件能按 n_2 种不同方式方式出现,再随第二个事件之后的第三个事件能按 n_3 种不同方式出现,……,则所指定顺序的事件能出现的方式种数是 $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots$.

8.1 一个牌照包含两个字母及其随后 3 个数字,其第一个数字非零.能印制多少个牌照?

解 ☞ 每个字母可用 26 种不同方式印制,第一个数字按九种方式以及其他两数字的每一个按十种方式印制.因此可以印制 $26 \cdot 26 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 = 608400$ 个不同的牌照.

8.2 设每一牌照包含两个不同字母及其随后 3 个不同数字.求牌照的数目 n.

解 ☞ 这里 $n = 26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 468000$.这就是说,头一个字母有 26 个可供选择,但第二个字母只有 25 个可供选择,因它必须与第一个字母不同.同理,数字的选择是 10,9 和 8 种,因数字必须不同.

8.3 设习题 8.2 中第一个数字不能是 0.试解习题 8.2.

解 ☞ 这里,$n = 26 \cdot 25 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 = 421200$.现在除第一个数字只有九种选择外同于习题 8.2.

8.4 由 26 个成员组成的一个组织中可选举一位总统、财政大臣和秘书长.试求共有多少种结果(假设没有人被选任多于一个职位).

解 ☞ 总统可有 26 种不同选举结果,随之财政大臣有 25 种不同选举结果(因选为总统的人不再符合被推选为财政大臣的条件),再随之秘书长可有 24 种不同的选举结果.这样,由上述计数原理,在这个组织中选出这些官员共有 $n = 26 \cdot 25 \cdot 24 = 15600$ 种不同结果.

8.5 在 A 和 B 之间有 4 条公共汽车线路,在 B 和 C 之间有 3 条线路.求一个人可以行进的路线数目:(a)乘公共汽车从 A 经过 B 到 C;(b)乘公共汽车经过 B 往返于 A 和 C.

解 ☞ (a)从 A 到 B 有 4 条路线,从 B 到 C 有 3 条路线,因此从 A 经过 B 过 C 有 $4 \cdot 3 = 12$ 条路线.

(b)从 A 经 B 到 C 有 12 条路线以及返回有 12 条路线,因此有 $12 \cdot 12 = 144$ 条往返路线.

8.6 在习题 8.5 中,假设一个人只用公共汽车线路一次.乘公共汽车经 B 往返于 A 和 B 有多少条路线?

解 ☞ 这个人从 A 到 B 到 C 到 B 到 A.用连接的箭头如下插入这些字母:

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow B \longrightarrow A.$$

此人从 A 到 B 有 4 条行进路线,而从 B 到 C 有 3 条路线.但因一条公共汽车线路只能使用一次,从而从 C 到 B 只有二条路线且从 B 到 A 有 3 条路线.把上面这些数据插入相应的箭头:

$$A \xrightarrow{4} B \xrightarrow{3} C \xrightarrow{2} B \xrightarrow{3} A.$$

这样,往返于 A 和 B 只使用公共汽车线路一次,则有 $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 72$ 条往返行进路线.

8.7 一个学生可以选修四门数学课之一和五门英语课之一.求他能登记选修这两门课的方式的数目 n.

解 ☞ 对数学课有四种选择,对英语课有五种选择.因此 $n = 4 \cdot 5 = 20$.

8.8 若在习题 8.7 中,有一门数学课和一门英语课遇到相同时间.重新解习题 8.7.

解 ☞ 从 20 种可能选择减去一种得到 $n = 20 - 1 = 19$.

阶乘函数

这一小节涉及阶乘函数 $n!$（读作"n 阶乘"），此处 $n!$ 定义为

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-2)(n-1)n.$$

换句话说，$n!$ 是从 1 到 n 的全体正整数的乘积. 定义 $0! = 1$.

8.9 给出阶乘函数的一个递归定义.

解 ☞ 我们可以递归地用

$$0! = 1$$

和

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

来定义 $n!$.（由于用 $(n-1)!$ 来定义 $n!$，因此这个定义是递归的.）

8.10 求 $2!, 3!$ 和 $4!$.

解 ☞ 从 1 到 n 的整数相乘：

$$2! = 1 \cdot 2 = 2, \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \quad 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

8.11 求 $5!, 6!, 7!$ 和 $8!$.

解 ☞ 对 $n > 1$，我们有 $n! = n(n-1)!$，因此

$$\begin{aligned} 5! &= 5 \cdot 4! = 5 \cdot 24 = 120, \\ 6! &= 6 \cdot 5! = 6 \cdot 120 = 720, \\ 7! &= 7 \cdot 6! = 7 \cdot 720 = 5040, \\ 8! &= 8 \cdot 7! = 8 \cdot 5040 = 40320. \end{aligned}$$

8.12 求(a) $10!$，(b) $(-3)!$.

解 ☞ (a) 首先利用习题 8.11 求

$$9! = 9 \cdot 8! = 9 \cdot 40320 = 362880.$$

然后

$$10! = 10 \cdot 9! = 10 \cdot 362880 = 3628800.$$

(b) $(-3)!$ 没有定义.

8.13 用阶乘表示(a) $35 \cdot 34 \cdot 33$，(b) $\frac{1}{16 \cdot 15}$.

解 ☞ (a)

$$35 \cdot 34 \cdot 33 = \frac{35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32!}{32!} = \frac{35!}{32!}.$$

(b)

$$\frac{1}{16 \cdot 15} = \frac{14!}{16 \cdot 15 \cdot 14!} = \frac{14!}{16!}.$$

8.14 用阶乘表示：

(a) $n(n-1)\cdots(n-r+1)$；(b) $\dfrac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (r-1)r}$.

解 ☞ (a)

$$\begin{aligned} n(n-1)\cdots(n-r+1) &= \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-r)(n-r-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!}. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (r-1)r} &= n(n-1)\cdots(n-r+1)\frac{1}{r!} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!}\frac{1}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}. \end{aligned}$$

8.15 简化:(a)$\frac{(n+1)!}{n!}$,(b)$\frac{n!}{(n-2)!}$.

解 ☞ (a)

$$\frac{(n+1)!}{n!}=\frac{(n+1)n(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1}{n(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1}=n+1,$$

或简单地

$$\frac{(n+1)!}{n!}=\frac{(n+1)n!}{n!}=n+1.$$

(b)

$$\frac{n!}{(n-2)!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1}{(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1}=n(n-1)=n^2-n,$$

或简单地

$$\frac{n!}{(n-2)!}=\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}=n(n-1)=n^2-n.$$

8.16 简化:(a)$\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$,(b)$\frac{(n-1)!}{(n+2)!}$.

解 ☞ (a)

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1}{(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1}=(n+1)n=n^2+n,$$

或简单地

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=\frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!}=(n+1)\cdot n=n^2+n.$$

(b)

$$\frac{(n-1)!}{(n+2)!}=\frac{(n-1)!}{(n+2)(n+1)n(n-1)!}=\frac{1}{(n+2)(n+1)n}=\frac{1}{n^3+3n^2+2n}.$$

8.17 简化$\frac{(n-r+1)!}{(n-r-1)!}$.

解 ☞ 我们有

$$\frac{(n-r+1)!}{(n-r-1)!}=\frac{(n-r+1)(n-r)(n-r-1)!}{(n-r-1)!}=(n-r+1)(n-r).$$

8.18 简化$\frac{(n-r)!}{(n-r-2)!}$.

解 ☞ 我们有

$$\frac{(n-r)!}{(n-r-2)!}=\frac{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)!}{(n-r-2)!}=(n-r)(n-r-1).$$

8.2 二项式系数

符号$\binom{n}{r}$(读作"nCr"),其中 r 和 n 都是正整数且$r\leqslant n$,它定义为

$$\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots(r-1)r}.$$

注意分子和分母中恰好都有 r 个因子.鉴于后面的定理 8.2,这些数称为**二项式系数**.

8.19 计算:(a)$\binom{16}{3}$,(b)$\binom{12}{4}$.

解 ☞ 回忆一下,分子和分母有同样多的因子.

(a) $\binom{16}{3}=\frac{16\cdot15\cdot14}{1\cdot2\cdot3}=560$, (b) $\binom{12}{4}=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=495$.

8.20 计算:(a)$\binom{8}{2}$,(b)$\binom{9}{4}$,(c)$\binom{10}{3}$.

解 ☞ (a)现在 9－7＝2,因此

$$\binom{9}{7}=\binom{9}{2}=\frac{9\cdot 8}{1\cdot 2}=36.$$

(b)现在 10－6＝4,因此

$$\binom{10}{6}=\binom{10}{4}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=210.$$

8.28 证明

$$\binom{12}{7}=\binom{11}{6}+\binom{11}{7}$$

(这是定理 8.1 当 $n=11$ 和 $r=7$ 的情形).

证 ☞ 这里

$$\binom{11}{6}+\binom{11}{7}=\frac{11!}{6!5!}+\frac{11!}{7!4!}.$$

我们用 7/7 乘第一个分数以及用 5/5 乘第二个分数,得到的两个分数的分母相同,然后将它们相加:

$$\begin{aligned}\binom{11}{6}+\binom{11}{7}&=\frac{7\cdot 11!}{7\cdot 6!5!}+\frac{5\cdot 11!}{7!5\cdot 4!}=\frac{7\cdot 11!}{7!5!}+\frac{5\cdot 11!}{7!5!}\\&=\frac{7\cdot 11!+5\cdot 11!}{7!5!}=\frac{(7+5)\cdot 11!}{7!5!}\\&=\frac{12\cdot 11!}{7!5!}=\frac{12!}{7!5!}=\binom{12}{7}.\end{aligned}$$

8.29 证明:$\binom{17}{6}=\binom{16}{5}+\binom{16}{6}$.

证 ☞ 现在

$$\binom{16}{5}+\binom{16}{6}=\frac{16!}{5!11!}+\frac{16!}{6!10!}.$$

用 6/6 乘第一个分数以及 11/11 乘第二个分数得到的两个分数的分母相同,然后将它们相加:

$$\begin{aligned}\binom{16}{5}+\binom{16}{6}&=\frac{6\cdot 16!}{6\cdot 5!11!}+\frac{11\cdot 16!}{6!\cdot 11\cdot 10!}=\frac{6\cdot 16!}{6!11!}+\frac{11\cdot 16!}{6!11!}\\&=\frac{6\cdot 16!+11\cdot 16!}{6!11!}=\frac{(6+11)16!}{6!11!}\\&=\frac{17\cdot 16!}{6!11!}=\frac{17!}{6!11!}=\binom{17}{6}.\end{aligned}$$

定理 8.1

$$\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}.$$

8.30 证明定理 8.1.

证 ☞ (这个证明中的技巧与习题 8.28 和 8.29 相似.)现在

$$\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}=\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}+\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

为了得到两个分数的分母相同,我们用 $\frac{r}{r}$ 乘第一个分数以及用 $\frac{n-r+1}{n-r+1}$ 乘第二个分数.因此

$$\begin{aligned}\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}&=\frac{r\cdot n!}{r(r-1)!(n-r+1)!}+\frac{(n-r+1)n!}{r!(n-r+1)!(n-r)!}\\&=\frac{r\cdot n!}{r!(n-r+1)!}+\frac{(n-r+1)n!}{r!(n-r+1)!}\\&=\frac{r\cdot n!+(n-r+1)n!}{r!(n-r+1)!}=\frac{[r+(n-r+1)]n!}{r!(n-r+1)!}\\&=\frac{(n+1)n!}{r!(n-r+1)!}=\frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!}\\&=\binom{n+1}{r}.\end{aligned}$$

二项式定理，帕斯卡三角形

这一小节应用下面的二项式定理（在习题 8.42 中，用归纳法证明），这里给出$(a+b)^n$的展开式的一般表达式.

定理 8.2（二项式定理）

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 \\
&\quad + \cdots + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n \\
&= a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots \\
&\quad + \binom{n}{2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{1}ab^{n-1} + b^n \\
&= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r.
\end{aligned}
$$

注　$(a+b)^n$的上面展开式有以下特性：

(i)有 $n+1$ 项.

(ii)每项中 a 和 b 的指数之和是 n.

(iii)a 的指数从 n 到 0 逐项减少，b 的指数从 0 到 n 逐项增加.

(iv)任一项的系数是$\binom{n}{k}$，此处 k 或是 a 或是 b 的指数.

(v)与前项和末项等距的项的系数相等.

8.31　展开：(a)$(a+b)^6$，(b)$(a+b)^7$.

解　☞ 应用二项式定理，

(a)

$$
\begin{aligned}
(a+b)^6 &= a^6 + 6a^5b + \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}a^4b^2 + \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}a^3b^3 + \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}a^2b^4 + 6ab^5 + b^6 \\
&= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + 6^6.
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
(a+b)^7 &= a^7 + 7a^6b + \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}a^5b^2 + \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}a^4b^3 + \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}a^3b^4 \\
&\quad + \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}a^2b^5 + 7ab^6 + b^7 \\
&= a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.
\end{aligned}
$$

8.32　展开和简化$(2x+3y^2)^5$.

解　☞ 这里 $2x$ 和 $3y^2$ 分别对应于二项式定理中的 a 和 b. 于是

$$
\begin{aligned}
(2x+3y^2)^5 &= (2x)^5 + 5(2x)^4(3y^2) + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}(2x)^3(3y^2)^2 \\
&\quad + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}(2x)^2(3y^2)^3 + 5(2x)(3y^2)^4 + (3y^2)^5 \\
&= 2^5x^5 + 5\cdot 2^4x^4\cdot 3y^2 + 10\cdot 2^3x^3\cdot 3^2y^4 + 10\cdot 2^2x^2\cdot 3^3y^6 \\
&\quad + 5\cdot 2x\cdot 3^4y^8 + 3^5y^{10} \\
&= 32x^5 + 240x^4y^2 - 720x^3y^4 + 1080x^2y^6 + 810xy^8 + 243y^{10}.
\end{aligned}
$$

8.33　展开和简化$(x+3y)^3$.

解　☞

$$
\begin{aligned}
(x+3y)^3 &= (x)^3 + \frac{3}{1}(x)^2(3y) + \frac{3}{1}(x)(3y)^3 \\
&= x^3 + 9x^2y + 27xy^2 + 27y^3.
\end{aligned}
$$

8.34 展开并简化$(2x-y)^4$.

解 ☞

$$(2x-y)^4=(2x)^4+\frac{4}{1}(2x)^3(-y)+\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}(2x)^2(-y)^2+\frac{4}{1}(2x)(-y)^3+(-y)^4$$
$$=16x^4-32x^3y+24x^2y^2-8xy^3+y^4.$$

8.35 展开并简化$(2x+y^2)^5$.

解 ☞

$$(2x+y^2)^5=(2x)^5+\frac{5}{1}(2x)^4(y^2)+\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}(2x)^3(y^2)^2+\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}(2x)^2(y^2)^3+\frac{5}{1}(2x)(y^2)^4+(y^2)^5$$
$$=32x^5+80x^4y^2+80x^3y^4+40x^2y^6+10xy^8+y^{10}.$$

8.36 (a)叙述$(a-b)^n$怎么不同于$(a+b)^n$;(b)应用习题8.35计算$(2x-y^2)^5$.

解 ☞ 除了$(a-b)^n$中的符号以正号开始后正负号交替出现,即b的偶次幂项是正和b的奇次幂项将是负的外,$(a-b)^n$的展开式和$(a+b)^n$的展开式是一样的.这是因为若r是偶数,则$(-b)^r=b^r$;若r是奇数,则$(-b)^r=-b^r$.

(b)由习题8.35

$$(2x+y^2)^5=32x^5+80x^4y^2+80x^3y^4+40x^2y^6+10xy^6+y^{10}.$$

为得到$(2x-y^2)^5$,只要在$(2x+y^2)^5$的展开式将各项符号改为正负交替出现:

$$(2x-y^2)^5=32x^5-80x^4y^2+80x^3y^4-40x^2y^6+10xy^6-y^{10}.$$

8.37 解释系数$\binom{n}{k}$中的k为什么可来自二项式定理中或是a的指数或是b的指数.

解 ☞ 从习题8.23证明的

$$\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$$

得到.

8.38 定义帕斯卡(Pascal)三角形.

解 ☞ $a+b$的逐次幂的系数可排成如图8-1所示的三角形数组.这个三角形数组称为帕斯卡(Pascal)三角形.它有下面的基本特性:

(i)每行中第一个数和最后一个数是1;

(ii)数组中其他的每个数可由上一行的与它倾斜出现的两个数相加得到,例如

$$10=4+6,\quad 15=5+10,\quad 20=10+10.$$

特性(ii)从定理8.1得到.

$$(a+b)^0=1$$
$$(a+b)^1=a+b$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$
$$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$
$$\cdots\cdots$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
……

图8-1

8.39 已知

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

展开$(a+b)^7$和$(a+b)^8$.

解 ☞ 我们能用二项式定理展开$(a+b)^7$和$(a+b)^8$.但是,已知$(a+b)^6$的展开式,用帕斯卡三角形求得$(a+b)^7$和$(a+b)^8$则更为简单.首先写出$(a+b)^6$的系数,然后计算三角形的下一行:

1　6　15　20　15　6　1

1　7　21　(35)　35　21　7　1

1　8　(28)　56　70　(56)　28　8　1

回想每个数由上一行中与它倾斜的两个数相加得到,例如

$$35 = 15 + 20,\quad 28 = 7 + 21,\quad 56 = 35 + 21.$$

从上面的图形我们得到

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7,$$

$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8.$$

8.40 证明

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 2^4 = 16.$$

证 ☞ 用二项式定理将$(1+1)^4$展开:

$$2^4 = (1+1)^4 = \binom{4}{0}1^4 + \binom{4}{1}1^3\cdot 1^1 + \binom{4}{2}1^2\cdot 1^2 + \binom{4}{3}1^1\cdot 1^3 + \binom{4}{4}1^4$$

$$= \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}.$$

8.41 证明

(a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$;

(b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots \pm \binom{n}{n} = 0$.

证 ☞ (a)用二项式定理展开$(1+1)^n$便得到这个等式(如同习题8.40).

(b)用二项式定理展开$(1-1)^n$便得到这个等式.

8.42 证明二项式定理8.2:

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r.$$

证 ☞ 由于

$$\sum_{r=0}^{1}\binom{1}{r}a^{1-r}b^r = \binom{1}{0}a^1b^0 + \binom{1}{1}a^0b^1 = a + b = (a+b)^1,$$

因此对于$n=1$这个定理成立.我们假设对$(a+b)^n$定理成立.欲证对$(a+b)^{n+1}$定理亦成立.我们有

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r.$$

现在从

$$b\left[\binom{n}{r-1}a^{n-r+1}b^{r-1}\right] + a\left[\binom{n}{r}a^{n-r}b^r\right] = \binom{n}{r-1}a^{n-r+1}b^r + \binom{n}{r}a^{n-r+1}b^r$$

$$= \left[\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}\right]a^{n-r+1}b^r$$

得到含b^r的乘积的项.根据定理8.1,有

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r},$$

因此含b^r的项是

$$\binom{n+1}{r}a^{n-r+1}b^r.$$

注意到$(a+b)(a+b)^n$是b的$n+1$次多项式,因此

$$(a+b)^{n+1}=(a+b)(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n+1}\binom{n+1}{r}a^{n-r+1}b^r$$

定理得证.

多项系数

给定非负整数$n_1,n_2,\cdots,n_r$使得$n_1+n_2+\cdots+n_r=n$.表达式$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_r}$定义为

$$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_r}=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_r!}.$$

鉴于下面的二项式定理的推广定理,我们称这些数为**多项系数**.

定理 8.3

$$(a_1+a_2+\cdots+a_r)^n=\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_r=n}\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_r}a_1^{n_1}a_2^{n_2}\cdots a_r^{n_r}.$$

8.43 计算:

(a) $\binom{7}{2,3,2}$, (b) $\binom{8}{4,2,2,0}$.

解 ☞

(a) $\binom{7}{2,3,2}=\frac{7!}{2!\ 3!\ 2!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1}=210.$

(b) $\binom{8}{4,2,2,0}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1\cdot1}=420,$

8.44 计算:

(a) $\binom{6}{3,2,1}$, (b) $\binom{10}{5,3,2,2}$.

解 ☞

(a) $\binom{6}{3,2,1}=\frac{6!}{3!\ 2!\ 1!}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1\cdot1}=60.$

(b) 由于$5+3+2+2\neq10$,因此表达式$\binom{6}{5,3,2,2}$没有意义.

8.45 展开$(a+b+c)^3$.

解 ☞ 考虑所有的三元非负整数(n_1,n_2,n_3),其中$n_1+n_2+n_3=3$.这样

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3&=\binom{3}{3,0,0}a^3b^0c^0+\binom{3}{2,1,0}a^2b^1c^0+\binom{3}{2,0,1}a^2b^0c^1\\&\quad+\binom{3}{1,1,1}a^1b^1c^1+\binom{3}{0,3,0}a^0b^3c^0+\binom{3}{0,2,1}a^0b^2c^1\\&\quad+\binom{3}{1,2,0}a^1b^2c^0+\binom{3}{0,0,3}a^0b^0c^3+\binom{3}{1,0,2}a^1b^0c^2\\&\quad+\binom{3}{0,1,2}a^0b^1c^2\\&=a^3+3a^2b+3a^2c+6abc+b^3+3b^2c+3ab^2+c^3+3ac^2+3bc^2.\end{aligned}$$

8.46 证明

$$\binom{n}{n_1,n_2}=\binom{n}{n_1}=\binom{n}{n_2}.$$

证 ☞ 观察到表达式$\binom{n}{n_1,n_2}$隐含着$n_1+n_2=n$或$n_2=n-n_1$.因此

$$\binom{n}{n_2}=\binom{n}{n_1}=\frac{n!}{n_1!\ (n-n_1)!}=\frac{n!}{n_1!\ n_2!}=\binom{n}{n_1,n_2}.$$

8.47　求$(2x^3-2xy^2+z^2)^6$的展开式中含x^{11}和y^4的项.

解　☞ 该展开式的一般项是

$$\binom{6}{a,b,c}(2x^3)^a(-3xy^2)^b(z^2)^c=\binom{6}{a,b,c}2^a x^{3a}(-3)^b x^b y^{2b} z^{2c}$$
$$=\binom{6}{a,b,c}2^a(-3)^b x^{3a+b}y^{2b}z^{2c}.$$

因此含x^{11}和y^4的项必有$3a+b=11$和$2b=4$,或者$b-2$和$a=3$.又因$a+b+c=6$,因此$c=1$.将它们代入上式得

$$\binom{6}{3,2,1}2^3(-3)^2x^{11}y^4z^2=-\frac{6!}{3!2!1!}8\cdot 9x^{11}y^4z^2=-4320x^{11}y^4z^2.$$

8.3　排列

n个对象一次取r个的排列数用$P(n,r)$来表示.有些教科书使用记号${}_nP_r$, $P_{n,r}$或$(n)_r$表示.

8.48　以集合$S=\{a,b,c,d\}$为例,讨论排列.

解　☞ 任一有n个对象的集合按给定顺序的安排称为这些对象的一种**排列**或**全排列**(一次取所有对象).按给定顺序一次取这些对象的r个的安排称为一个**r-排列**或者n个对象一次取r个的**排列**.因此,对给定的集合S,

(i) $bdca$, $dcba$和$acdb$都是四个字母的排列(一次取所有字母).

(ii) bad, adb, cbd和bca都是四个字母一次取三个的排列.

(iii) ad, cb, da和bd都是四个字母一次取二个的排列.

8.49　求6个对象,比方说a,b,c,d,e,f,一次取3个的排列数.换句话说,用给定的6个字母选取不重复任一字母的"三字母的单词",求这些单词的数目.

解　☞ 假设一般的三字母的单词用下列的三个格子来表示:

$$\square\square\square$$

现在,我们可用6种不同方法选取第一个字母,随之可用5种不同方法选取第二个字母,再随后,可用4种方法选取第三个字母.将每一个数如下地写到它的合适的格子中:

$$\boxed{6}\boxed{5}\boxed{4}$$

因此,据基本计数原理,从6个字母中不重复取任一字母可能组成$6\cdot5\cdot4=120$个三字母的单词.或者说,6个对象一次取3个有120种排列,或用我们的记号,$P(6,3)=120$.

定理8.4

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

8.50　证明定理8.4.

证　☞ n个对象一次取r个的排列数,或n个对象的r-排列数$P(n,r)$的公式推导仿照习题8.49的推导过程.n个对象的r-排列中的第一个元素可用n种不同方法来选取,随之,可用$n-1$种不同方法选取第二个元素,再随后可用$n-2$种不同方法选取第三个元素.用此方法继续进行下去,r-排列中的第r个(最后的)元素可用$n-(r-1)=n-r+1$种不同方法来选取.这样,根据基本计数原理,我们有

$$P(n,r)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

于是,由习题8.14,

$$P(n,r)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!}$$
$$=\frac{n!}{(n-r)!}.$$

推论8.5　n个对象的排列,即全排列(一次全取)有$n!$个.

8.51 证明推论 8.5.

证 ☞ 在定理 8.4 中,令 $r=n$ 得

$$P(n,n)=n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1=n!.$$

8.52 求 3 个字母的全排列.

解 ☞ 有 $3!=1\cdot2\cdot3=6$ 种全排列.它们是 $abc, acb, bac, bca, cab, cba$.

8.53 讨论有复原和无复原的抽样.

解 ☞ 在组合分析以及特别地,在概率中,许多问题与从装有 n 个球的一个坛子取球(或从卡片叠中抽取卡片,或从一组人中查找人)有联系.当我们一次接一次从坛中取一个球,比方说共 r 次取球时,则说每种取样是一个大小为 r 的有序抽样.有两种重要的情形:

(i)有复原抽样.在此,取下一个球之前,原取出的球已放回坛中.现在,取每一个球有几种不同的方法,根据基本计数原理,有

$$\overbrace{n\cdot n\cdot n\cdot\cdots\cdot n}^{r次}=n^r$$

种不同的大小为 r 的有序复原抽样.

(ii)无复原抽样.这里,取下一个球之前不把原先取的球放回坛中.这样,在有序抽样中没有重复.换句话说,一个大小为 r 的有序无复原抽样只不过是坛中对象的一个 r-排列.因此从 n 个对象总体中取样有

$$P(n,r)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

种大小为 r 的有序无复原抽样.

8.54 假设不允许重复.(a)从 6 个数字 2,3,4,5,7 和 9 中能组成多少个三位数?(b)这些数中有多少个小于 400?(c)有多少个是偶数?(d)有多少个是奇数?(e)有多少个是 5 的倍数?

解 ☞ 在每种情形中画三个格子 $\square\square\square$ 表示一个任意数,然后每个格子只写一个数字,可以放 3 个数字.

(a)填左边的格子有六种方法,随之有五种方法填中间格子,最后有四种方法填右边格子:$\boxed{6}\boxed{5}\boxed{4}$,因此有 $6\cdot5\cdot4=120$ 个三位数.

(b)由于每个数必须小于 400,因而第一位数字是 2 或 3,因此只能有二种方法填左边格子,随之有五种方法填中间格子,最后有四种方法填右边格子:$\boxed{2}\boxed{5}\boxed{4}$.因此有 $2\cdot5\cdot4=40$ 个数小于 400.

(c)由于每个数为偶数,因而末位数字是 2 或 4,因此只能有二种方法填右边格子,然后有五种方法填左边格子,最后有四种方法填中间格子:$\boxed{5}\boxed{4}\boxed{2}$.因此有 $5\cdot4\cdot2=40$ 个数是偶数.

(d)由于每个数为奇数,因而末位数字是 3,5,7 或 9,因此只能有四种方法填右边格子,然后有五种方法填左边格子,最后有四种方法填中间格子:$\boxed{5}\boxed{4}\boxed{4}$.因此有 $5\cdot4\cdot4=80$ 个奇数.

(e)由于每一个数是 5 的倍数,从而末位数字只是 5,因此只有一种方法填右边格子,然后有五种方法填左边格,最后有四种方法填中间格子:$\boxed{5}\boxed{4}\boxed{1}$.这样,有 $5\cdot4\cdot1=20$ 个数是 5 的倍数.

8.55 假设允许重复,解习题 8.54.

解 ☞ (a)我们可用六种方法填每个格子:$\boxed{6}\boxed{6}\boxed{6}$,因此有 $6\cdot6\cdot6=216$ 个数.

(b)第一位数字必须是 2 和 3,仍然只能用二种方法填左边格子,其他每一格可用六种方法来填:$\boxed{2}\boxed{6}\boxed{6}$.因此有 $2\cdot6\cdot6=72$ 个数不超过 400.

(c)末位数必须是 2 或 4,仍然只能用二种方法填右边格子,其他每一格可用六种方法填:$\boxed{6}\boxed{6}\boxed{2}$.因此有 $6\cdot6\cdot2=72$ 个偶数.

(d)末位数必须是 3,5,7 或 9,仍然只能用四种方法填右边格子,其他每一格按六种方法填:$\boxed{6}\boxed{6}\boxed{4}$.因此有 $6\cdot6\cdot4=144$ 个奇数.

(e)末位数只能是 5,从而只能用一种方法填右边格子,其他每一个格子可用六种方法填:$\boxed{6}\boxed{6}\boxed{1}$.因此有 $6\cdot6\cdot1=36$ 个数是 5 的倍数.

8.56 求 7 个人的团体安排坐在一排七张椅子的座位上有多少种方法.

解 ☞ 可用 $7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=7!$ 种方法安排 7 人坐在一排上.

8.57 习题 8.56 中,若他们围绕一张桌子坐,则有多少种安排方法?

解 ☞ 一个人能坐在绕桌子的任何地方.其他 6 个人可有 $6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=6!$ 种方法安排围绕桌子坐.

8.58 n 个对象的循环排列是什么? 并且有多少种这样的排列?

解 ☞ n 个对象的循环排列是对象围绕一个圈的安排.有 $(n-1)!$ 种这样的排列,如习题 8.57 对 $n=7$ 的情形所解释的.

8.59 在有 18 名参赛者的一场比赛中,一个裁判可判第一、第二和第三名.求判法种数 n.

解 ☞ 有 18 人可选一人为第一名,17 人选一人为第二名,以及 16 人选一人为第三名.这样,$n=18\cdot17\cdot16=4896$.注意 $n=P(18,3)$.

8.60 一个盒子装有 10 个灯泡.求有序抽样的数目 n:(a)允许重复取大小为 3 的;(b)不允许重复取大小为 3 的.

解 ☞ (a) $n^3=10^3=10\cdot10\cdot10=1000$. (b) $n=P(10,3)=10\cdot9\cdot8=720$.

8.61 解习题 8.60:(a)可重复取大小为 4 的;(b)不可重复取大小为 4 的.

解 ☞ (a) $n=10^4=10000$,　(b) $n=P(10,4)=10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6=5824$.

8.62 一种玩牌游戏是从通常玩的一付 52 张扑克牌取出 5 张.在暗玩牌中,牌手拿到 5 张牌压下(只有牌手自己能看到牌),然后开始叫牌,在 5 张牌斯达德(Stud)玩法中,牌手拿到 1 张牌压下,随后 4 张牌摊开(所有牌手都能看到).每张牌后叫牌.这样的玩牌是排列和组合吗?(见 8.4 节组合定义.)

解 ☞ 暗玩牌是一种组合,因 5 张牌的次序是无关紧要的.5 张牌斯达德玩法是一种排列,因次序有差别.

8.63 求 5 张牌斯达德玩法的排列数 n.

解 ☞ 一付牌有 52 张,因此

$$n=P(52,5)=52\cdot51\cdot50\cdot49\cdot48=311875200.$$

8.64 在 5 张牌斯达德玩法中,若暗牌是一张一点牌(A 牌),求排列数 n.

解 ☞ 暗牌有四种取法,因而其他四张牌分别有 51,50,49 和 48 种取法.于是

$$n=4\cdot51\cdot50\cdot49\cdot48=23990400.$$

8.65 解习题 8.64,若暗牌是一张方块.

解 ☞ 在此,暗牌有 13 种选法,因此

$$n=13\cdot51\cdot50\cdot49\cdot48=77968800.$$

8.66 求 6 个人能骑一平板雪橇的方式数目.注意每个人都能骑它.

解 ☞ 他们骑雪橇的方式有

$$n=6!=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720 \text{ 种}.$$

8.67 解习题 8.66,若只有一半人能骑雪橇.

解 ☞ 这里处于第一(驾驶)位置的只有三种选择.因此

$$n=3\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=360.$$

8.68 一个辩论队由 3 个男孩和 2 个女孩组成.求他们坐在一排的坐法种数 n.

解 ☞ 由于有 5 个人,因此 $n=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$.

8.69 一个辩论队由 3 个男孩和 2 个女孩组成.他们坐在一排上.设(a)男孩,女孩各坐在一起,(b)只是女孩坐在一起.求排座位方法总数 n.

解 ☞ (a)按性别就坐有两种方法:BBBGG或GGBBB.在每一情形中,男孩有$3\cdot2\cdot1=3!=6$种坐法,女孩有$2\cdot1=2!=2$种坐法.因此

$$n=2\cdot3!2!=2\cdot6\cdot2=24.$$

(b)按性别有四种方法就坐:GGBBB,BGGBB,BBGGB,BBBGG,注意坐在女孩左边的男孩人数分别是0,1,2,3.在每一种情形中,男孩按3!种方法就坐,女孩按2!种方法就坐.这样合在一起

$$n=4\cdot3!\ 2!=4\cdot6\cdot2=48.$$

8.70 在有r个男孩和s个女孩的情形,解习题8.69.

解 ☞ (a)按性别就坐仍有两种方法:男孩坐在左边或女孩坐在左边.在每一种情形中,男孩有$r!$种坐法,且女孩有$s!$种坐法.这样,合在一起有$2r!\ s!$种坐法.

(b)按性别有$r+1$种就坐方法,每种方法对应于坐在女孩左边的男孩人数是$0,1,\cdots,r$.在每一情形中,男孩可按$r!$种方法就坐,女孩按$s!$种方法就坐.因此,合在一起有$(r+1)r!\ s!$种就坐方法.

8.71 4本数学书,3本历史书,3本化学书和2本社会学书放到书架上,要求同类书放在一起.问有多少种摆法?

解 ☞ 首先必须把书归类放在书架的四部分位置上:□□□□.左边格子可放四类书的任何一类书;第二个格子放剩下的三类书的任何一类书;第三个格子放剩下的两类书的任何一类书;右边格子放剩下的最后一类书:[4][3][2][1].这样,有$4\cdot3\cdot2\cdot1=4!$种方法把书归类放在书架上.

在以上每种情形中,可用4!种方法排放数学书,用3!种方法排放历史书,用3!种方法排放化学书,2!种方法排放社会学书.因此,合在一起有$4!\ 4!\ 3!\ 3!\ 2!=41472$种排放方法.

8.72 解习题8.71,设有r类书$A_1,A_2,\cdots,A_r$且分别有$s_1,s_2,\cdots,s_r$册.

解 ☞ 由于有r类书归类排放在书架上,因此有$r!$种摆法.在每种情形中,A_1类书可有$s_1!$种摆法,A_2类书有$s_2!$种摆法,……,A_r类书有$s_r!$种摆法.因此,合起来有$r!\ s_1!\ s_2!\cdots s_r!$种摆法.

8.73 有三位美国人,四位法国人,四位丹麦人和二位意大利人坐在一排上,要求相同国籍的人坐在一起.求有多少种就坐方法.

解 ☞ 有4!种方法安排四个国籍的各坐在一起.在每一情形中,三位美国人可按3!种方法就坐,四位法国人按4!种方法就坐,四位丹麦人按4!种方法就坐,二位意大利人按2!种方法就坐.因此,合起来有$4!\ 3!\ 4!\ 4!\ 2!=165888$种方法就坐.

8.74 解习题8.73.若他们围绕一张桌子坐.

解 ☞ 4个国籍人有3!种方法围坐一圈(见习题8.58关于循环排列).在每种情形中,三位美国人可按3!种方法就坐,四位法国人按4!种方法就坐,四位丹麦人按4!种方法就坐,二位意大利人按2!种方法就坐.因此合在一起有$3!\ 3!\ 4!\ 4!\ 2!=41472$种就坐方法.

8.75 求由数字1,2,3和4组成的正整数的总数目,其中任一整数没有一个数字是重复的.

解 ☞ 注意到任一整数最多有4个数字.令s_1,s_2,s_3和s_4分别表示包含一,二,三和四个数字的整数数目.我们分开计算每个s_i.

因有4个数字,因此有4个整数只含一个数字,即$s_1=4$.又由于有4个数字,因此有$4\cdot3=12$个整数含两个数字,即$s_2=12$.类似地,有$4\cdot3\cdot2=24$个整数含3个数字以及$4\cdot3\cdot2\cdot1=24$个整数含4个数字,即$s_3=24,s_4=24$.这样,加在一起有$s_1+s_2+s_3+s_4=4+12+24+24=64$个整数.

8.76 求由单词NUMERICAL形成的四字母单词的数目n.(一个单词无需有意义.)

解 ☞ 因有9个字母,因此$n=P(9,4)=9\cdot8\cdot7\cdot6=3024$.

8.77 解习题8.76.假设单词的开头和结尾是一个辅音字母.

解 ☞ 因只有5个辅音字母,因此开头字母有五种选择,结尾字母有四种选择,从而第二和第三个字母有七和六种选择.于是

$$n=5\cdot7\cdot6\cdot4=840.$$

8.78 解习题8.76.设单词必须包含字母R.

解 ☞ 在一个单词中有 4 个位置可摆 R.在其他三个位置可分别有 8,7 和 6 种方法选择字母.因此

$$n = 4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 1344.$$

8.79 解习题 8.76.设单词中必须含字母 M 且以一个元音字母结尾.

解 ☞ 因有 4 个元音字母,因此结尾字母有四种选择.单词中有 3 个位置可以摆 M.剩下两个位置有七种和六种方法选择字母.因此

$$n = 4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 6 = 504.$$

8.80 有五本大书,四本中等大小的书,三本小书要摆在书架上,要求相同大小的书都摆在一起.求摆法种数 n.

解 ☞ 有 3! 种方法将三类书摆在书架的三块位置.在每种情形中,大书有 5! 种摆法,中等大小书有 4! 种摆法,以及小书有 3! 种摆法.因此

$$n = 3!\ 5!\ 4!\ 3! = 103680.$$

8.81 求(a)$P(7,3)$,(b)$P(12,2)$.

解 ☞ 注意 $P(n,r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$包含 r 个因子.

(a) $P(7,3) = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$.

(b) $P(12,2) = 12 \cdot 11 = 132$.

8.82 求(a)$P(5,7)$,(b)$P(8,3)$.

解 ☞ (a) $P(5,7)$没有定义,因第二个整数不能超过第一个整数.

(b)$P(8,3) = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

8.83 求(a)$P(19,1)$,(b)$P(6,-2)$.

解 ☞ (a) $P(19,1) = 19$.

(b) $P(6,-2)$没有定义,因 $P(n,r)$对负数没有定义.

8.84 设(a)$P(n,2) = 72$, (b)$P(n,4) = 42P(n,2)$.求 n.

解 ☞ (a) $P(n,2) = n(n-1) = n^2 - 1$,因此有

$$n^2 - n = 72,$$

即

$$n^2 - n - 72 = 0,$$

亦即

$$(n-9)(n+8) = 0,$$

由于 n 必须为正数,因此只有一个答案是 $n = 9$.

(b) 由于

$$P(n,4) = n(n-1)(n-2)(n-3),$$
$$P(n,2) = n(n-1),$$

因此有

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = 42n(n-1).$$

但 $n \neq 0, n \neq 1$,因此有$(n-2)(n-3) = 42$ 或 $n^2 - 5n + 6 = 42$ 或 $n^2 - 5n - 36 = 0$ 或$(n-9)(n+4) = 0$.由于 n 必须为正数,因此只有一个解答 $n = 9$.

8.85 设 $2P(n,2) + 50 = P(2n,2)$,求 n.

解 ☞ 由于

$$P(n,2) = n(n-1) = n^2 - n,$$
$$P(2n,2) = 2n(2n-1) = 4n^2 - 2n,$$

因此有

$$2(n^2 - 1) + 50 = 4n^2 - 2n$$

或

$$2n^2 - 2n + 50 = 4n^2 - 2n,$$

亦即 $50=2n^2$ 或 $n^2=25$. 由于 n 必须是正数,因此只有解答 $n=5$.

8.86 证明 $P(n,r)=r!\binom{n}{r}$.

证 ☞ 由于

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!},\qquad P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!},$$

因此用 $\frac{r!}{r!}$ 乘 $P(n,r)$ 得

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}=\frac{r!}{r!}\frac{n!}{(n-r)!}$$
$$=r!\frac{n!}{r!(n-r)!}=r!\binom{n}{r}.$$

有重复的排列

8.87 由单词"DADDY"的字母来组成五字母"单词".求所有这种五字母"单词"数目 m.

解 ☞ 首先,对象 D_1, A, D_2, D_3, Y 有 5! 种排列,其中 3 个 D 是有区别的.而且,若删除下面 6 个排列

$$D_1D_2D_3AY,\ D_2D_1D_3AY,\ D_3D_1D_2AY,$$
$$D_1D_2D_2AY,\ D_3D_3D_1AY,\ D_3D_2D_1AY.$$

的下标,则得到相同的单词.这 6 个单词实际上来自前 3 个位置放的三个 D,它有 $3!=3\cdot2\cdot1=6$ 种不同方法排列.这对于 3 个 D 出现在每组 3 个位置的情形也是如此.因此

$$m=\frac{5!}{3!}=\frac{120}{6}=20.$$

定理 8.6 n 个对象中若有 n_1 个是相同的,n_2 个是相同的,……,n_r 个是相同的,则该 n 个对象的排列数是

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_r!}.$$

8.88 证明定理 8.6.

证 ☞ 这个公式的推导仿效习题 8.87 的推导过程.这就是说,当 n 个对象全不同时有 $n!$ 种排列.然后我们必须用 $n_1!$ 除 $n!$,其原因是 n_1 个都相同的对象在排列的任一给定的一组 n_1 个对象的位置上照样有 $n_1!$ 种排列.同理,我们必须用 $n_2!, n_3!, \cdots, n_r!$ 来除 $n!$,其中 $n_2!, n_3!, \cdots, n_r!$ 是对应的相同对象的排列数.

8.89 求用单词"BENZENE"的字母组成七字母"单词"的数目 m.

解 ☞ 我们求 7 个对象的排列数,其中 7 个对象中有 3 个相同(3 个 E)和 2 个相同(2 个 N).根据定理 8.6,

$$m=\frac{7!}{3!2!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1}=420.$$

8.90 四面没有区别的红旗,三面没有区别的白旗和一面蓝旗共八面旗子挂在一垂直线上,可组成多少不同的信号?

解 ☞ 我们求 8 个对象的排列数,其中 8 个对象有 4 个相同和 3 个相同.因此有

$$\frac{8!}{4!3!}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1}=280$$

种不同信号.

8.91 求从每个单词:(a)THEM, (b)THAT 的所有字母形成的不同单词的排列数.

解 ☞ (a)$4!=24$,因有 4 个字母且无重复.

(b)$\frac{4!}{2!}=12$,因 4 个字母中有二个 T.

8.92 求从每个单词:(a)RADAR 和(b)UNUSUAL 的所有字母形成的不同排列数.

解 ☞ (a) $\frac{5!}{2!\ 2!}=30$,因 5 个字母中有两个 R 和两个 A.

(b) $\frac{7!}{3!}=840$,因 7 个字母中有 3 个 U.

8.93 求由四面相同的红旗和二面相同的蓝旗组成的六面旗子排在一垂直线上,可组成多少信号?

解 ☞ 这个问题涉及重复排列.由于六面旗中有四面是红旗和二面是蓝旗,因此有

$$\frac{6!}{4!2!}=15$$

种信号.

8.94 求由单词 MISSISSIPPI 的所有字母组成的排列数 m.

解 ☞ 11 个字母中有 4 个是 I,4 个是 S 和 2 个 P.因此

$$m=\frac{11!}{4!4!2!}=34650.$$

8.95 解习题 8.94.设组成的单词是以一个 I 开头.

解 ☞ 现在,剩下的 10 个位置可填其他字母,其中 3 个 I,4 个是 S 和 2 个是 P.因此

$$m=\frac{10!}{3!4!2!}=12600.$$

8.96 解习题 8.94.设组成的单词以一个 S 开头和结尾.

解 ☞ 现在,剩下的 9 个位置可填其他字母,其中 4 个是 I,2 个是 S 和 2 个是 P.因此

$$m=\frac{9!}{4!2!2!}=7560.$$

8.97 解习题 8.94.设两个 P 是紧靠在一起.

解 ☞ 有十种方法放置两个 P:第一和第二个字母或第二和第三个字母,……,或第十和第十一个字母.在每一情形中,留下 9 个位置可填其他字母,其中有 4 个是 I 和 4 个是 S.因此

$$m=10\frac{9!}{4!4!}=6300.$$

8.98 解习题 8.94.设 4 个 S 紧靠在一起.

解 ☞ 考虑 4 个 S 作为一个字母.那么 8 个字母中有 4 个是 I 和 2 个是 P.因此

$$m=\frac{8!}{4!2!}=840.$$

或者说,有八种方法留放 4 个 S,而且,在每一情形中,剩下的 7 个位置可填其他字母,其中 4 个是 I 和 2 个是 P.因此

$$m=8\frac{7!}{4!2!}=840.$$

8.99 求由单词 ELEVEN 的所有字母组成的排列数 m.

解 ☞ 6 个字母有 3 个是 E,因此

$$m=\frac{6!}{3!}=120.$$

8.100 解习题 8.99.设单词是以 L 开头.

解 ☞ 现在留下 5 个位置可填其他字母,其中 3 个是 E.因此

$$m=\frac{5!}{3!}=20$$

8.101 解习题 8.99.设单词是以 E 开头和结尾.

解 ☞ 现在只留下 4 个位置可填 4 个不同字母,因此 $m=4!=24$.

8.102 解习题 8.99.设单词是以 E 开头和以 N 结尾.

解 ☞ 现在留下 4 个位置可填其他字母,其中二个是 E.因此

$$m=\frac{4!}{2!}=12.$$

8.103 求由单词 BASEBALL 的所有字母组成的排列数 m.

解 ☞ 8个字母中有二个是B,二个是A和二个是L.因此

$$m=\frac{8!}{2!2!2!}=5040.$$

8.104 解习题 8.103.设单词中两个 B 紧靠在一起.

解 ☞ 考虑两个B作为一个字母.于是7个字母中有2个是A,2个是L.因此

$$m=\frac{7!}{2!2!}=1260.$$

8.105 解习题 8.103.设单词以一个元音字母开头和结尾.

解 ☞ 有三种可能性:单词以A开头和结尾,单词以A开头和以E结尾,或单词以E开头和以A结尾.在每一情形中,留下的6个位置可填其他字母,其中2个是B和2个是L.因此

$$m=3\frac{7!}{2!2!}=540.$$

8.4 组合

给定 n 个对象的一个集合,这 n 个对象一次取 r 个的一个**组合**是任意选择的 r 个对象,此处不考虑次序.换句话说,n 个对象的集合的一个 r-组合是 r 个元素的任一子集.这样,下面是习题 8.48 的集合一次取 3 个的组合:

$$\{a,b,c\},\ \{a,b,d\},\ \{a,c,d\},\ \{b,c,d\},$$

或简单地

$$abc,\ abd,\ acd,\ bcd.$$

我们看到下面的组合是相同的:

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba.$$

这就是说,每一个都是同一集合 $\{a,b,c\}$.

n 个对象一次取 r 个的组合数,或者换句话说,n 个元素的集合的 r-元素子集的数目将用

$$C(n,r)$$

来表示.有些教科书使用记号 $_nC_r$ 或 $C_{n,r}$.

8.106 求 4 个对象,比方说 a,b,c,d 一次取 3 个的组合数,即求 $C(4,3)$.

解 ☞ **方法一** 列出 $S=\{a,b,c,d\}$ 的具有3个元素的所有可能的子集,得到

$$\{a,b,c\},\ \{a,b,d\},\ \{a,c,d\},\ \{b,c,d\},$$

或简单地

$$abc,\ abd,\ acd,\ bcd.$$

因此 $C(4,3)=4$.

方法二 3个对象组成的每一组合确定该组合的对象的 $3!=6$ 个排列,如图 8-2 所示.这样,$3!$ 乘组合数 $C(4,3)$ 等于排列数 $P(4,3)$,即

$$C(4,3)\cdot 3!=P(4,3)$$

或

$$C(4,3)=\frac{P(4,3)}{3!}.$$

但 $P(4,3)=4\cdot3\cdot2=24$ 且 $3!=6$.因此,正如上述,$C(4,3)=4$.

组合	排列
abc	abc, acb, bac, bca, cab, cba
abd	abd, adb, bad, bda, dab, dba
acd	acd, adc, cad, cda, dac, dca
bcd	bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb

图 8-2

定理 8.7

$$C(n,r)=\frac{P(n,r)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

注 回忆一下，二项式系数$\binom{n}{r}$定义为$\frac{n!}{r!\ (n-r)!}$，因此

$$C(n,r)=\binom{n}{r}.$$

于是，我们可互换使用 $C(n,r)$和$\binom{n}{r}$.

8.107 证明定理 8.7.

证 ☞ n 个对象一次取 r 个的任一组合确定该组合中的对象的 $r!$ 种排列. 对于 $r=3$，如图 8-2 所表明的. 因此

$$P(n,r)=r!C(n,r).$$

用 $r!$ 除上式便得到我们的结果.

8.108 求由 8 个人产生的三人委员会的数目 m.

解 ☞ 每个委员会实际上是 8 个人 1 次取 3 个人的一个组合. 因此

$$m=C(8,3)=\binom{8}{3}=\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}=56.$$

8.109 一个农民从有 6 头奶牛，5 头猪和 8 只母鸡的人那里买 3 头奶牛，2 头猪和 4 只母鸡. 这个农民有多少种选择?

解 ☞ 这个农民有$\binom{6}{3}$种方法挑选母牛，$\binom{5}{2}$种方法挑选猪和$\binom{8}{4}$种方法挑选母鸡. 因此，这个农民一共可有

$$\binom{6}{3}\binom{5}{2}\binom{8}{4}=\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}\frac{5\cdot4}{1\cdot2}\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=20\cdot10\cdot70=14000$$

种方法挑选这些动物.

8.110 一个团体由 7 个男人和 5 个女人组成. 求从该团体选举出的 5 人委员会的数目 m.

解 ☞ 每个委员会是 12 人中一次取 5 人的一个组合. 因此

$$m=C(12,5)=\binom{12}{5}=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=5544.$$

8.111 解习题 8.110. 设委员会由 3 个男人和 2 个女人组成.

解 ☞ 从 7 个男人选取 3 个男人有$\binom{7}{3}$种方法，以及从 5 个女人选取 2 个女人有$\binom{5}{2}$种方法. 因此

$$m=\binom{7}{3}\binom{5}{2}=\frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}\frac{5\cdot4}{1\cdot2}-350.$$

8.112 解习题 8.110. 设委员会的组成至少要有一个男的和一个女的.

解 ☞ 根据习题 8.110，有 $C(12,5)=5544$ 个可能的委员会. 在这些委员会之中，有 $C(5,5)=1$ 个委员会由 5 个女的组成以及 $C(7,5)=21$ 个委员会由 5 个男的组成. 从所有可能的委员会去掉这些委员会得到 $m=5544-21-1=5522$.

8.113 一个包装有5颗红弹子和6颗白弹子.求从包中掏出4颗弹子的方法数目 m.

解 ☞ 从11颗弹子取4颗(不分颜色)会有

$$m=\binom{11}{4}=\frac{11\cdot10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=330$$

种方法.

8.114 解习题8.113.设掏出来弹子必须是两颗红的和两颗白的.

解 ☞ 两颗红弹子可用$\binom{5}{2}$种方法取得,两颗白弹子可用$\binom{6}{2}$种方法取得.因此

$$m=\binom{5}{2}\binom{6}{2}=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=150.$$

8.115 解习题8.113.设掏出的弹子必须是同一色的.

解 ☞ 有$\binom{6}{4}=15$种方法掏出4颗白弹子以及$\binom{5}{4}=5$种方法掏出4颗红弹子.因此有$15+5=20$种方法掏出相同颜色的4颗弹子.

8.116 有12名学生有资格参加全国学生联盟年会.求从12名有资格的学生选举4人组成的代表团的方法数目 m.

解 ☞ 从12名学生选4名学生有

$$m=\binom{12}{4}=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=495$$

种选法.

8.117 解习题8.116.设有资格的2名学生将不能一起参加年会.

解 ☞ 设 A 和 B 表示不能一起参加年会的2名学生.

方法一 若同时不包括 A 和 B,则代表团有

$$\binom{10}{4}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=210$$

种选法.若包括 A 或者 B(但不包括二者),则代表团有

$$2\binom{10}{3}=2\,\frac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3}=240$$

种选法.加在一起,代表团有 $m=210+240=450$ 种选法.

方法二 若 A 和 B 同时在代表团中,则代表团的其他两个成员有$\binom{10}{2}=45$种选法.这样,若 A 和 B 不同时在代表团,则代表团有 $m=495-45=450$ 种选法.

8.118 解习题8.116.设有资格的学生中一对学生已结婚因而只能一起去参加年会.

解 ☞ 设 C 和 D 是已结婚的学生.若 C 和 D 都不参加年会,则代表团有$\binom{10}{4}=210$种选法.若 C 和 D 都去,则代表团有$\binom{10}{2}=45$种选法.加在一起,代表团有 $m=210+45=255$ 种选法.

8.119 一名学生在一场考试中要答10道题中的8道题.求该学生可选择8道题的选法数 m.

解 ☞ 该学生可有

$$m=\binom{10}{8}=\binom{10}{2}=\frac{10\cdot9}{1\cdot2}=45$$

种方法选8道题.

8.120 解习题8.119.设该学生必须答前3道题.

解 ☞ 如果已经回答了前3道题,那么该学生可从最后7道题选择其中的5道题.因此有

$$m=\binom{7}{5}=\binom{7}{2}=\frac{7\cdot6}{1\cdot2}=21$$

种选法.

8.121 解习题8.119.设该学生必须至少回答前5道题的4道题.

解 ☞ 若该学生回答前面的所有 5 道题,则有$\binom{5}{3}=10$种方法从后面 5 道题中选 3 题.另一方面,若该学生只是回答前面 5 道题的 4 道题,则可用$\binom{5}{4}=\binom{5}{1}=5$种方法选这 4 道题,并且按$\binom{5}{4}=\binom{5}{1}=5$种方法从后 5 道题中选 4 道题,因此该学生可以有 $5\cdot5=25$ 种方法来选 8 道题.故总的有

$$m = 10 + 25 = 35$$

种选法.

8.122 在一给定的平面上有 12 个点 $A, B, \cdots$,没有 3 个点同在一条直线上.(a)这些点决定多少条直线?(b)有多少条直线过点 A?

解 ☞ (a)两点决定一条直线,因此有

$$\binom{12}{2} = \frac{12\cdot 11}{1\cdot 2} = 66$$

条直线.

(b)为确定一直线过点 A,必须选取其他的点,因此有 11 条直线过 A 点.

8.123 在给定的一平面上有 12 个点 $A, B, \cdots$,没有 3 点同在一条直线上.(a)这些点决定多少个三角形?(b)有多少个三角形以 A 为顶点?

解 ☞ (a) 3 个点决定一个三角形,因此有

$$\binom{12}{3} = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 220$$

个三角形.

(b) **方法一** 为决定一个以 A 为顶点的三角形,必须选取其他两个点.因此有

$$\binom{11}{2} = \frac{11\cdot 10}{1\cdot 2} = 55$$

个以 A 为顶点的三角形.

方法二 有

$$\binom{11}{3} = \frac{11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3} = 165$$

个不以 A 为顶点的三角形.于是,以 A 为顶点的三角形有 $220-165=55$ 个.

8.124 从 12 人中能选出多少个有一个主席的五人委员会?

解 ☞ 可用 12 种方法选举主席,随后,委员会中的其余 4 人可从剩下的 11 人中按$\binom{11}{4}$种方法选举出来.因此这样的委员会有

$$12\cdot\binom{11}{4} = 12\cdot 330 = 3960$$

个.

8.125 求有 n 个元素的集合 X 的子集数目.

解 ☞ **方法一** X 有 $r\leqslant n$ 个元素的子集数目是$\binom{n}{r}$.因此,加在一起,X 有

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$$

个子集.上面的和等于 2^n(习题 8.41),从而 X 有 2^n 个子集.

方法二 X 的每个元素有两种可能性:它或是属于或是不属于某一子集,因此有

$$\overbrace{2\cdot 2\cdot\cdots\cdot 2}^{n次} = 2^n$$

种方法形成 X 的一个子集,即 X 有 2^n 个不同的子集.

8.126 一位教师从 6 名有资格的学生中选取一名或更多名学生有多少种选法?

解 ☞ **方法一** 根据习题 8.125,包含 6 名学生的集合有 $2^6=64$ 个子集.但是,由于要选取一名或更多名学生,因而必须删去空集.因此有 $2^6-1=63$ 种方法选取学生.

方法二 选取 1,2,3,4,5 或 6 名学生,选取方法的数目是

$$\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}=6+15+20+15+6+1=63.$$

8.127 从12人中选取3人或更多人有多少种选法?

解 ☞ 从12人中选取1人或更多人有

$$2^{12}-1=4096-1=4095$$

种选法.现在,从12人中选取1人或2人有

$$\binom{12}{1}+\binom{12}{2}=12+66=78$$

种选法.因此选取3人或更多人有4095-78=4017种选法.

8.128 一个8边形有多少条对角线?

解 ☞ 一个8边形有8条边和8个顶点.任2个顶点决定或是一条边或是一条对角线.因有 $\binom{8}{2}=\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}=28$ 条边和对角线,但边有8条,故一个8边形有28-8=20条对角线

8.129 正 n 边形有多少条对角线?

解 ☞ 正 n 边形亦有 n 个顶点.任两个顶点决定或是一条边或是一条对角线.因此正 n 边形有

$$\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

条边和对角线.但边有 n 条,故有

$$\frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{n^2-n}{2}-\frac{2n}{2}=\frac{n^2-3n}{2}=\frac{n(n-3)}{2}$$

条对角线.

8.130 哪种正多边形的对角线和边数相同?

解 ☞ 根据习题8.129,正 n 边形有 $\frac{n^2-3n}{2}$ 条对角线.我们要求它与边数相等:

$$\frac{n^2-3n}{2}=n,$$

即

$$n^2-3n=2n,$$

亦即

$$n^2-5n=0,$$

因此有

$$n(n-5)=0.$$

由于 n 必须是正整数,因此答案仅仅是 $n=5$.换句话说,只有正五边形是对角线与边数相等的正多边形.

8.131 一个牌手从通常的一付52张的扑克牌发到一手牌(5张牌).求该牌手能发到一色黑桃(5张黑桃)的式样数目 m.

解 ☞ 从13张黑桃能发到5张黑桃有

$$\binom{13}{5}=\frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=1287$$

种式样.

8.132 解习题8.131.设该牌手能发到喜爱的一色黑桃(5张黑桃中有一张A牌).

解 ☞ 若发到黑桃A,则牌手发到剩下的12张黑桃中的4张有

$$m=\binom{12}{4}=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=495$$

种式样.

8.133 解习题8.131.设牌手发到一色牌(同一花色的5张牌).

解 ☞ 一付牌有四种花色,且从每一花色牌可有 $\binom{13}{5}$ 种方法得到一色牌.因此

$$m=4\cdot\binom{13}{5}=5148.$$

8.134 解习题 8.131. 设牌手发到一个喜爱的满座(3 张 A 和另外的一个对子).

解 ☞ 从 4 张 A 拿到 3 张 A 有 $\binom{4}{3}=\binom{4}{1}=4$ 种方法. 有 12 种方法选取一个对子, 且一个对子的两张牌可有 $\binom{4}{2}$ 种方法得到. 因此

$$m=4\cdot 12\cdot\binom{4}{2}=4\cdot 12\cdot\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}=288.$$

8.135 解习题 8.131. 假设牌手发到一个满座(一类即同点的 3 张和另外一对).

解 ☞ 可用 13 种方法选取一类, 且这一类的 3 张可按 $\binom{4}{3}$ 种方法发到. 另外的一类可用 12 种方法取得且该类的两张按 $\binom{4}{2}$ 种方法发到. 因此

$$m=13\cdot\binom{4}{3}\cdot 12\cdot\binom{4}{2}=3744.$$

8.136 解习题 8.131. 设牌手发到 3 张 A(没有 4 张 A 或另外的一个对子).

解 ☞ 3 张 A 可从 4 张 A 中按 $\binom{4}{3}$ 种方法选得. 其他两张牌从剩下的 12 类中按 $\binom{12}{2}$ 种方法选得, 并且在每一类中的一张牌可按四种方法发到. 这样, 一牌手能有

$$m=\binom{4}{3}\binom{12}{2}\cdot 4\cdot 4=4224$$

种方法发到 3 张 A 的一手牌.

8.137 解习题 8.131. 设牌手发到一类的 3 张牌(没有另外的对子).

解 ☞ 可按 13 种方法选取一类, 且该类的 3 张牌可按 $\binom{4}{3}$ 种方法发到. 其他两类可从剩下的 12 类中按 $\binom{12}{2}$ 种方法取得, 且每一类中的一张可按四种方法取得. 这样, 一个牌手能发到一类的 3 张牌的一手牌有

$$m=13\cdot\binom{4}{3}\binom{12}{2}\cdot 4\cdot 4=54912$$

种式样.

8.138 解习题 8.131. 设牌手发到两个对子.

解 ☞ 从 13 类中可用 $\binom{13}{2}$ 种方法选得两类(为拿到对子), 且每类的两张牌可按 $\binom{4}{2}$ 种方法取得. 其他类可按 11 种方法取得且该类的一张牌可有四种方法发到. 这样, 一牌手发到有两个对子的一手牌有

$$m=\binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\cdot 11\cdot 4=123552$$

种式样.

8.139 考虑 4 个元音字母(包含 A)和 8 个辅音字母(包含 B). 求由给定的字母形成的包含 2 个不同元音和 3 个辅音的五字母"单词"的数目 m.

解 ☞ 2 个元音可从 4 个元音字母按 $\binom{4}{2}$ 种方法选择, 3 个辅音可从 8 个辅音字母按 $\binom{8}{3}$ 种方法选择. 而且每 5 个字母可按 5! 种方法排在一行中(作为一个"单词"). 这样, 我们可组成

$$m=\binom{4}{2}\binom{8}{3}\cdot 5!=6\cdot 56\cdot 120=40320$$

个单词.

8.140 解习题 8.139. 设组成的单词必须有字母 B.

解 ☞ 2 个元音字母仍可按 $\binom{4}{2}$ 种方法选择. 但是, 由于 B 是辅音字母之一, 因此其他两个辅音字母可从 7 个辅音字母按 $\binom{7}{2}$ 种方法选择. 再说每 5 个字母可按 5! 种方法排在一行中. 因此

$$m=\binom{4}{2}\binom{7}{2}\cdot 5!=6\cdot 21\cdot 120=15120.$$

8.141 解习题 8.139. 设组成的单词必须以 B 开头.

解 ☞ 2 个元音字母可按 $\binom{4}{2}$ 种方法选择, 并且其他两个辅音字母可按 $\binom{7}{2}$ 种方法选择. 我们可

用 4! 种方法将 4 个字母安排在 B 之后.因此

$$m=\binom{4}{2}\binom{7}{2}\cdot 4!=6\cdot 21\cdot 24=3024.$$

8.142 解习题 8.139.设组成的单词必须以 A 开头.

解 ☞ 我们可以按三种方法选择另一个元音字母,并且用$\binom{8}{3}$种方法选择 3 个辅音字母.把 4 个字母排在 A 之后有 4! 种方法.因此

$$m=3\cdot\binom{8}{3}\cdot 4!=3\cdot 56\cdot 24=4032.$$

8.143 解习题 8.139.设组成的单词必须以 A 开头且包含 B.

解 ☞ 我们可以按三种方法选择另一个元音字母,并且 2 个辅音字母可用$\binom{7}{2}$种方法选择.将 4 个字母排在 A 之后有 4! 种方法.因此

$$m=3\cdot\binom{7}{2}\cdot 4!=3\cdot 21\cdot 24=1512.$$

8.144 英语字母表有 26 个字母,其中 5 个是元音字母.(因此 21 个字母是辅音.)求所有组成的单词都含 3 个辅音和 2 个元音的五字母单词的数目 m.

解 ☞ 3 个辅音字母可按$\binom{21}{3}$种方法选择,以及 2 个元音字母可按$\binom{5}{2}$种方法选择.而且,5 个字母可用 5! 种方法排成一行.因此有

$$m=\binom{21}{3}\binom{5}{2}\cdot 5!=1596000$$

个单词.

8.145 解习题 8.144.设组成的单词必须有字母 B.

解 ☞ 这里,剩下的两个辅音字母可用$\binom{20}{2}$种方法选择.因此

$$m=\binom{20}{2}\binom{5}{2}\cdot 5!=228000.$$

8.146 解习题 8.144.设组成的字母必须有字母 B 和 C.

解 ☞ 这里,可用 19 种方法选择第三个辅音字母.因此

$$m=19\cdot\binom{5}{2}\cdot 5!=22800.$$

8.147 解习题 8.144.设组成的字母必须以 B 开头和以 C 结尾.

解 ☞ 本题和习题 8.146 一样,只是现在仅仅中间 3 个字母可交换位置,即可用 3! 种方法安排它们.因此

$$m=19\cdot\binom{5}{2}\cdot 3!=1140.$$

8.148 解习题 8.144.设组成的单词必须包含字母 A 和 B.

解 ☞ 第二个元音字母可用四种方法选择,以及剩下的两个辅音字母可用$\binom{20}{2}$种方法选择.因此

$$m=4\cdot\binom{20}{2}\cdot 5!=91200.$$

8.149 解习题 8.144.设组成的单词必须以 A 开头和以 B 结尾.

解 ☞ 本题和习题 8.148 一样,只不过现在仅仅中间 3 个字母可交换位置,即可用 3! 种方法安排它们.因此

$$m=4\cdot\binom{20}{2}\cdot 3!=4456.$$

8.150 解习题 8.144.设组成的单词必须包含字母 A,B 和 C.

解 ☞ 有四种方法选择第二个元音字母和 19 种方法选第三个辅音字母.因此

$$m=4\cdot 19\cdot 5!=9100.$$

8.151　解习题 8.144. 设组成的单词必须包含字母 A, B, C, D 和 E.

解　☞ 没有其他可选择的字母, 因此

$$m = 5! = 120.$$

8.152　解习题 8.144. 设组成的单词必须包含字母 A, E 和 I.

解　☞ 由于一个单词只能有 2 个元音字母, 因此没有单词可包含 A, E 和 I, 故 $m = 0$.

8.153　求对角线的条数是边数 2 倍的正多边形.

解　☞ 有 n 条边的正多边形有 $(n^2-3n)/2$ 条对角线(习题 8.129). 令

$$(n^2-3n)/2 = 2n,$$

则有 $n^2-3n=4n$ 或 $n(n-7)=0$. 由于 n 必须是正整数, 因此只有一个答案是 $n=7$ 边形.

8.154　求对角线条数是边数的 3 倍的正多边形.

解　☞ 令

$$(n^2-3n)/2 = 3n,$$

则有 $n^2-3n=6n$ 或 $n(n-9)=0$. 因此所要求的正多边形是 9 边形.

8.155　求八边形的顶点形成的三角形的数目 m.

解　☞ 我们可以从八边形的 8 个顶点任意取 3 个顶点. 因此有

$$m = \binom{8}{3} = 56$$

个三角形.

8.156　解习题 8.155. 设八角形的边都不是三角形的边.

解　☞ 首先, 我们求只有八边形上一条边的三角形数目 n_1. 这条边可用 8 种方法选择. 这种三角形的剩下的一个顶点可用 8 − 4 种方法选择, 这是因为该顶点不能是已选的两个联接顶点之一或两个邻接的顶点之一. 因此 $n_1=8\cdot4=32$. 其次, 两条边在八边形上的三角形的数目 n_2 对应于选 3 个联接的顶点的方法数目, 这又对应于选取第一个顶点的方法数目. 因此 $n_2=8$. 故有

$$m = 56 - 32 - 8 = 16$$

个所要求的三角形.

8.157　求由一个正 n 边形(因而有 n 个顶点)的顶点能形成的三角形数目 m.

解　☞ 我们可选 n 个顶点的任意 3 个顶点形成一个三角形. 因此

$$m = \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

8.158　解习题 8.157. 设多边形的边都不是三角形的边.

解　☞ 如同习题 8.156, 有 $n(n-4)$ 个三角形具有多边形的一条边, 有 n 个三角形具有多边形的两条边. 因此

$$\begin{aligned} m &= n(n-1)(n-2)/6 - n(n-4) - n \\ &= n(n-5)(n-4)/6, \end{aligned}$$

且 $n>5$.

8.5　有序和无序划分

8.159　解释一个有限集合 S 的一个(种)有序划分和无序划分之间的区别, 并给出一个例子.

解　☞ S 的一个(种)**无序划分**只是 S 的不相交的(非空)子集(称为块)的一个集合 $[A_1, A_2, \cdots, A_k]$. 这些子集的并必须是 S. 若要考虑划分的块的次序, 则该划分是**有序的**. 例如, 两个集合

$$P_1 = [\{1,2\}, \{3,4,5\}, \{6,7\}]$$

和

$$P_2 = [\{6,7\}, \{3,4,5\}, \{1,2\}]$$

确定 $S=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ 的相同的划分. 但它们是各自有序的划分.

8.160 设一个盒子 B 装有编上 1 到 7 号的 7 颗弹子．从 B 首先抽取 2 颗弹子，然后抽取 3 颗弹子，最后抽取剩下的两颗弹子．求抽法种数 m．这就是说，求 7 颗弹子的集合拆成包含 2 颗弹子的块 A_1，包含 3 颗弹子的块 A_2 以及包含 2 颗弹子的块 A_3 的有序划分 $[A_1, A_2, A_3]$ 的数目 m．

解 ☞ 首先，在盒子 B 里有 7 颗弹子，因此有 $\binom{7}{2}$ 种抽取头 2 颗弹子，即确定 A_1 的方法．随后，在 B 里剩下 5 颗弹子，从而有 $\binom{5}{3}$ 种抽取 3 颗弹子，即确定 A_2 的方法．最后，在 B 里剩下 2 颗弹子，因而有 $\binom{2}{2}$ 种确定块 A_3 的方法．于是

$$m = \binom{7}{2}\binom{5}{3}\binom{2}{2} = \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{2\cdot 1}{1\cdot 2} = 210.$$

我们看到，

$$\binom{7}{2}\binom{5}{3}\binom{2}{2} = \frac{7!}{2!5!}\frac{5!}{3!2!}\frac{2!}{2!0!} = \frac{7!}{2!3!2!},$$

这是因为第一个因子后面的每个分子与前面因子的分母的第二项相抵消．

定理 8.8 设 S 包含 n 个元素，$n_1, n_2, \cdots, n_r$ 都是正整数且 $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$，则存在形式为 $[A_1, A_2, \cdots, A_r]S$ 的

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_r!}$$

个不同的有序划分，其中 A_1 含 n_1 个元素，A_2 含 n_2 个元素，……，A_r 含 n_r 个元素．

8.161 证明定理 8.8．

证 ☞ 我们有 $\binom{n}{n_1}$ 种确定块 A_1 的方法，又有 $\binom{n-n_1}{n_2}$ 种确定块 A_2 的方法，再有 $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ 种确定块 A_3 的方法，等等．因此 S 有

$$\begin{aligned}&\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n_r}{n_r}\\ &= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!}\cdots\frac{n_r!}{n_r!}\\ &= \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\cdots n_r!}\end{aligned}$$

个形式为 $[A_1, A_2, \cdots, A_r]$ 的划分．最后一个式子来自于上式中第一个因子之后的每个分子与前面的分母的第二项相抵消的结果，如习题 8.160．

8.162 有 9 个玩具分给 4 个孩子．设最小的孩子得到 3 个玩具，其他每个孩子得到 2 件玩具．求分配方案种数 m．

解 ☞ 我们欲求 9 个玩具分成分别有 3，2，2 和 2 个玩具的块的有序划分的数目 m．根据定理 8.8，

$$m = \frac{9!}{3!2!2!2!} = 2520.$$

8.163 一个班上有 12 名学生．12 名学生分组做 3 个不同的试验，假设 4 名学生做一个试验．求分法的种数．

解 ☞ **方法一** 我们求 12 名分成各有 4 名学生的块的有序划分的数目．根据定理 8.8，有

$$\frac{12!}{4!4!4!} = 34650$$

个这样的划分．

方法二 有 $\binom{12}{4}$ 种方法去选 4 名学生做第一个试验，接着有 $\binom{8}{4}$ 种方法去选 4 名学生做第二个试验．剩下的 4 名学生做第三个试验．因此合在一起有

$$\binom{12}{4}\binom{8}{4}=495\cdot 70=34650$$

种方法去选学生做这 3 个试验.

8.164　12 名学生分成三队 A_1, A_2 和 A_3 使每个队有 4 名学生.求这样的分法的种数 m.

解 ☞ **方法一**　注意到学生的每一划分(A_1, A_2, A_3)作为有序划分有 3! =6 种排列方法.由于(见习题 8.163)有$\frac{12!}{4!\ 4!\ 4!}=34650$个这样的有序划分.因此有 $m=34650/6=5775$ 个(无序)划分.

方法二　设 A 表示这些学生之一位,则有$\binom{11}{3}$种方法去选其他的 3 名学生到与 A 同一队中.现在设 B 表示不在 A 所在队的一名学生,则有$\binom{7}{3}$种方法从剩下的学生中选 3 名学生到与 B 同一队中.最后剩下的 4 名学生组成第三队.这样

$$m=\binom{11}{3}\binom{7}{3}=165\cdot 35=5775.$$

8.165　解习题 8.164.设学生分成分别有 5、4 和 3 名学生组成的 3 个队.

解 ☞ 由于所有的块含有不同的学生数,因此无序划分数等于有序划分数.故

$$m=\frac{12!}{5!4!3!}=46530.$$

8.166　求 9 个玩具能平分给 3 个孩子的分法种数 m.

解 ☞ 我们求 9 个玩具分成各有 3 个玩具的 3 块的有序划分数目.因此

$$m=\frac{9!}{3!3!3!}=1680.$$

8.167　求 9 名学生平分成 3 个队的分法种数 m.

解 ☞ 有序划分数$\frac{9!}{3!\ 3!\ 3!}=1680$被 3! =6 除得无序划分数 $m=1680/6=280$.

8.168　解习题 8.167.假设学生必须分成分别有 4,3 和 2 名学生的 3 个队.

解 ☞ 由于所有的块含有不同的学生数,因此无序划分数等于有序划分数

$$\frac{9!}{4!3!2!}=1260.$$

8.169　求 6 名学生能分成每队有 3 名学生的 2 个队的分法种数.

解 ☞ **方法一**　有$\frac{6!}{3!\ 3!}=20$种分成各有 3 名学生的 2 块的有序划分.由于无序划分确定 2! = 2 个有序划分,因此有 $20/2=10$ 个无序划分.

方法二　设 A 表示这些学生中的一位学生,则有$\binom{5}{2}=10$种方法去选其他 2 名学生到与 A 相同的队中.其余三名学生组成另一队.换句话说,有 10 种方法分配这些学生.

8.170　解习题 8.169.设学生必须分成各有 2 名学生的 3 个队.

解 ☞ 有$\frac{6!}{2!\ 2!\ 2!}=90$种有序划分,把这些学生分成各有 2 名学生的 3 块.由于每个无序划分确定 3! =6 个有序划分,因此有 $90/6=15$ 个无序划分.

8.171　一个有 10 名学生的班级 X 分成 4 个队 A_1, A_2, B_1 和 B_2,此处 A_1 和 A_2 各有 2 名学生,B_1 和 B_2 各有 3 名学生.求分法种数 m.

解 ☞ X 有

$$\frac{10!}{2!2!3!3!}=25200$$

种有序划分,把 X 分成 4 个分别有 2,3,3 和 3 名学生的块.但是,X 的每一个无序划分$[A_1, A_2, B_1, B_2]$确定 X 的 2! 2! =4 个有序划分.因此

$$m=25200/4=6300.$$

8.172　求一个有 10 个元素的集合 X 可分成 2 块的划分种数 m.

解 ☞ **方法一**　X 的每个子集 A 把 X 分成两个不相交的集合 A 和 A^c,其中 A^c 是 A 的补集

合.X 有 $2^{10}=1024$ 种这样的分法.但是,我们不能包含 $A=\varnothing$ 或 $A=X$,因一个划分由一些非空集合组合.因此 X 的有序划分$[A,A^c]$有 $1024-2=1022$ 个.每一个无序划分确定两个有序划分.因此 $m=1022/2=511$.

方法二　设 x 表示X 的一个元素.现在 $X\setminus\{x\}$有 9 个元素,因此有 $2^9=512$ 种方法选取$X\setminus\{x\}$的子集与 x 同在的块中.换句话说,包括$[X,\varnothing]$在内有 512 个这样的划分.因此把 X 分成两个不相交的非空块的划分有 $m=512-1=511$ 种.

8.173　求 n 个学生可分成两个队的分法种数 m,此处每一个队至少有一名学生.

解　☞ 设 x 表示这些学生中的一个学生,则有 2^{n-1}种选择剩下的 $n-1$ 个学生的一个子集的方法.但是,所有剩下的学生不能都和 x 同在一个队中.因此 $m=2^{n-1}-1$.(同习题 8.172 的方法二比较.)

8.174　求 14 人可分成 6 个委员会的分法种数 m,此处两个委员会各有 3 个人,其余四个委员会各有 2 个人.

解　☞ 每个无序划分规定 2! 4! 个有序划分.因此

$$m=\frac{14!}{3!3!2!2!2!2!}\frac{1}{2!4!}=3153150.$$

8.175　假设一块可以是空的,求一个有 3 个元素的集合可分成:(a)3 个有序块,(b)3 个无序块的分法种数 m.

解　☞ (a)3 个元素的每一个元素都可放到 3 块的任一块中,因此

$$m=3^3=27.$$

(b)3 块中的元素数目可以是如下:[3,0,0],[2,1,0]或[1,1,1].因此

$$m=\binom{3}{3}+\binom{3}{1}+1=1+3+1=5.$$

8.176　解习题 8.175.设集合有 4 个元素.

解　☞ (a)4 个元素的每一个都可放到三块的任一块中,因此

$$m=3^4=81.$$

(b)3 块的元素数目可以是如下:[4,0,0],[3,1,0],[2,2,0]或[2,1,1],因此

$$m=\binom{4}{4}+\binom{4}{1}+\frac{1}{2}\binom{4}{2}+\binom{4}{2}=1+4+3+6=14.$$

8.177　在玩桥牌游戏中有 4 个牌手,称为北方,南方,东方和西方.每个牌手发到 13 张牌并且这些牌的分布称为一个桥手.求可能的桥手的数目 m.(用阶乘表示.)

解　☞ 我们求 52 张牌分成各有 13 张的 4 块的有序划分数目 m.因此

$$m=\frac{52!}{13!13!13!13!}.$$

8.178　解习题 8.177.设一牌手发到 4 张 A.

解　☞ 4 张 A 有四种方法分布.因此剩下的 48 张牌分到有序块中,分别得到 9,13,13 和 13 张牌.于是

$$m=4\frac{48!}{9!13!13!13!}.$$

8.179　解习题 8.177.设每个牌手发到一张 A.

解　☞ 4 张 A 有 4! 种方法分布.因此剩下的 48 张牌分到有序块中,每块得到 12 张牌.于是

$$m=4!\frac{48!}{12!12!12!12!}.$$

8.180　解习题 8.177.设北方发到 8 张黑桃和南方发到其余 5 张黑桃.

解　☞ 北方有$\binom{13}{8}$种方法选择 8 张黑桃并且剩下的 5 张黑桃发到南方.因此,剩下的 39 张牌分到有序块中.它们分别得到 5,8,13 和 13 张牌.于是

$$m=\binom{13}{8}\frac{39!}{5!8!13!13!}.$$

8.181　解习题 8.177. 设一个牌手发到全部 13 张黑桃.

解　☞ 有四种方法分布 13 张黑桃，因此剩下的 39 张牌分到 3 块中，它们各得 13 张牌. 于是

$$m = 4\frac{39!}{13!\,13!\,13!}.$$

8.182　解习题 8.177. 设北方和南方合在一起有全部 4 张 A.

解　☞ A 的分配有三种情形. 首先，北方或南方有全部 4 张 A 并且这可按两种方式出现. 其次，北方或南方只有一张 A 并且这可按 2·4 种方式出现. 最后每人有 2 张 A 并且这可能按 $_4C_2 = 6$ 种方式出现. 于是

$$m = 2\frac{48!}{9!\,13!\,13!\,13!} + 2\cdot 4\frac{48!}{10!\,12!\,13!\,13!} + 6\frac{48!}{11!\,11!\,13!\,13!}$$
$$= 2300\frac{48!}{11!\,13!\,13!\,13!}.$$

8.6　树图

一个(有根)树图对于计算一系列事件的逻辑可能性是有用的手段，这里每一事件可按有限种方式出现.

8.183　求积集 $A\times B\times C$，其中 $A=\{1,2\}$，$B=\{a,b,c\}$ 和 $C=\{3,4\}$.

解　☞ 构造合适的树图如图 8-3 所示. 注意树是从左到右构造的，并且在每一点的分枝的数目对应于下一事件能出现的方式的数目. 有 12 个末端点对应于 $A\times B\times C$ 中的 12 个元素. 具体地，从树的起点到末端点的每一条通路都标出 $A\times B\times C$ 的一个元素，这些元素列在树的右端. 即

$$A\times B\times C = \{(1,a,3),(1,a,4),(1,b,3),(1,b,4),$$
$$(1,c,3),(1,c,4),(2,a,3),(2,a,4),$$
$$(2,b,3),(2,b,4),(2,c,3),(2,c,4)\}.$$

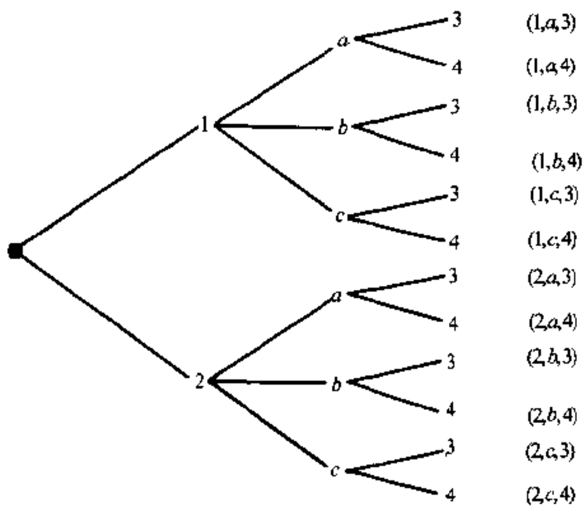


图 8-3

8.184　某人有时间去玩轮盘赌最多 5 次. 每一次玩，他赢或输一美元. 此人开始有一美元，并且在玩 5 次之前若输掉他的所有钱，或赢 3 美元即他有 4 美元，则停止玩. (a)求他在玩中可能出现的方式种数；(b)确定他在 5 次之前停止赌注的次数.

解　☞ (a)构造合适的树图，如图 8-4 所示. 有 11 个末端点，因此这种赌注可出现 11 种不同的方式.

(b)如图 8-4 所示，在 5 次之前停止赌注只有三种方式.

8.185　求 $\{a,b,c\}$ 的排列.

解　☞ 定理 8.7 告诉我们有 3! = 6 种这样的排列. 然而，可以构造合适的树图找到这 6 个排列，

如图 8-5 所示. 6 个排列列在图的右边.

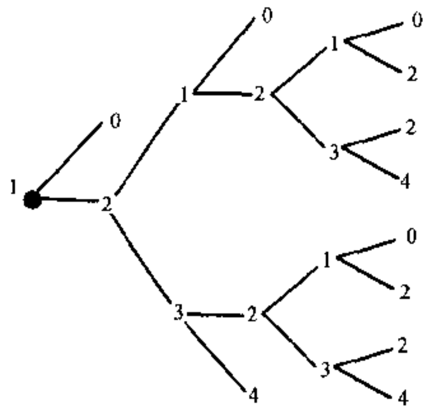


图 8-4

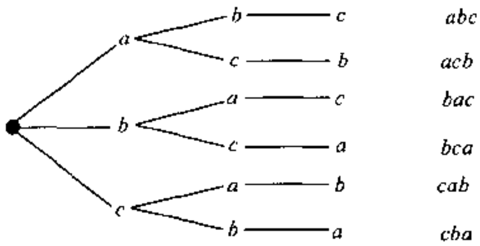


图 8-5

8.186 A 和 B 两队打一场篮球赛. 首先胜三局的队为这场比赛的优胜者. 求这场比赛可能出现的结局数目.

解 ☞ 构造合适的树图, 如图 8-6 所示. 这场比赛可能出现 20 种结局:

AAA, AABA, AABBA, AABBB, ABAA, ABABA, ABABB,
ABBAA, ABBAB, ABBB, BAAA, BAABA, BAABB, BABAA,
BABAB, BABB, BBAAA, BBAAB, BBAB, BBB.

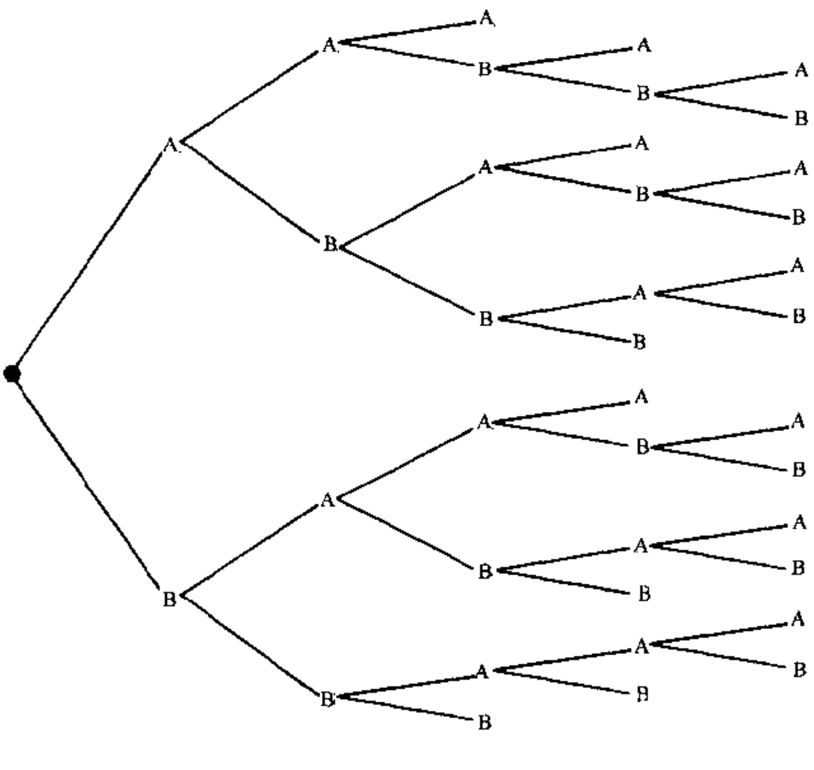


图 8-6

8.187 构造合适的树图, 求积集 $\{1,2,3\}\times\{2,4\}\times\{2,3,4\}$.

解 ☞ 所要求的树图如图 8-7 所示. 在积集中有 $n=3\cdot2\cdot3=18$ 个元素列在树图的右边.

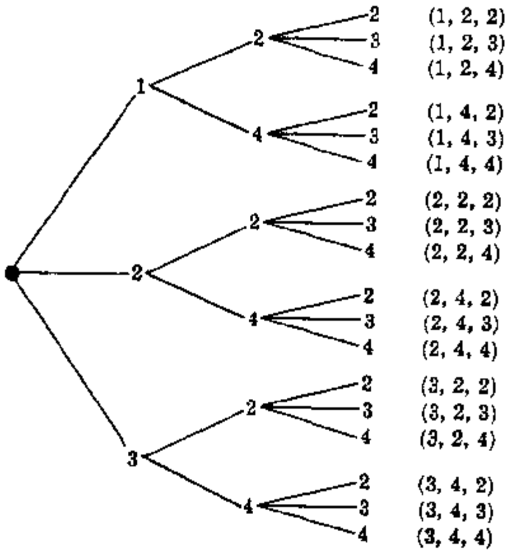


图 8-7

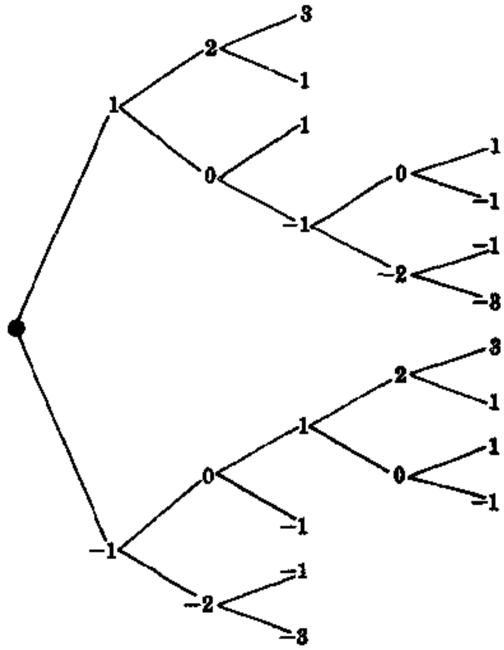


图 8-8

8.188　一妇女在 x 轴的原点，并且行走，或是到左或是到右．取一个单位步长．如果她到达 3 或 −3，或者如果第二次到达任一位置但不是原点，她便停下来．求该妇女能行走的不同路径的条数．

解　☞ 构造合适的树图，如图 8-8 所示．有 14 条不同的路径，每条路径对应树图的一个末端点．

8.189　A 和 B 两队参加世界系列棒球赛．这里先胜四局的队获这个系列赛的优胜者．求该系列赛中在 A 胜第一局，并且第二局取胜的队第四局也取胜的情形可能出现的结局种数．

解　☞ 构造合适的树图，如图 8-9 所示．注意在第四局中的胜者只能是第二局的获胜者．并且，树以第一局的胜者 A 开始．该图表明这个系列赛可能出现的下面 15 种结局：

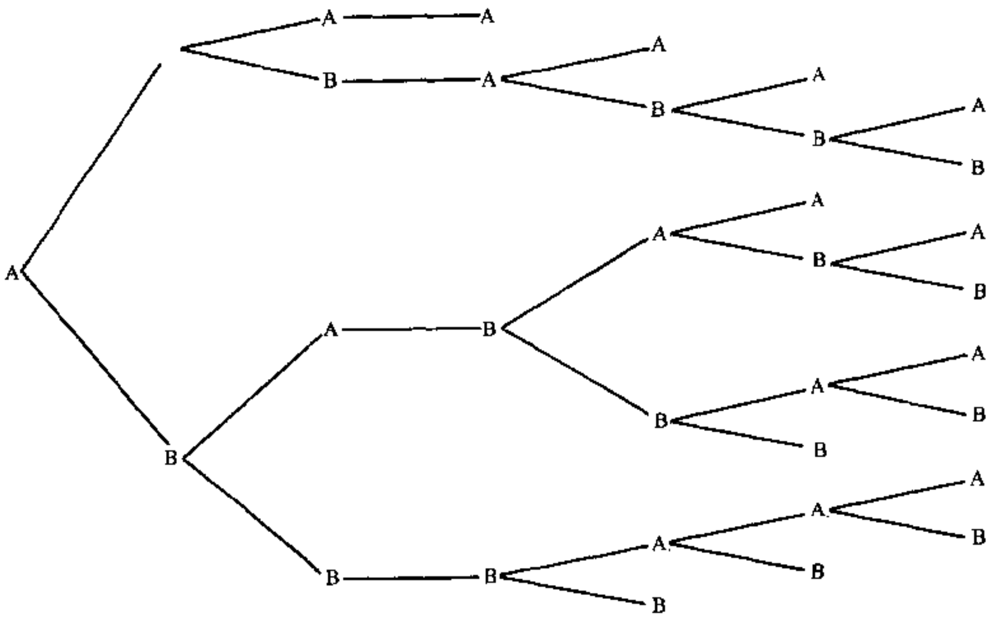


图 8-9

AAAA, AABAA, AABABA, AABABBA, AABABBB,
ABABAA, ABABABA, ABABABB, ABABBAA, ABABBAB,
ABABBB, ABBBAAA, ABBBAAB, ABBBAB, ABBBB.

8.190 设图8-10中，$A, B, \cdots, F$ 表示岛，且连接它们的直线表示桥. 一个人从 A 开始步行一个岛到另一个岛. 当他即将要二次经过相同的一座桥时，则不能继续行走而停下来吃午餐. (a)求他能够取吃午餐之前可行走的路线的条数. (b)他能够在哪些岛吃他的午餐?

解 ☞ (a)构造恰当的树图，如图8-11所示. 他有11条路可走.

(b)只有 B, D 或 E 出现在末端点. 因此，他必须在 B, D 或是 E 吃午餐.

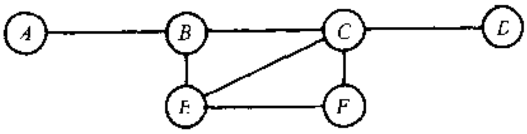


图 8-10

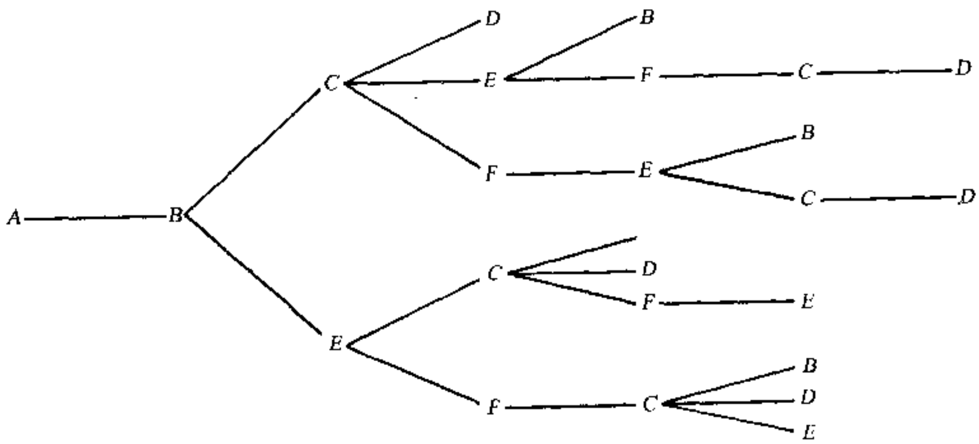
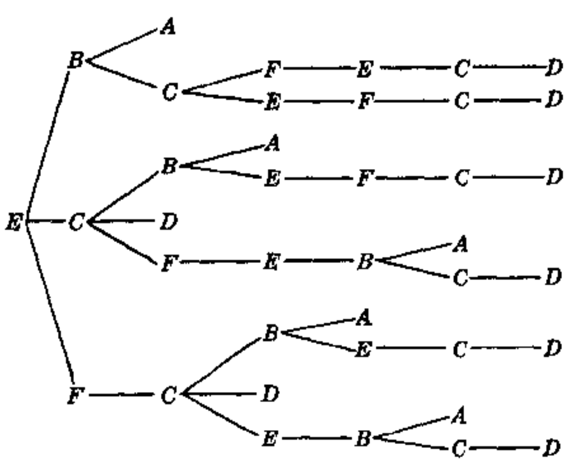


图 8-11

8.191 解习题8.190. 设此人从岛 E 出发.

解 ☞ (a)构造恰当的树图，如图8-12所示. 他有13条路可走.

(b)只有 A 和 D 出现在树图的末端点. 因此，他必须在 A 或 D 吃午餐.



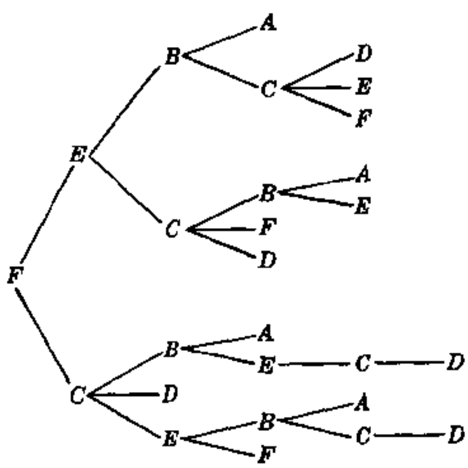


图 8-12　　图 8-13

8.192　解习题 8.190. 设此人从岛 F 出发.

解　☞ (a)构造恰当的树图, 如图 8-13 所示. 他有 14 条道可走.

(b)如图 8-13 所示, 此人必须在 A, D, E 或 F 吃午餐.

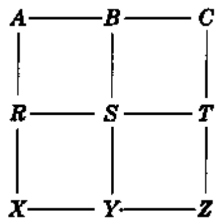


图 8-14

8.193　图 8-14 中有 9 个点 A, B, C, R, S, T, X, Y 和 Z. 假设一妇女从 X 出发并且允许横或竖一次移动一步. 当她即将要第二次到达走过的点时, 就不能继续行走而停下. 设她第一次从 X 移动到 R. (a)求她可走的路的条数 m; (b)求能走过所有 9 个点的路线条数.

解　☞ (a)构造合适的树图, 如图 8-15 所示. 这样 $m=10$. (b)图 8-15 表明 4 条覆盖所有 9 个点的路线.

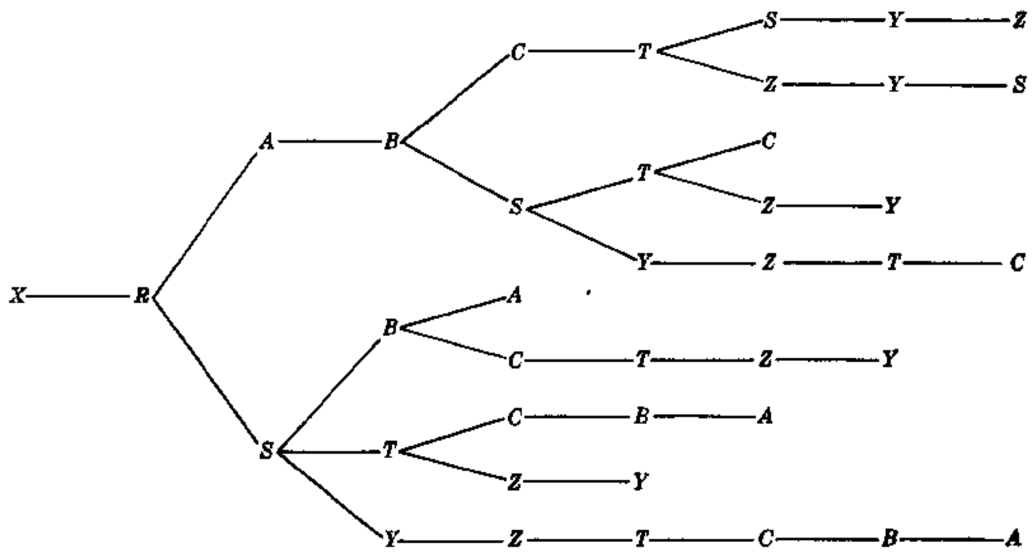


图 8-15

8.194　解习题 8.193. 设该妇女从 Y 出发并且首先到 S.

解　☞ (a)构造合适的树图, 如图 8-16 所示. 这样, $m=6$.

(b)图 8-16 表明, 没有覆盖所有 9 个点的路线.

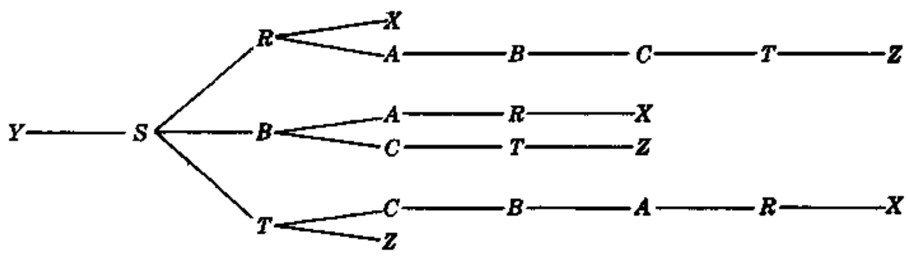


图 8-16

8.195　解习题 8.193. 设该妇女从 Y 出发并且首先到 Z.

解　☞ (a)构造合适的树图, 如图 8-17 所示. 于是, $m=8$.

(b)图 8-17 表明, 没有覆盖所有 9 个点的路线.

8.196　解习题 8.193. 设该妇女从任一点但非中点 S 出发.

解　☞ (a)我们利用习题 8.193～8.195 的结果和对称性. 若该妇女从 X 出发, 则有 20 条路线, 这

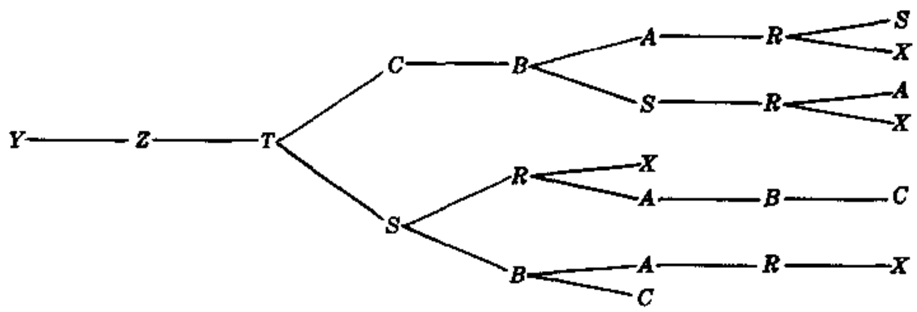


图 8-17

就是说,她若从 X 出发首先到 R,则有 10 条路线;由对称性,她从 X 出发先到 Y 又有另外的 10 条路线.该妇女从 Y 出发有 22 条路线,即她若从 Y 出发先到 S,则有 6 条路线;若她从 Y 出发先到 Z 有 8 条路线,以及由对称性,从 Y 出发先到 X 有另外的 8 条路线.同理,由对称性,她若从 A,C 或 Z 出发则有 20 条路线,以及她若从 B,R 或 T 出发则有 22 条路线.因此,合在一起,$m=4\cdot20+4\cdot22=164$.

(b)若该妇女从 X 出发,则有 $2\cdot4=8$ 条覆盖所有 9 个点的路线,若她从 Y 出发,则没有覆盖所有 9 个点的路线.这样,合在一起有 $4\cdot8=32$ 条覆盖所有 9 个点的路线.

8.197　一妇女有时间去玩轮盘赌最多 5 次.她每次赢或输 1 美元.该妇女开始有 2 美元,若她在 5 次之前输掉所有钱,或者赢 3 美元即她有 5 美元,则停止玩.(a)求这样玩可能出现的方式种数;(b)她输掉所有钱的方式种数是多少?

解　☞ (a)构造合适的树图,如图 8-18 所示.因此这样的赌注只可能出现 20 种方式.

(b)如图 8-18 所示,该妇女输掉所有钱只有三种方式.

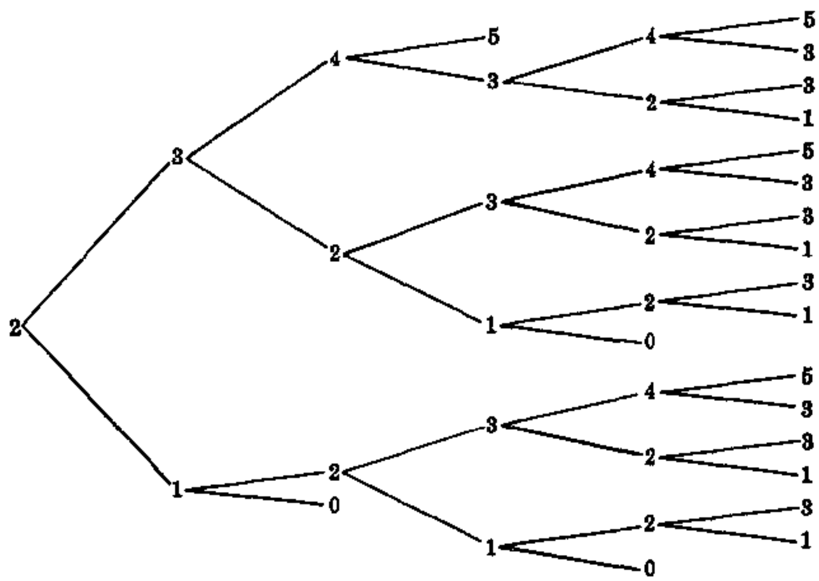


图 8-18

8.198　一个人在 x 轴的原点或是往左或是往右行走.取一单位步长,他在 5 步之后若到 3 或若到 -2 则停下来.求此人能行走的路径的条数 m.

解　☞ 此问题的树图和图 8-18(习题 8.197)相同,只是现在我们必须以 $n-2$ 替代每一个数 n.这样 $m=20$.

8.199　A 和 B 两个队参加棒球世界系列赛,先胜四局的队获得系列赛的优胜者.若第一局获胜的队第三局也获胜,第二局获胜的队第四局也获胜.求系列赛出现的方式种数.

解　☞ 构造恰当的树图,如图 8-19 所示.这样,系列赛出现的方式可能有 14 种.

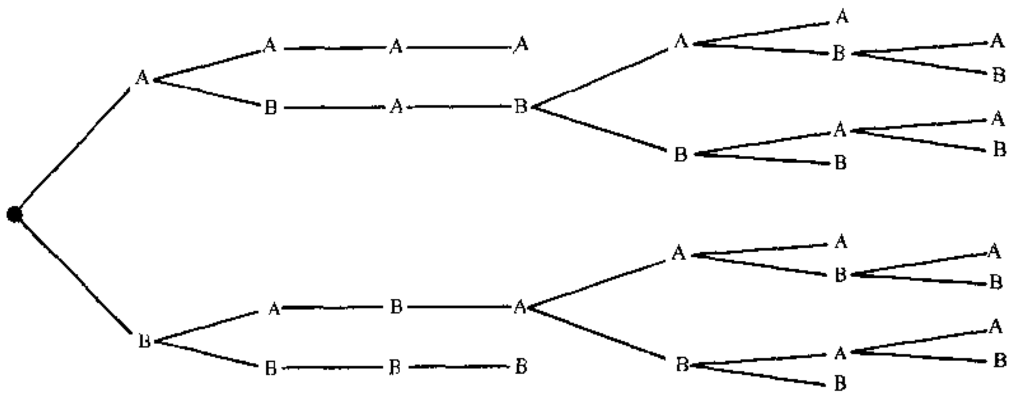


图 8-19

第九章　代数系统

9.1　运算和半群

一个非空集合 S 上的一个(二元)**运算**是从 $S\times S$ 到 S 的一个函数 $*$，在此情况下，我们记作 $a*b$，或简单地 ab 替代 $*(a,b)$. 若 S 是一个有限集合，则此运算可用其运算表给出，此处在标注 a 的行和标注 b 的列的元素是 $a*b$. 设 A 是 S 的一个子集. 若对 A 的任意元素 a 和 b，都有 $a*b$ 属于 A，则称 A 关于运算 $*$ 是**封闭的**.

9.1　设 $A=\{0,1\}$. 关于(a)乘法，(b)加法，A 是封闭的吗？

解 ☞ (a) 计算每个可能的积：

$$0\cdot 0=0,\quad 0\cdot 1=0,\quad 1\cdot 0=0,\quad 1\cdot 1=1.$$

每个积都属于 A，因此 A 关于乘法是封闭的.

(b) 不是封闭的. 因 $1+1=2$ 不属于 A

9.2　设 $B=\{1,2\}$. 关于(a)乘法，(b)加法，B 是否封闭？

解 ☞ (a) 否. 因 $2\cdot 2=4$ 不属于 B.

(b) 否. 因 $1+2=3$ 不属于 B.

9.3　设 $C=\{1,3,5,\cdots\}=\{n:n$ 是奇数$\}$. 关于(a)乘法，(b)加法，C 是否封闭？

解 ☞ (a) 奇整数的积是奇的，因此 C 关于乘法是封闭的.

(b) 否. 因 $3+5=8$ 不属于 C.

9.4　设 $D=\{2,4,\cdots\}=\{n:n$ 是偶数$\}$. 关于(a)乘法，(b)加法，D 是否封闭？

解 ☞ (a) 是. 因偶整数的积是偶数.

(b) 是. 因偶整数的和是偶数.

9.5　设 $F=\{2,4,8,\cdots\}=\{x:x=2^n,n\in\mathbf{N}\}$. 关于(a)乘法，(b)加法，$F$ 是否封闭？

解 ☞ (a) 由于 $2^r\cdot 2^s=2^{r+s}$，因此 F 关于乘法运算是封闭的.

(b) 否. 因 $2+4=6$ 不属于 F.

9.6　定义一个结合运算.

解 ☞ 设 $*$ 是集合 S 上的一个运算. 若对 S 的任何元素 a,b,c，我们有

$$(a*b)*c=a*(b*c),$$

则说运算 $*$ 是**结合的**(或满足**结合律**).

9.7　考察整数集 $\mathbf{Z}=\{\cdots,-1,0,1,2,\cdots\}$. 判定 $\mathbf{Z}$ 上的下列运算是否是结合的：(a)加法，(b)减法，(c)乘法.

解 ☞ (a) 是. 因对于任意的整数 a,b 和 c，都有 $(a+b)+c=a+(b+c)$.

(b) 否. 例如，$(12-6)-2=6-2=4$，但 $12-(6-2)=12-4=8$，因而 $(12-6)-2\neq 12-(6-2)$.

(c) 是，因对于任意的整数 a,b 和 c，都有 $(ab)c=a(bc)$.

9.8　判定整数集 $\mathbf{Z}$ 上的下列运算是否是结合的：(a)除法，(b)取幂.

解 ☞ (a) 在 $\mathbf{Z}$ 上除法不是一个(完全的)运算，例如，$7/3$ 和 $-4/5$(作为 $\mathbf{Z}$ 的元素)没有定义. 而且即使除法有定义，它不是结合的，例如，$(12/6)/2=2/2=1$，但 $12/(6/2)=12/3=4$.

(b) 否. 例如，若记 $a\circ b=a^b$，则

$$(2\circ 2)\circ 3=(2^2)^3=4^3=64,$$

但

$$2\circ(2\circ 3)=2^{2^3}=2^8=256,$$

因此$(2\circ 2)\circ 3\neq 2\circ(2\circ 3)$.

9.9 假设一集合 S 上的一个运算 $*$ 不是结合的.形成 4 个元素的积能有多少种方法?

解 ☞ 有 5 个方法插入括号:$((ab)c)d$,$(ab)(cd)$,$(a(bc))d$,$a((bc)d)$和 $a(b(cd))$.

定理 9.1 设 $*$ 是一个集合 S 上的一个结合的运算,则任一个积 $a_1 * a_2 * \cdots * a_n$ 无须加括号,即所有可能的积都是相等的.

9.10 证明定理 9.1.

解 ☞ 对 n 用归纳法证明.由于 $*$ 是结合的,定理对 $n=1,2,3$ 成立.设 $n\geqslant 4$,我们使用记号

$$(a_1a_2\cdots a_n)=(\cdots((a_1a_2)a_3)\cdots)a_n$$

以及

$$[a_1a_2\cdots a_n]=\text{任一个积}.$$

我们证明$[a_1a_2\cdots a_n]=(a_1a_2\cdots a_n)$,从而所有这样的积将是相等的.由于$[a_1a_2\cdots a_n]$表示某一个积,因此存在 $r<n$ 使得

$$[a_1a_2\cdots a_n]=[a_1a_2\cdots a_r][a_{r+1}\cdots a_n].$$

于是,由归纳法

$$\begin{aligned}[a_1a_2\cdots a_n]&=[a_1a_2\cdots a_r][a_{r+1}\cdots a_n]=[a_1a_2\cdots a_r](a_{r+1}\cdots a_n)\\&=[a_1a_2\cdots a_r]((a_{r+1}\cdots a_{n-1})a_n)=([a_1\cdots a_r](a_{r+1}\cdots a_{n-1}))a_n\\&=[a_1\cdots a_{n-1}]a_n=(a_1\cdots a_{n-1})a_n=(a_1a_2\cdots a_n).\end{aligned}$$

定理得证.

9.11 定义一个集合 S 上的运算 $*$ 的一个单位元素.

解 ☞ 设 S 的一个元素 e 使得对 S 中的任一元素 a 都有 $a*e=e*a=a$,则 e 称为一个**单位元(素)**.更一般地,若对 S 的任一元素 a 都有 $a*e=a$,则 e 称**右单位元(素)**;若对 S 的任一元素 a 都有 $e*a=a$,则 e 称为**左单位元(素)**.

9.12 假设 e 是一个运算的左单位元和 f 是右单位元.证明 $e=f$.

证 ☞ 这个证明很简单.由于 e 是左单位元,因此 $ef=f$;又由于 f 是右单位元,因此 $ef=e$.故 $e=f$.特别,这个结果告诉我们,单位元素是惟一的,并且若一个运算有多于一个左单位元则它没有右单位元,反之亦然.

9.13 设一集合 S 上的运算 $*$ 有一个单位元 e,定义 S 的一个元素 a 的逆(元素).

解 ☞ a 的**逆(元素)**通常记作 a^{-1},它是具有性质

$$a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$$

的元素.

9.14 定义:(a)半群,(b)单元半群.

解 ☞ (a) 一个集合 S 和一个结合的运算 $*$ 一起称为一个**半群**.我们用$(S,*)$表示半群,或者省去运算时,简单地用 S 来表示它.

(b) 一个集合 M 和具有单位元 e 的结合的运算 $*$ 一起称为一个**单元半群**.换句话说,有单位元的半群是一个单元半群.(有些作者定义一个半群包含一个单位元素.)

9.15 设 S 是具有单位元 e 的半群,b 和 b' 是 S 的一个元素 a 的逆.证明 $b=b'$,即若逆存在则是惟一的.我们注意,若运算是非结合的,则此结果未必正确.

证 ☞ 我们有

$$b*(a*b')=b*e=b$$

以及

$$(b*a)*b'=e*b'=b'.$$

由于 S 是结合的,因此$(b*a)*b'=b*(a*b')$,从而 $b=b'$.

9.16 定义一个集合 S 上的运算 $*$ 的左和右消去律.

解 ☞ S 上的运算 $*$ 满足**左消去律**是指若 $a*b=a*c$,则有 $b=c$;满足**右消去律**是指若 $b*a$

$=c*a$,则有 $b=c$.

9.17 定义一个可交换的运算.

解 ☞ 设 $*$ 是集合 S 上的一个运算.若对 S 的任何 a,b 都是 $a*b=b*a$,则称运算 $*$ 是**交换的**(或满足**交换律**).

9.18 考察正整数集 **N**.设 $*$ 是 **N** 上的最小公倍(l.c.m)运算.

(a) 求 $4*6,3*5,9*18$ 和 $1*6$;

(b) $(\mathbf{N},*)$是半群吗?它是交换的吗?

(c) 求 $*$ 的单位元素.

解 ☞ (a)由于 $x*y$ 表示 x 和 y 的最小公倍数,因此我们有

$$4*6=12,\quad 3*5=15,\quad 9*18=18,\quad 1*6=6.$$

(b) 在数论中证明了$(a*b)*c=a*(b*c)$,即 l.c.m 运算是结合的,并且 $a*b=b*a$,即 l.c.m 运算是交换的,因此$(\mathbf{N},*)$是一个交换半群.

(c) 整数 1 是单位元素,因 1 和任一正整数 a 的最小公倍数是a,即对任一 $a\in\mathbf{N}$,都有

$$1*a=a*1=a.$$

9.19 习题 9.18 中的哪些元素有逆,且若有逆则其逆是什么?

解 ☞ 由于 $\text{l.c.m}(a,b)=1$ 当且仅当 $a=1$ 且 $b=1$,因此只有一个元素 1 有逆且其逆是它本身.

9.20 考察有理数集 **Q**.设 $*$ 是 **Q** 上的一个运算,定义为

$$a*b=a+b-ab. \tag{1}$$

(a) 求 $3*4,2*(-5)$和 $7*1/2$;

(b) $(\mathbf{Q},*)$是半群?它是交换的吗?

(c) 求 $*$ 的单位元素.

解 ☞ (a) 应用(1),我们有

$$\begin{aligned}
&3*4=3+4-3\cdot4=3+4-12=-5,\\
&2*(-5)=2+(-5)-2(-5)=2-5+10=7,\\
&7*1/2=7+1/2-7(1/2)=4.
\end{aligned}$$

(b) 判定 $*$ 是否是结合的:

$$\begin{aligned}
(a*b)*c&=(a+b-ab)*c\\
&=(a+b-ab)+c-(a+b-ab)c\\
&=a+b-ab+c-ac-bc+abc\\
&=a+b+c-ab-ac-bc+abc,\\
a*(b*c)&=a*(b+c-bc)\\
&=a+(b+c-bc)-a(b+c-bc)\\
&=a+b+c-bc-ab-ac+abc.
\end{aligned}$$

因此 $*$ 是结合的,且$(\mathbf{Q},*)$是一个半群.并且

$$a*b=a+b-ab=b+a-ba=b*a,$$

因此$(\mathbf{Q},*)$是一个交换半群.

(c) 若对每一 $a\in\mathbf{Q}$,有 $a*e=a$,则 e 是一个单位元素.现作如下计算:

$$a*e=a,\quad a+e-ae=a,\quad e-ea=0,\quad e(1-a)=0,\quad e=0.$$

因此,0 是单位元素.

9.21 习题 9.20 中哪些元素有逆,且若有逆,则其逆是什么?

解 ☞ 由习题 9.20(c)知,0 是单位元.为了确定 a 有逆 x,则必须有 $a*x=0$.现作如下计算:

$$a*x=0,\quad a+x-ax=0,\quad a=ax-x,\quad a=x(a-1),\quad x=a/(a-1).$$

因此,若 $a\neq1$,则 a 有一个逆且其逆是$a/(a-1)$.

9.22 设 S 是具有运算$a*b=a$ 的一个非空集合,这个运算(a)是结合的吗?(b)是交换的吗?

解 ☞ (a) 是.事实上,

$$(a*b)*c=a*c=a$$

且

$$a*(b*c)=a*b=a.$$

(b) 若 S 有多于一个元素,则 $*$ 不是交换的.具体地说,对于 $a\neq b$,我们有 $a*b=a$,但 $b*a=b$,因此 $a*b\neq b*a$.

9.23 证明习题 9.22 中右消去律成立.左消去律是否成立?

证 ☞ 设 $a*c=b*c$.我们有 $a*c=a$, $b*c=b$.因此 $a=b$.这样,右消去律成立.左消去律不成立.例如,设 $b\neq c$,那么 $a*b=a*c=a$,但 $b\neq c$.

9.24 设 S 是一个符号的集合.定义 S 上的自由半群.

解 ☞ S 上的一个单词是其元素的一个有限序列.例如,$U=ababb$ 和 $V=accba$ 是 $S=\{a,b,c\}$ 上的单词.讨论 S 上的单词时,我们常常称 S 是**字母表**且其元素称为**字母**.为方便起见,空序列用 ϵ 或 1 表示.我们也认为它是 S 上的一个单词.我们还将 aa 缩写为 a^2, aaa 缩写为 a^3,等等.S 上的所有单词的集合通常用 S^* 表示.

现在考虑 S 上两个单词 U 和 V.我们可以形成单词 UV,它是把 V 的字母写在 U 的字母之后得到的.例如,设 U 和 V 是上面的单词,则

$$UV=ababbaccba=abab^2ac^2a.$$

这个运算称为**毗连**.显然这个运算是结合的,因此,S 上单词的集合关于毗连运算是一个半群.这个半群称为 S 上的自由半群(或由 S 生成的).显然,空单词 ϵ 是这个半群的一个单位元素,并且该半群同时满足左和右消去律.

9.2 群和子群

9.25 定义一个群.

解 ☞ 设 G 是具有一个二元运算(用毗连表示)的非空集合.若下列公理成立:

[G_1] 结合律,即对 G 的任何元素 a,b,c,恒有

$$(ab)c=a(bc);$$

[G_2] 有单位元素,即 G 中存在一个元素 e,使得对 G 的任意元素 a,有

$$ae=ea=a;$$

[G_3] 可逆,即对 G 的每一个 a,都存在 G 的一个元素 a^{-1}(a 的逆)使得

$$aa^{-1}=a^{-1}a=e,$$

则 G 称为一个群.([G_2]和[G_3]使一个半群成为一个群.)

9.26 定义一个阿贝尔(Abel)群.

解 ☞ 设 G 是一个群.若交换律成立,即若对于任何 $a,b\in G$,都有 $ab=ba$,则 G 称为**阿贝尔(Abel)群**(或**交换群**).

当二元运算用上面的毗连来表示时,则说群 G 是用乘法写的.当 G 是阿贝尔群时,二元运算通常用 + 表示,并且说 G 是用加法写的.在此情况下,单位元素用 0 表示且称它是**零元素**,以及 a 的逆用 $-a$ 表示且称它是 a 的**负元素**.若 A 和 B 是 G 的子集,我们则记

$$AB=\{ab:a\in A,b\in B\},$$

或

$$A+B=\{a+b:a\in A,b\in B\}.$$

9.27 定义:(a) 群的阶,(b) 有限群.

解 ☞ (a) 一个群 G 中元素的数目,用 $|G|$ 表示,称为 G 的**阶**.

(b) 若群 G 的阶是有限的,则 G 是一个**有限群**.

9.28 关于加法运算,**N**,**Z**,**Q**,**R**,**C** 中哪些是群?

解 ☞ 关于加法运算,整数集 **Z**,有理数集 **Q**,实数集 **R** 和复数集 **C** 中每一个都是一个(阿贝尔)

群. 正整数集 **N** 关于加法运算不能形成一个群, 例如 $0 \notin \mathbf{N}$.

9.29 非零有理数集合 $\mathbf{Q}\setminus\{0\}$ 关于乘法运算形成一个阿贝尔群. 单位元素是什么以及逆是什么?

解 ☞ 有理数 1 是单位元素, 以及 q/p 是有理数 p/q 的乘法的逆.

9.30 设 S 表示 $n\times n$ 矩阵的集合, 矩阵的元素均为有理数. 关于矩阵乘法运算 S 是一个群?

解 ☞ 不是. 虽然矩阵乘法满足结合律, 并且矩阵乘法有一个单位元素 I(单位阵), 但因 $n\times n$ 矩阵不总是存在逆, 因此 S 不是一个群.

9.31 $n\times n$ 非奇异矩阵的集合 G 关于矩阵乘法运算形成一个群. 单位元素是什么以及逆是什么?

解 ☞ 单位元素是单位阵 I, 以及 A 的逆是其逆阵 A^{-1}. 这是一个非阿贝尔群的例子, 因矩阵乘法不可交换. 特别地, 当 $n=2$ 时, 我们有

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

并且

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

的逆是

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}d/|A|&-b/|A|\\-c/|A|&a/|A|\end{pmatrix},$$

其中 $|A|=ad-bc$ 是 A 的行列式.

9.32 定义 n 阶的对称群, 用 S_n 表示.

解 ☞ 集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 到它自身上的一个一对一映射 σ 称为一个**置换**, 这样的一个置换通常表示为

$$\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\j_1&j_2&\cdots&j_n\end{pmatrix},$$

其中 $j_i=\sigma(i)$. 这样的置换的集合用 S_n 表示, 并且它有 $n!=1\cdot2\cdot\cdots\cdot n$ 个置换. 在 S_n 中置换的复合属于 S_n, 单位映射 ε 属于 S_n 以及 S_n 中置换的逆属于 S_n. 因此 S_n 关于映射的复合形成一个群. 这是 **n 阶的对称群**.

9.33 求对称群 S_3 的元素和乘法表.

解 ☞ S_3 有 $3!=6$ 个元素如下:

$$\varepsilon=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\quad \phi_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},$$

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\quad \phi_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}.$$

S_3 的乘法表如图 9-1 所示.

9.34 证明一个群 G 的单位元素是惟一的.

	ε	σ_1	σ_2	σ_3	ϕ_1	ϕ_2
ε	ε	σ_1	σ_2	σ_3	ϕ_1	ϕ_2
σ_1	σ_1	ε	ϕ_1	ϕ_2	σ_2	σ_3
σ_2	σ_2	ϕ_2	ε	ϕ_1	σ_3	σ_1
σ_3	σ_3	ϕ_1	ϕ_2	ε	σ_1	σ_2
ϕ_1	ϕ_1	σ_3	σ_1	σ_2	ϕ_2	ε
ϕ_2	ϕ_2	σ_2	σ_3	σ_1	ε	ϕ_1

图 9-1

证 ☞ 设 e 和 e' 都是 G 的单位元素. 由于 e' 是一个单位元素, 因此有 $ee'=e$; 由于 e 是一个单位元素, 因此有 $ee'=e'$, 故 $e=e'$.

9.35 证明群 G 的任一元素 a 的逆 a^{-1} 是惟一的.

证 ☞ 从习题 9.15 以及 G 是结合的得到证明.

9.36 证明群 G 中左和右消去律成立.

证 ☞ 如果 $ab=ac$, 则

$$b = eb = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac) = (a^{-1}a)c = ec = c.$$

同理, 若 $ba=ca$, 则有 $b=c$.

9.37 证明对于群 G 的任一元素 a 都有 $(a^{-1})^{-1}=a$.

证 ☞ 由于 a^{-1} 是 a 的逆, 我们有 $aa^{-1}=a^{-1}a=e$. 因此 a 是 a^{-1} 的逆, 即

$$a = (a^{-1})^{-1}.$$

9.38 证明 $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$.

证 ☞ 这里, 有

$$(b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}(a^{-1}a)b = b^{-1}eb = b^{-1}b = e.$$

同理, 有 $(ab)(b^{-1}a^{-1})=e$. 因此 $b^{-1}a^{-1}$ 是 ab 的逆, 即 $b^{-1}a^{-1}=(ab)^{-1}$.

9.39 考虑关于模 7 乘法的群 $G=\{1,2,3,4,5,6\}$, 求 G 的乘法表.

解 ☞ 为了求 G 中 $a*b$, 求乘积 ab 被 7 除得到的余数. 例如, $5\cdot6=30$ 被 7 除得余数 2, 因此在 G 中 $5*6=2$. G 的乘法表为图 9-2 中所表示的.

*	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

图 9-2

9.40 求图 9-2 中群 G 的元素 2^{-1}, 3^{-1} 和 6^{-1}.

解 ☞ 注意 1 是 G 的单位元素. 由于 a^{-1} 是 G 的使 $aa^{-1}=1$ 的元素, 因此 $2^{-1}=4$, $3^{-1}=5$, $6^{-1}=6$.

子群

9.41 定义群的一个子群.

解 ☞ 设 H 是群 G 的一个子集, 若 H 关于 G 的运算自身形成一个群, 则称 H 是群 G 的一个子群.

9.42 设 H 是群 G 的一个子集. 证明: 若 H 具有下列三个性质:

(i) 单位元素属于 H;

(ii) H 关于 G 的运算是封闭的, 即若 $a,b\in H$, 则 $ab\in H$;

(iii) H 关于逆运算是封闭的, 即若 $a\in H$, 则 $a^{-1}\in H$,

则 H 是 G 的一个子群.

证 ☞ 由 (i), H 是非空的并且有一个单位元素. 由 (ii), H 中的运算是定义明确的. 由 (iii), H 中逆是存在的, 最后, 由于在 G 中结合律成立, 因此在 H 中结合律也成立. 故 H 是 G 的一个子群.

9.43 考虑关于加法的整数群 $\mathbf{Z}$. 设 H 是由 $\mathbf{Z}$ 的所有数乘上一个正整数 m 组成的子集, 即

$$H = \{\cdots, -3m, -2m, -m, 0, m, 2m, 3m, \cdots\}.$$

证明 H 是 G 的一个子群.

证 ☞ (i) H 含有 $\mathbf{Z}$ 的单位元素 0.

(ii) 若 rm 和 sm 是 H 的任两个元素, 则和 $rm+sm=(r+s)m$ 也是 H 的元素.

(iii) 若 rm 是 H 的任一元素, 则其相反数 $-rm$ 也属于 H.

9.44 设 G 是任一群, a 是 G 的任一元素, 定义由 a 生成的循环群, 用 $gp(a)$ 表示.

解 ☞ 我们照常定义 $a^0=e$ 和 $a^{n+1}=a^n*a$. 显然,对任何整数 m 和 n,有 $a^m*a^n=a^{m+n}$和 $(a^m)^n=a^{mn}$. 设 $gp(a)$表示 a 的所有的幂的集合:

$$gp(a)=\{\cdots,a^{-2},a^{-1},e,a,a^2,a^3,\cdots\}.$$

那么 $gp(a)$包含 e,它关于群运算是封闭的,并且包含逆. 这样,$gp(a)$是 G 的一个子群,称它为由 a **生成的循环群**.

9.45 设 a 是群 G 的任一元素,描述 $gp(a)$为有限时的循环群 $gp(a)$,并定义 a 的阶.

解 ☞ 若 $gp(a)$是有限的,则 a 的某些幂是一样的,比方说 $a^r=a^s$,其中 $r>s$. 于 $a^{r-s}=e$,其中 $r>s$. 使得 $a^m=e$ 的最小正整数 m 称为 a **的阶**,并用 $|a|$表示之. 若 $|a|=m$,则它的循环群 $gp(a)$有 m 个元素:

$$gp(a)=\{e,a,a^2,a^3,\cdots,a^{m-1}\}.$$

若 $gp(a)$不是有限的,我们则定义 $|a|=0$.

9.46 考虑习题 9.39 的群 G. (a)求由 2 和 3 生成的子群和阶;(b)G 是循环群?

解 ☞ (a) 我们有 $2^1=2,2^2=4$,但 $2^3=1$. 因此 $|2|=3$ 且 $gp(2)=\{1,2,3\}$. 我们有 $3^1=3,3^2=2$, $3^3=6,3^4=4,3^5=5,3^6=1$,因此 $|3|=6$,并且 $gp(3)=G$.

(b) 由于 $gp(3)=G$,因此 G 是循环的.

9.47 设 H 是群 G 的一个子群. 定义 H 的右(左)陪集.

解 ☞ 设 a 是 G 的任一元素. 集合 $Ha=\{ha:h\in H\}$称为 H 的一个**右陪集**. 同理,aH 称为 H 的一个**左陪集**.

定理 9.2 设 H 是群 G 的一个子群,则右陪集 Ha 形成 G 的一个划分.

9.48 证明定理 9.2.

证 ☞ 由于 $e\in H$, $a=ea\in Ha$,因此每个元素属于一个陪集. 事实上,$a\in Ha$. 现设 Ha 和 Hb 是相交的,比方说 $c\in Ha\cap Hb$. 我们若证得 $Ha=Hb$,则证明便完成.

由于 c 属于 Ha 和 Hb,我们有 $c=h_1a$ 以及 $c=h_2b$,其中 $h_1,h_2\in H$. 于是 $h_1a=h_2b$,从而 $a=h_1^{-1}h_2b$. 设 $x\in Ha$,则有

$$x=h_3a=h_3h_1^{-1}h_2b,$$

其中 $h_3\in H$. 由于 H 是一个子群,$h_3h_1^{-1}h_2\in H$,因此 $x\in Hb$. 因 x 是 Ha 的任一元素,因此我们有 $Ha\subseteq Hb$. 同理,$Hb\subseteq Ha$. 故 $Ha=Hb$. 定理得证.

9.49 设 H 是 G 的一个有限子群. 证明 H 和任一陪集 Ha 有相同的元素数目.

证 ☞ 设 $H=\{h_1,h_2,\cdots,h_k\}$,这里 H 有 k 个元素,则 $Ha=\{h_1a,h_2a,\cdots,h_ka\}$. 然而 $h_ia=h_ja$ 意味 $h_i=h_j$,因此 Ha 的 k 个元素是互不相同的.

定理 9.3(拉格朗日) 设 H 是有限群 G 的一个子群,则 H 的阶整除 G 的阶.

9.50 证明定理 9.3.

证 ☞ 设 H 有 r 个元素并且有 s 个不同的右陪集. 据定理 9.2,陪集划分 G. 又由习题 9.49,每个陪集有 r 个元素,因此 G 有 rs 个元素,从而 H 的阶整除 G 的阶.

9.51 设 H 是群 G 的一个子群. 定义 G 中 H 的指数,用$[G:H]$表示.

解 ☞ G 中 H 的**指数**等于 G 中 H 的右(或左)陪集的数目. 若 G 和 H 是有限的,则$[G:H]=|G|/|H|$.

9.52 设 H 是群 G 的一个子群. 定义 G 中关于 H 的一个陪集代表系.

解 ☞ 设 C 是 G 的一个子集. 若 C 仅仅含 H 的每一个陪集的一个元素,则称 C 是 H 的一个**陪集代表系**. 这样的一个元素称为该陪集的一个**表示式**. 因此 C 的元素数目,即陪集表示式的数目等于 G 中 H 的指数$[G:H]$.

9.53 设 H 是有限群 G 的一个子群. H 的陪集有多少陪集代表系?

解 ☞ 从任一个陪集有$|H|$种方法选取一个元素(见习题 9.49),并且有$[G:H]$个不同的陪集,因

此有$|H|^{[G:H]}$个陪集代表系.

9.54 考虑关于加法运算的整数群**Z**以及由其所有元素的5倍组成的子群

$$H=\{\cdots,-10,-5,0,5,10,\cdots\}.$$

求(a) **Z**中H的陪集;(b) **Z**中H的指数.

解 ☞ (a) **Z**中H有5个不同的(左)陪集如下:

$$0+H=H=\{\cdots,-10,-5,0,5,10,\cdots\},$$
$$1+H=\{\cdots,-9,-4,1,6,11,\cdots\},$$
$$2+H=\{\cdots,-8,-3,2,7,12,\cdots\},$$
$$3+H=\{\cdots,-7,-2,3,8,13,\cdots\},$$
$$4+H=\{\cdots,-6,-1,4,9,14,\cdots\}.$$

其他的任一个陪集$n+H$与上面的一个陪集重合.

(b) 虽然**Z**和H都是无限的,但**Z**中H的指数是有限的.具体地,陪集数目$[\mathbf{Z}:H]=5$.

9.55 求习题9.54中**Z**的子集H的陪集表示式.

解 ☞ 从每一个陪集恰好取一个元素,例如,$\{0,1,2,3,4\}$或$\{-1,0,1,2,3\}$.(通常,我们选取最小的非负整数,作为**Z**的一个子群H的陪集表示式.一般地,我们选取单位元素作为H的表示式.)

9.56 考虑习题9.33中的对称群S_3,求S_3的每个元素生成的子群和阶.

解 ☞ $\varepsilon^1=\varepsilon$,因而$|\varepsilon|=1$且$gp(\varepsilon)=\{\varepsilon\}$;$\sigma_1^1=\sigma_1$,$\sigma_1^2=\varepsilon$,因而$|\sigma_1|=2$且$gp(\sigma_1)=\{\sigma_1,\varepsilon\}$.同理,$|\sigma_2|=2$,$gp(\sigma_2)=\{\sigma_2,\varepsilon\}$,$|\sigma_3|=2$,$gp(\sigma_3)=\{\sigma_3,\varepsilon\}$.我们有

$$\phi_1^1=\phi_1,\quad \phi_1^2=\phi_2,\quad \phi_1^3=\phi_2\cdot\phi_1=\varepsilon,$$

因此$|\phi_1|=3$且$gp(\phi_1)=\{\varepsilon,\phi_1,\phi_2\}$.又

$$\phi_2^1=\phi_2,\quad \phi_2^2=\phi_1,\quad \phi_2^3=\phi_1\cdot\phi_2=\varepsilon,$$

因此$|\phi_2|=3$且$gp(\phi_2)=\{\varepsilon,\phi_2,\phi_1\}$.

9.57 S_3是循环群?

解 ☞ S_3不是循环群,因S_3不能由其任一元素生成.

9.58 求对称群S_3的阶为4的一个子群H.

解 ☞ S_3的阶为6,由拉格朗日定理,H的阶必整除S_3的阶.因此S_3没有阶为4的子群.

9.59 考虑图9-1中的对称群S_3.设$A=\{\sigma_1,\sigma_2\}$,$B=\{\phi_1,\phi_2\}$.求(a)AB,(b)σ_3A,(c)$A\sigma_3$.

解 ☞ (a) 用B的每一元素乘A的每一元素得

$$\sigma_1\phi_1=\sigma_2,\quad \sigma_1\phi_2=\sigma_3,\quad \sigma_2\phi_1=\sigma_3,\quad \sigma_2\phi_2=\sigma_1,$$

因此$AB=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$.

(b) 用A的每一元素乘σ_3得

$$\sigma_3\sigma_1=\phi_1,\quad \sigma_3\sigma_2=\phi_2,$$

因此$\sigma_3A=\{\phi_1,\phi_2\}$.

(c) 用σ_3乘A的每一元素得

$$\sigma_1\sigma_3=\phi_2,\quad \sigma_2\sigma_3=\phi_1,$$

因此$A\sigma_3=\{\phi_1,\phi_2\}$.

9.60 考虑图9-1中S_3的子群$H=gp(\sigma_1)$和$K=gp(\sigma_2)$.证明HK不是S_3的一个子群.

证 ☞ $H=\{\varepsilon,\sigma_1\}$,$K=\{\varepsilon,\sigma_2\}$,因此$HK=\{\varepsilon,\sigma_1,\sigma_2,\phi_1\}$.由于$HK$有4个元素,因此它不是$S_3$的一个子群.

9.61 设H是G的一个子群,证明$HH=H$.

证 ☞ 由于H关于G的运算是封闭的,因此我们有$HH\subseteq H$.另一方面,设$h\in H$.由于H是一个子群,因而有单位元素e属于H.因此$eh=h\in HH$,于是$H\subseteq HH$.故由此二结论得到$HH=H$.

9.62 指出阶为p的循环群的所有子群,此处p为一个质数.

解 ☞ 根据拉格朗日定理,只有$\{\varepsilon\}$是一个子群.

9.63 求整数群 **Z** 关于加法运算的一个子集 S，使得 $S+S\neq S$ 以及对某一元素 $a\in\mathbf{Z}$，$a\notin a+S$.

解 ☞ 设 $S=\{1,2,\cdots\}$，则 $S+S=\{2,3,4,\cdots\}\neq S$，且 $2+S=\{3,4,5,\cdots\}$ 不含 2.

9.64 设 H 是 G 的一个子群. 证明 $Ha=Hb$ 当且仅当 $ab^{-1}\in H$.

证 ☞ 设 $Ha=Hb$，则 $a\in Ha=Hb$. 因此存在 $h\in H$ 使得 $a=hb$，并且 $ab^{-1}=h$ 属于 H. 另一方面，设 $h=ab^{-1}\in H$，则 $a=hb\in Hb$. 但 $a\in Ha$. 由于陪集形成 G 的一个划分，故 $Ha=Hb$.

9.65 设 G 是一个阶为 n 的有限群. 证明对于每个 $a\in G$，$a^n=e$.

证 ☞ 设 $|gp(a)|=m$，则 $a^m=e$. 由拉格朗日定理，m 整除 n，例如 $n=mr$. 因此 $a^n=a^{mr}=(a^m)^r=e^r=e$.

9.3 正规子群、商群、群同态

9.66 定义群 G 的一个正规子群.

解 ☞ 设 H 是 G 的一个子群. 若对于任一 $a\in G$ 都有 $a^{-1}Ha\subset H$，则称 H 为 G 的一个**正规**子群. 等价地，若对任 $a\in G$ 都有 $aH=Ha$，即若 H 的左和右陪集是重合的，则 H 是正规的.

9.67 设 G 是非奇异 2×2 矩阵关于矩阵乘法的群，再设 H 是由下三角矩阵，即形式为

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$

组成的 G 的子集，其中 $ad\neq0$. 证明 H 是 G 的一个子群，但不是正规子群.

证 ☞ H 关于矩阵乘法和逆运算是封闭的，且单位矩阵 I 属于 H. 因此 H 是 G 的一个子群. 但是，例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

不属于 H. 因此 H 不是一个正规子群.

9.68 设 G 是习题 9.67 中矩阵的群，再设 K 是矩阵行列式为 1 的矩阵组成的 G 的子集. 证明 K 是 G 的一个正规子群.

证 ☞ 由于 $\det(I)=1$，因此 I 属于 K. 设 A 和 B 属于 K，则 $\det(AB)=\det(A)\cdot\det(B)=1\times1=1$，因而 $AB\in K$. 又 $\det(A^{-1})=1/\det(A)=1$，从而 A^{-1} 属于 K. 这样，K 是一个子群. 而且，对于 G 的任一矩阵 X 和 K 的任一矩阵 A，$\det(X^{-1}AX)=1$，因此 $X^{-1}AX$ 属于 K. 故 K 是 G 的一个正规子群.

9.69 考虑置换群 S_3，其乘积表在图 9-1 中. 子群 $H=\{\varepsilon,\sigma_1\}$ 是正规的吗?

解 ☞ H 的右和左陪集如下：

右陪集	左陪集
$H=\{\varepsilon,\sigma_1\}$	$H=\{\varepsilon,\sigma_1\}$
$H\phi_1=\{\phi_1,\sigma_2\}$	$\phi_1H=\{\phi_1,\sigma_3\}$
$H\phi_2=\{\phi_2,\sigma_3\}$	$\phi_2H=\{\phi_2,\sigma_2\}$

由于 $H\phi_1\neq\phi_1H$，因此 H 不是 S_3 的一个正规子群.

9.70 证明阿贝尔群 G 的任一子群 H 都是正规的.

证 ☞ 设 h 是 H 的任一元素以及 g 是 G 的任一元素. 那么 $g^{-1}hg=hg^{-1}g=h$ 属于 H. 因此 H 是 G 的一个正规子群.

9.71 设 H 是群 G 的一个子群，K 是 G 的一个正规子群. 证明 HK 是 G 的一个子群.（与习题 9.60 比较.）

证 ☞ 我们必须证明 $e\in HK$，以及 HK 关于乘法和逆运算是封闭的. 由于 H 和 K 都是子群，从而 $e\in H$ 且 $e\in K$. 因此 $e=ee$ 属于 HK. 设 $x,y\in HK$，则 $x=h_1k_1$ 和 $y=h_2k_2$，其中 $h_1,h_2\in H$，$k_1,k_2\in K$. 因此

$$xy = h_1k_1h_2k_2 = h_1h_2(h_2^{-1}k_1h_2)k_2.$$

由于 K 是正规的，从而 $h_2^{-1}k_1h_2\in K$；又由于 H 和 K 都是子群，从而 $h_1h_2\in H$，$(h_2^{-1}k_2h_2)k_2\in K$. 于是 $xy\in HK$，从而 HK 关于乘法是封闭的. 我们还有

$$x^{-1} = (h_1k_1)^{-1} = k_1^{-1}h_1^{-1} = h_1^{-1}(h_1k_1^{-1}h_1^{-1}).$$

因 K 是正规子群，因而 $h_1k_1^{-1}h_1^{-1}$ 属于 K. 又 h_1^{-1} 属于 H. 因此 $x^{-1}\in HK$，从而 HK 关于逆运算是封闭的. 故 HK 是一个子群.

下面的定理定义对应于 G 的一个正规子群 H 的**商群** G/H.

定理 9.4　设 H 是群 G 的一个正规子群，则 G 中 H 的陪集形成关于陪集乘法运算，如定义为

$$(aH)(bH)=abH$$

的一个群.

9.72　证明定理 9.4.

证 ☞ 由于

$$(aH)(bH) = a(Hb)H = a(bH)H = ab(HH) = abH,$$

因此陪集乘法是意义明确的.（这里，我们应用了下面的结论：H 是正规的，从而 $Hb=bH$，根据习题 9.61，$HH=H$.）由于 G 中结合律成立，因此陪集乘法结合律成立. 由于

$$(aH)H = a(HH) = aH,$$
$$H(aH) = (Ha)H = (aH)H = aH,$$

因此 H 是 G/H 的单位元素. 最后，由于

$$(a^{-1}H)(aH) = a^{-1}aH = eH = H,$$
$$(aH)(a^{-1}H) = aa^{-1}H = eH = H,$$

因此 $a^{-1}H$ 是 aH 的逆. 故 G/H 关于陪集乘法是一个群.

9.73　设 $\mathbf{Z}$ 是关于加法的整数群，H 是 5 的倍数组成的 $\mathbf{Z}$ 的子群. 证明 H 是 $\mathbf{Z}$ 的一个正规子群，并求商群 $\mathbf{Z}/H$.

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

图 9-3

解 ☞ 由 $\mathbf{Z}$ 是阿贝尔群，因此 H 必然是一个正规子群. 设 $\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3}$ 和 $\bar{4}$ 分别表示 5 个陪集 $H,1+H,2+H,3+H$ 和 $4+H$，它们是习题 9.54 所列出的. 商群 $\mathbf{Z}/H=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$ 的加法表在图 9-3 中给出.（这个群通常称为**整数模 5**，且常常用 $\mathbf{Z}_5$ 表示. 类似地，对任一正整数 m，存在一个整数模 m 的商群 $\mathbf{Z}_m$.）

同态

9.74　定义群同态，并且，定义一个群同构.

解 ☞ 设 f 是从一个群 G（具有运算 $*$）到一个群 G'（具有运算 $*'$）的映射. 若对于 G 中任意的 a,b 都有 $f(a*b)=f(a)*'f(b)$，则称映射 f 是一个**同态**（映射）. 再若 f 是一个一一满映射，则称 f 是一个**同构**（映射），此时称 G 和 G' 是**同构的**，记作 $G\simeq G'$.

9.75　设 G 是关于加法运算的实数群，G' 是关于乘法运算的正实数群. 证明映射 $f:G\to G'$ 定义为 $f(a)=2^a$ 是一个同态. 它是一个同构吗？

解 ☞ 由于 $f(a+b)=2^{a+b}=2^a2^b=f(a)f(b)$，因此映射 f 是一个同态. 而且 f 是一一满映射，因此 f 是一个同构.

9.76　设 G 是 n 阶实的非奇异方阵关于乘法的群，G' 是非零实数关于乘法的群. 证明行列式函数是 G 到 G' 的一个同态.

证 ☞ 设 A 和 B 是 G 中的矩阵,则有 $\det(AB)=\det(A)\cdot\det(B)$. 因此行列式函数是一个同态映射.

9.77 给定一个同态映射 $f:G\to G'$,证明 $f(e)=e'$,其中 e 和 e' 分别是 G 和 G' 的单位元素.

证 ☞ 由于 $e=e*e$,f 是一个同态,因此有

$$f(e)=f(e*e)=f(e)*'f(e).$$

于是

$$e'=f(e)^{-1}*'f(e)=[f(e)^{-1}*'f(e)]*'f(e)=e'*'f(e)=f(e).$$

9.78 给定一个同态 $f:G\to G'$. 证明对于 G 中的任一 a 都有 $f(a^{-1})=f(a)^{-1}$.

证 ☞ 应用习题 9.77,我们有

$$f(a)*'f(a^{-1})=f(a*a^{-1})=f(e)=e'$$
$$=f(e)=f(a^{-1}*a)=f(a^{-1})*'f(a).$$

因此 $f(a)^{-1}=f(a^{-1})$.

9.79 定义一个群同态 $f:G\to G'$ 的核和象.

解 ☞ f 的**核**记作 $\mathrm{Ker}f$,它是使得 G 的元素是 G' 的单位元素 e' 的所有元素组成的集合:

$$\mathrm{Ker}f=\{a\in G:f(a)=e'\}.$$

f 的**象**(集)记作 $f(G)$ 或 $\mathrm{Im}f$,它是在 f 下的所有象组成的集合:

$$\mathrm{Im}f=\{b\in G':b=f(a),a\in G\}.$$

象 $\mathrm{Im}f$ 又称为**值域**.

定理 9.5 设 $f:G\to G'$ 是一个同态,它具有核 K,则(i) K 是 G 的一个正规子群,(ii)商群 G/K 与 f 的象同构.

9.80 证明定理 9.5(i).

证 ☞ 根据习题 9.77,$f(e)=e'$,因此 $e\in K$. 现设 $a,b\in K$,$g\in G$,则有 $f(a)=e'$,$f(b)=e'$. 因此(应用表示每一群运算的毗连)

$$f(ab)=f(a)f(b)=e'e'=e',$$
$$f(a^{-1})=f(a)^{-1}=e'^{-1}=e',$$
$$f(gag^{-1})=f(g)f(a)f(g^{-1})=f(g)e'f(g)^{-1}=e'.$$

于是 ab,a^{-1} 和 gag^{-1} 都属于 K,从而 K 是一个正规子群.

9.81 证明定理 9.5(ii).

证 ☞ 设 $H\subseteq G'$ 是 f 的象. 定义一个映射 $\phi:G/H\to H$:

$$\phi(Ka)=f(a).$$

我们证明 ϕ 是意义明确的,即若 $Ka=Kb$,则 $\phi(Ka)=\phi(Kb)$. 设 $Ka=Kb$,则 $ab^{-1}\in K$(习题 9.64). 因此 $f(ab^{-1})=e'$,且

$$f(a)f(b)^{-1}=f(a)f(b^{-1})=f(ab^{-1})=e'.$$

于是 $f(a)=f(b)$,且 $\phi(Ka)=\phi(Kb)$. 这样,ϕ 是意义明确的. 其次,我们证明 ϕ 是一个同态:

$$\phi(KaKb)=\phi(Kab)=f(ab)=f(a)f(b)=\phi(Ka)\phi(Kb).$$

因此 ϕ 是一个同态. 我们再证明 ϕ 是一对一的. 设 $\phi(Ka)=\phi(Kb)$,则

$$f(a)=f(b)\text{ 或 }f(a)f(b)^{-1}=e'\text{ 或 }f(a)f(b^{-1})=e'\text{ 或 }f(ab^{-1})=e'.$$

因此 $ab^{-1}\in K$,且又由习题 9.64 有 $Ka=Kb$,因此 ϕ 是一对一的. 最后,我们证明 ϕ 是满的. 设 $h\in H$. 由于 H 是 f 的象,因此存在 $a\in G$ 使得 $f(a)=h$. 于是 $\phi(Ka)=f(a)=h$,从而 ϕ 是满的. 故 $G/H\simeq H$,定理 9.5(ii)得证.

9.82 设 $f:G\to G'$ 定义为 $f(z)=|z|$,其中 G 表示关于乘法的非零复数群,G' 表示关于乘法的非零实数群. (a)证明 f 是一个群同态,(b)说明同态 f 的核 K 的几何意义.

解 ☞ (a) $f(z_1z_2)=|z_1z_2|=f(z_1)f(z_2)$.

(b) K 是使得 $|z|=1$ 的所有复数组成的,即 K 是一个单位圆周.

9.83 叙述习题 9.82 中的商群 G/K.

解 ☞ G/K 与 f 的象同构.该象是关于乘法的正实数群.

9.84 证明任一循环群或是与关于加法的整数集 **Z** 同构或是与关于加法模 m 的整数群 $\mathbf{Z}_m$ 同构.

证 ☞ 设 a 是群 G 的任一元素.函数 $f:\mathbf{Z}\to G$ 定义为

$$f(n)=a^n,$$

它具有性质

$$f(m+n)=a^{m+n}=a^m\cdot a^n=f(m)f(n),$$

因此 f 是一个同态.f 的象是由 a 生成的循环子群 $gp(a)$.于是 $gp(a)\simeq\mathbf{Z}/K$,其中 K 是 f 的核.若 $K=\{0\}$,则 $gp(a)\simeq\mathbf{Z}$.另一方面,若 m 是 a 的阶,则 $K=\{m$ 的倍数$\}$,且 $gp(a)\simeq\mathbf{Z}_m$.

9.4 环和理想

9.85 定义一个环.

解 ☞ 设 R 是具有两个二元运算:加法(用 + 表示)和乘法(用毗连表示)的一个非空集合.若下列公理成立:

[R1] 对于任意的 $a,b,c\in R$,都有

$$(a+b)+c=a+(b+c);$$

[R2] 存在一个元素 $0\in R$,称为零元素,使得对任一 $a\in R$,都有

$$a+0=0+a=a;$$

[R3] 对于每一 $a\in R$,存在一元素 $-a$,称为负元,使得

$$a+(-a)=(-a)+a=0;$$

[R4] 对于任何 $a,b\in R$,都有

$$a+b=b+a;$$

[R5] 对于任何 $a,b,c\in R$,都有

$$(ab)c=a(bc);$$

[R6] 对于任何 $a,b,c\in R$,都有

$$\text{(i)}\quad a(b+c)=ab+ac,$$

$$\text{(ii)}\quad (b+c)a=ba+ca,$$

则 R 称为一个**环**.

公理[R1]到[R4]成立,表明 R 关于加法是一个阿贝尔群.

9.86 在一个环中如何定义减法?

解 ☞ $a-b\equiv a+(-b)$.

9.87 定义一个交换环.

解 ☞ 设 R 是一个环.若对任意的 $a,b\in R$,都有 $ab=ba$,则称环 R 是**交换的**.

9.88 定义环 R 的单位元素.

解 ☞ 若对每一元素 $a\in R$ 都有 $a\cdot 1=1\cdot a=a$,则称非零元素 $1\in R$ 为单位元素.

9.89 设 R 是具有单位元素 1 的一个环.定义 R 的单位.

解 ☞ 设 a 是 R 的一个元素,且 a 有关于乘法的逆 a^{-1}使得 $aa^{-1}=a^{-1}a=1$,则称 a 是一个单位.

9.90 考虑整数环 **Z**.(a)**Z** 是交换的吗?(b)**Z** 有单位元素吗?(c)**Z** 的单位是什么?

解 ☞ (a) 由于对任何整数 $a,b\in\mathbf{Z}$ 都有 $ab=ba$,因此 **Z** 是交换的.

(b) **Z** 的单位元素是数 1.

(c) **Z** 只有单位 1 和 −1.

9.91 求模 m 整数环 $\mathbf{Z}_m$ 的单位.

解 ☞ 若 a 是 $\mathbf{Z}_m$ 的一个单位,则 $a^{-1}a\equiv 1(\bmod m)$,或者在 **Z** 中

$$a^{-1}a = 1 + rm \text{ 或 } a^{-1}a - rm = 1.$$

这就表明 a 和 m 的任一公因子必须除尽 1，即 a 和 m 是互质的. 因此，若 $\mathbf{Z}$ 中的 a 和 m 是互质的，则（应用最大公因子 g.c.d.）

$$1 = \text{g.c.d.}(a, m) = pa + qm$$

或

$$pa \equiv 1 (\bmod m).$$

它表明 a 是 $\mathbf{Z}_m$ 的一个单位（具有逆 p）. 因此 $\mathbf{Z}_m$ 的单位恰恰是那些与 m 互质的整数.

9.92 在 $\mathbf{Z}_{10}$ 中求 -3，-8 和 3^{-1}.

解 ☞ 一个环 R 中的 $-a$ 是使得 $a+(-a)=(-a)+a=0$ 的元素. 在 $\mathbf{Z}_{10}$ 中，由于 $3+7=7+3=0$，因此 $-3=7$. 同理，$-8=2$. 在环 R 中，a^{-1} 是使得 $a\cdot a^{-1}=a^{-1}a=1$ 的元素. 在 $\mathbf{Z}_{10}$ 中，由于 $3\cdot 7=7\cdot 3=1$，因此 $3^{-1}=7$.

9.93 设 $f(x)=2x^2+4x+4$. 求 $f(x)$ 在 $\mathbf{Z}_{10}$ 中的根.

解 ☞ 将 $\mathbf{Z}_{10}$ 的元素代入 $f(x)$ 便看到哪些元素 x 使 $f(x)$ 为零. 我们有

$$f(0) = 4,\quad f(1) = 0,\quad f(2) = 0,\quad f(3) = 4,\quad f(4) = 2,$$
$$f(5) = 4,\quad f(6) = 0,\quad f(7) = 0,\quad f(8) = 4,\quad f(9) = 2.$$

因此根是 1，2，6 和 7. 这个例子说明 n 次多项式在一任意的环中会有多于 n 个根. 若环是一个域，则不会出现这种情形.

9.94 设 R 是 n 阶方阵环. (a) R 是可交换的吗？(b) R 有单位元素？(c) 求 R 的单位.

解 ☞ (a) 不. 矩阵乘法不满足交换律.

(b) 有. 它是单位阵 I.

(c) 非奇异矩阵或可逆矩阵是 R 的单位.

9.95 证明在环 R 中有 $a\cdot 0=0\cdot a=0$.

证 ☞ 由于 $0=0+0$，因此有 $a\cdot 0=a(0+0)=a\cdot 0+a\cdot 0$，两端加上 $-(a\cdot 0)$ 得 $0=a\cdot 0$. 同理，可得 $0\cdot a=0$.

9.96 证明在任一个环中负元是惟一的.

证 ☞ 给定任一元素 a. 设元素 x 有性质 $a+x=0$（必然有 x 使得 $x+a=0$）. 于是，我们有

$$-a = -a + 0 = -a + (a + x) = (-a + a) + x = 0 + x = x.$$

9.97 证明在一个环中有 $a(-b)=(-a)b=-ab$.

证 ☞ 由于

$$ab + a(-b) = a(b + (-b)) = a \cdot 0 = 0,$$

因此（习题 9.96）有 $a(-b)=-ab$. 同理，有 $(-a)b=-ab$.

9.98 证明具有单位元素 1 的环 R 中有 $(-1)a=-a$.

证 ☞ 由于

$$a + (-1)a = 1 \cdot a + (-1)a = (1 + (-1))a = 0 \cdot a = 0,$$

因此（习题 9.96）有 $(-1)a=-a$.

9.99 设 R 是有一个单位元素 1 的环. 证明 R 的单位的集合 R^* 关于乘法是一个群.

证 ☞ 设 a 和 b 是 R 的单位. 由于 $b^{-1}a^{-1}$ 是 ab 的逆，因此 ab 是 R 的一个单位. 于是 R^* 关于乘法是封闭的. 而且，由于 $1\in R^*$，从而 R^* 是非空的. 又由于 R 是结合的，从而 R^* 是结合的. 最后，若 a 是 R 的一个单位，从而 a^{-1} 亦是 R 的一个单位（因它有逆 a），则 R^* 关于逆运算是封闭的. 于是 R^* 关于乘法是一个群.

9.100 定义环 R 的一个子环.

解 ☞ 设 S 是 R 的一个非空子集. 若 S 本身关于 R 的运算形成一个环，则称 S 是 R 的一个**子环**. 显然，S 是 R 的一个子环的充分必要条件是 $a,b\in S$，意指 $a-b\in S$ 且 $ab\in S$.（关于减法是封闭的意味着包含 0 在内，包含负元在内，从而关于加法是封闭的.）

理想

9.101 定义一个环 R 的理想.

解 ☞ 设 J 是 R 的一个子集.若

(i) $0\in J$;

(ii) J 关于减法是封闭的,即对于任何 $a,b\in J$ 都有 $a-b\in J$;

(iii) J 关于 R 的元素的倍数是封闭的,即对 $a\in J, r\in R$ 有 $ra, ar\in J$.

则称 J 是 R 的一个理想.

对于(iii),若只是 $ra\in J$,则称 J 是左理想;若只是 $ar\in J$,则称 J 是右理想.因此术语理想将意味着如上所述的双边理想 在一个交换环中,任何一个左理想或右理想是一个理想.

9.102 证明$\{0\}$是任一环 R 的一个理想.

证 ☞ 由于 $0-0=0$ 属于$\{0\}$,以及对于任一 $r\in R$,都有 $r\cdot 0=0\cdot r=0$ 属于$\{0\}$.

9.103 设 $\mathbf{Z}$ 是整数环,J_m 是由 $m\geqslant 2$ 的倍数组成.证明 J_m 是 $\mathbf{Z}$ 的一个理想.

证 ☞ 显然,$0\in J_m$.假设 ma 和 mb 是 J_m 的任意两个元素,则 $ma-mb=m(a-b)$也属于 J_m.而且,对于任一个 $r\in\mathbf{Z}$,我们有 $r(ma)=(ma)r=m(ar)$,从而 $r(ma)$和$(ma)r$ 都是 J_m 的元素.故 J_m 是 $\mathbf{Z}$ 的一个理想.

9.104 设 M 是 2×2 实矩阵环,给出一个左理 J 但非右理想的例子,以及一个右理想 K 但非左理想的例子.

解 ☞

$$J=\left\{\begin{pmatrix}0 & a\\ 0 & b\end{pmatrix}\right\},\quad K=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}.$$

9.105 设 J 和 K 是环 R 的理想.证明 $J\cap K$ 是 R 的理想.

证 ☞ 由于 J 和 K 是理想,$0\in J$ 和 $0\in K$,因此 $0\in J\cap K$.设 $a,b\in J\cap K, r\in R$,则 $a,b\in J$ 且 $a,b\in K$.因 J 和 K 是理想,因此

$$a-b, ra, ar\in J, a-b, ra, ar\in K.$$

于是 $a-b, ra, ar\in J\cap K$.故 $J\cap K$ 是一个理想.

9.106 设环 R 有一个单位元素 1,J 是 R 的一个理想.证明:(a)若 $1\in J$,则 $J=R$;(b)若任一单位 $u\in J$,则 $J=R$.

证 ☞ (a) 若 $1\in J$,则对于任一 $r\in R$ 我们有 $r\cdot 1\in J$,或 $r\in J$.因此 $J=R$.

(b) 若 $u\in J$,则 $u^{-1}u\in J$,或 $1\in J$.因此,由(a)有 $J=R$.

下面的定理应用环 R 的一个理想J 是 R 的加法群的一个子群(必为正规的)这一事实.于是陪集$\{a+J : a\in R\}$的集合形成 R 的一个划分.

定理 9.6 设 J 是环R 的一个理想,则陪集$\{a+J : a\in R\}$形成关于陪集运算

$$(a+J)+(b+J)=(a+b)+J$$

以及

$$(a+J)(b+J)=ab+J$$

的一个环.

9.107 证明定理 9.6.陪集的环用 R/J 表示,称之为**商环**.

证 ☞ 类似于关于群的定理 9.4,证明 R/J 是关于加法的一个交换群,此处 J 作为零元素.由于

$$\begin{aligned}(a+J)(b+J)&=ab+aJ+Jb+JJ\\&=ab+J+J+J=ab+J,\end{aligned}$$

因此陪集乘法是意义明确的.由于在 R 中结合律和分配律成立.因此在 R/J 中它们亦成立.故R/J 是一个环.

9.108 设 J 是交换环R 的一个理想.证明 R/J 是交换的.

证 ☞ $(a+J)(b+J)=ab+J=ba+J=(b+J)(a+J)$.

9.109 设环 R 具有单位元素 1, J 是 R 的一个理想,再设 $1\notin J$. 证明 $1+J$ 是 R/J 的一个单位元素.

证 ☞ 对于任一陪集 $a+J$,我们有

$$(a+J)(1+J)=a\cdot 1+J=a+J$$

以及

$$(1+J)(a+J)=1\cdot a+J=a+J.$$

因此 $1+J$ 是 R/J 的一个单位元素.

环同态

9.110 定义环同态和环同构.

解 ☞ 设 f 是环 R 到一个环 R' 的一个映射. 若对任意的 $a,b\in R$ 都有

$$f(a+b)=f(a)+f(b)$$

和

$$f(ab)=f(a)f(b),$$

则称 f 是一个**同态**.(虽然这里运算记号似乎是相同,但一般地,R' 中环运算和 R 中的环运算不同.)再若 f 是一一满映射,则称 f 是一个**同构**,并称 R 和 R' **同构**,记作 $R\simeq R'$.

9.111 讨论环同态和群同态之间的关系(见 9.3 节). 下面的讨论中,关于环的叙述类似于定理 9.5.

解 ☞ 一个环同态 $f:R\to R'$ 关于 R 和 R' 的加法结构必然是群同态. 因此 $f(0)=0'$. 设 R 和 R' 分别有单位元素 1 和 $1'$. 为了 f 是一个环同态,我们亦要求 $f(1)=1'$,并且,我们定义 f 的核为 $\mathrm{Ker}f=\{a\in R: f(a)=0'\}$.

关于环同态有下面的基本定理.

定理 9.7 设 $f:R\to R'$ 是一个环同态,且具有核 J,则 J 是 R 的一个理想且 R/J 与 f 的象同构.

9.112 考察环 $R=2\mathbf{Z}$ 和 $R'=3\mathbf{Z}$,即 R 是 $\mathbf{Z}$ 的所有的数的 2 倍组成的,R' 是 $\mathbf{Z}$ 的所有的数的 3 倍组成的. 证明 R 和 R' 不是同构的.

证 ☞ 设 $f:R\to R'$ 是一个环同态,则对某一整数 k 有 $f(2)=3k$. 由于 f 是一个同态,因此有

$$f(4)=f(2+2)=f(2)+f(2)=3k+3k=6k,$$

而且

$$f(4)=f(2\cdot 2)=f(2)f(2)=(3k)(3k)=9k^2.$$

于是有 $9k^2=6k$,因 k 是整数,因此 $k=0$. 但 $f(0)=0$,故 f 不是一个同构.

9.113 设 J 是环 R 的一个理想. 考察(标准)映射 $f:R\to R/J$,定义为

$$f(a)=a+J$$

(回忆一下定理 9.6). 证明:(a) f 是一个环同态;(b) f 不是满映射.

证 ☞ (a) 应用定理 9.6,我们有

$$f(a+b)=(a+b)+J=(a+J)+(b+J)=f(a)+f(b),$$

$$f(ab)=ab+J=(a+J)(b+J)=f(a)f(b).$$

(b) R/J 的任一个陪集都是 $a\in R$ 的象.

9.114 求习题 9.113 中的(标准)映射 f 的核 K.

解 ☞ R/J 的零元素是 J. 因此,K 由那些使得 $f(a)=J$ 或 $a+J=J$ 的元素 a 组成. 但是,当且仅当 $a\in J$ 时,$a+J=J$. 故 J 是 f 的核.

9.5 整环、PID、UFD

在这一节中，若无特别申明，总是假定所有的环是交换的，并且有一个单位元素 1.

9.115 定义环 R 的一个零因子.

解 ☞ 设 $a\in R$ 是一个非零元素.若存在一个非零元素 b 使得 $ab=0$，则称 a 是一个**零因子**.

9.116 定义整环.

解 ☞ 设一个交换环 D 有一个单位元素 1，若 D 没有零因子，则称 D 是一个**整环**.

9.117 证明整数模 105 环 $\mathbf{Z}_{105}$不是一个整环.

证 ☞ 任一具有合数 m 的 $\mathbf{Z}_m$ 都有零因子，这是因为 $m=ab(1<a,b<m)$在 $\mathbf{Z}_m$ 中意味着 $ab=0$.

9.118 证明整数模 29 环 $\mathbf{Z}_{29}$是一个整环.

证 ☞ 同习题 9.117 相反，若 p 是质数，则 $\mathbf{Z}_p$ 没有零因子.事实上，对于 $1<a,b<p$，

$$ab = 0 + kp$$

即 $p|a$ 或 $p|b$，即 $a=0$ 或 $b=0$.

9.119 设 D 是一个整环.证明：若 $ab=ac$，其中 $a\neq 0$，则 $b=c$.

证 ☞ 若 $ab=ac$，则 $ab-ac=0$，因而 $a(b-c)=0$.因 $a\neq 0$，且 D 没有零因子，因此必有 $b-c=0$ 或 $b=c$.这正是我们要证明的.因此，在 D 中乘法满足消去律.

9.120 定义有单位元素 1 的交换环 R 的一个主理想.

解 ☞ 设 a 是 R 的任一元素，则集合$(a)=\{ra:r\in R\}$是一个理想.我们称它是由 a 生成的**主理想**.

9.121 PID是什么？

解 ☞ PID 是 Principal Ideal Domain(主理想整环)的缩写.若 R 是一个整环且 R 中的每一个理想都是主理想，则 R 是一个 PID.

9.122 证明 $\mathbf{Z}$ 是一个 PID.

证 ☞ 由于 $\mathbf{Z}$ 没有零因子，因此 $\mathbf{Z}$ 是一个整环.设 J 是 $\mathbf{Z}$ 的一个理想.若 $J=\{0\}$，则 $J=(0)$，它由 0 生成的.假设 $J\neq\{0\}$且 $x\neq 0$ 属于 J，则 $-x=(-1)x$ 属于 J.因此 J 至少含有一个正整数.设 a 是 J 中的最小正整数.我们要求 $J=(a)$，即 J 由 a 的所有的倍数组成.设 $x\in J$，用除法，有 $x=qa+r$，其中 $0\leqslant r<a$.由于 J 是一个理想且 $a,x\in J$，因此 $r=x-qa$ 属于 J.又因 a 是 J 中的最小正整数且 $r<a$，因此我们有 $r=0$，从而 x 是a 的一个倍数.故 $J=(a)$，从而 $\mathbf{Z}$ 是一个 PID.

9.123 定义一个环 R 中的相伴.

解 ☞ 设元素 $a,b\in R$.若对某一单位 $u\in R$ 有 $b=ua$，则称 b 是 a 的一个**相伴**.

9.124 求 $\mathbf{Z}_{10}$(整数模 10)中 4 的相伴.

解 ☞ $\mathbf{Z}_{10}$的单位是 1，3，7 和 9(见习题 9.91).用每个单位乘 4 得到 $1\cdot 4=4$，$3\cdot 4=2$，$7\cdot 4=8$，$9\cdot 4=6$(按模 10 来做乘法运算).因此 2，4，6 和 8 是 $\mathbf{Z}_{10}$中 4 的相伴.

9.125 求 $\mathbf{Z}_{10}$中 5 的相伴.

解 ☞ 用每个单位乘 5 得到 $1\cdot 5=5$，$3\cdot 5=5$，$7\cdot 5=5$，$9\cdot 5=5$.因此只有 5 是 $\mathbf{Z}_{10}$中 5 的相伴.

9.126 证明一个环 R 中具有相伴的关系是一种等价关系.

证 ☞ 对于 R 中的任一元素 a，由于 $a=1\cdot a$，因而是自身相伴的(自反律).设 b 是 a 的一个相伴，则有 $b=ua$，其中 u 是一个单位.因此有 $a=u^{-1}b$，其中 u^{-1}是一个单位.于是 a 是 b 的相伴(对称律).最后，设 a 是 b 的一个相伴，b 是 c 的一个相伴：

$$a = u_1 b,\quad b = u_2 c,$$

其中 u_1 和 u_2 都是单位.因此有

$$a = u_1(u_2c) = (u_1u_2)c,$$

其中 u_1u_2 亦是一个单位.故 a 是 c 的一个相伴(传递律).

9.127 定义整环 D 的不可约元素.

解 ☞ 设 $p \in D$ 是一个非单位.若 $p = ab$ 蕴含 a 或 b 是一个单位,则说 p 是不可约的.(显然,这是 **Z** 中"质数"概念的推广.)

9.128 定义**惟一因子分解整环(UFD)**

解 ☞ 若一个整环 D 的每一非单位 a 都可惟一地表示成不可约元素的乘积,则 D 是一个 UFD.

9.129 求 $n \in \mathbf{Z}$ 的相伴.

解 ☞ **Z** 中的单位只是 1 和 -1(习题 9.90).因此 n 的相伴仅是 n 和 $-n$.

9.130 **Z** 中的不可约元素是什么?

解 ☞ 质数(及其负数)是 **Z** 中的不可约元素.

9.131 将 **Z** 中的 12 表示成不可约元素的乘积.

解 ☞ 有 12 个这样的乘积:

$$\begin{aligned}12 &= 2\cdot 2\cdot 3 = (-2)\cdot(-2)\cdot 3 = (-2)\cdot 2\cdot(-3) = 2\cdot(-2)\cdot(-3)\\ &= 2\cdot 3\cdot 2 = (-2)\cdot(-3)\cdot 2 = (-2)\cdot 3\cdot(-2) = 2\cdot(-3)\cdot(-2)\\ &= 3\cdot 2\cdot 2 = (-3)\cdot(-2)\cdot 2 = (-3)\cdot 2\cdot(-2) = 3\cdot(-2)\cdot(-2).\end{aligned}$$

9.132 **Z** 是一个 UFD?

解 ☞ 是.虽然 12 等可用许多方法写成不可约元素的乘积,但所有这样的乘积仅仅关于顺序或相伴有差别.

9.133 集合 $D = \{a + b\sqrt{13} : a, b$ 为整数$\}$ 是一个整环.D 的单位是 $\pm 1, 18 \pm 5\sqrt{13}$ 以及 $-18 \pm 5\sqrt{13}$.D 的元素 $2, 3-\sqrt{13}$ 和 $-3-\sqrt{13}$ 是不可约的.证明 D 不是一个 UFD.

证 ☞ $4 = 2\cdot 2$ 以及 $4 = (3-\sqrt{13})(-3-\sqrt{13})$.

9.6 域

若无特别申明,这一节假定所有的环 R 是交换的且有单位元素 1.

9.134 定义一个域.

解 ☞ 设 F 是具有单位元素的交换环.若每一个非零 $a \in F$ 有一个乘法的逆,即存在一元素 $a^{-1} \in F$ 使得 $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$,则 F 称为一个**域**.换句话说,若 F 的所有非零元素关于乘法形成一个环,则 F 是一个域.

9.135 证明一个域 F 是一个整环,即没有零因子.

证 ☞ 若 $ab = 0$ 且 $a \neq 0$,则 $b = 1\cdot b = a^{-1}ab = a^{-1}0 = 0$.

9.136 就通常的加法和乘法运算,下列集合:整数集 **Z**,有理数集 **Q**,实数集 **R**,复数集 **C** 中哪些是域?

解 ☞ **Z** 是整环而不是域(仅仅 1 和 -1 是单位)的一个典型例子.**Q**,**R** 和 **C** 都是域.

9.137 设 S 是形如 $a + b\sqrt{3}$ 的实数集合,其中 a 和 b 都是实数.证明 S 是一个域.

证 ☞ 若一个实数或复数的集合 S 含有 0 和 1,以及关于加法,减法,乘法和除法(除了零作除数)运算是封闭的,则 S 是一个域.由于 $0 = 0 + 0\sqrt{3}$ 和 $1 = 1 + 0\sqrt{3}$,因此 0 和 1 都属于 S.又有

$$(a + b\sqrt{3}) + (c + d\sqrt{3}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{3},$$

$$(a + b\sqrt{3}) - (c + d\sqrt{3}) = (a - c) + (b - d)\sqrt{3},$$

$$(a + b\sqrt{3})(c + d\sqrt{3}) = (ac + 3bd) + (ad + bc)\sqrt{3},$$

因此 S 关于加法、减法和乘法是封闭的.现在我们如下证明 S 关于除法是封闭的:

$$\frac{(a+b\sqrt{3})}{(c+d\sqrt{3})}=\frac{(a+b\sqrt{3})(c-d\sqrt{3})}{(c+d\sqrt{3})(c-d\sqrt{3})}=\frac{ac-3bd}{c^2-3d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-3d^2}\sqrt{3}.$$

因此 S 是一个域.

9.138 设 D 是形为

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

的 2×2 矩阵的环.证明 D 与复数集 **C** 同构.据此,D 是一个域.

证 ☞ 设 $f:\mathbf{C}\to D$ 定义为

$$f(a+bi)=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

显然 f 是一一满映射.设 $z_1=a+bi,z_2=c+di$,则有

$$z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$$

以及

$$z_1z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

因此

$$f(z_1)+f(z_2)=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{pmatrix}=f(z_1+z_2),$$

$$f(z_1)f(z_2)=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix}=f(z_1z_2).$$

最后,$f(1)=f(1+0i)=I$,它是单位阵,故 f 是一个同构.

定理 9.8 有限整环 D 是一个域.

9.139 证明定理 9.8.

证 ☞ 假设 D 有 n 个元素,例如 $D=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.设 a 是 D 的任一非零元素,并且考虑 n 个元素 $aa_1,aa_2,\cdots,aa_n$.由于 $a\neq 0$,因此 $aa_i=aa_j$ 意指 $a_i=a_j$(见习题 9.119).因此上面的 n 个元素是不同的,从而它们必是 D 的元素的重新排列.它们之中的一个元素,例如 aa_k 必与 D 的单位元素相等,即 $aa_k=1$.于是 a_k 是 a 的逆.由于 a 是 D 的任意一个非零元素,故 D 是一个域.

9.140 证明 $\mathbf{Z}_p$ 是一个域,此处 p 是一个质数.

证 ☞ $\mathbf{Z}_p$ 是一个整环(见习题 9.118),并且它是有限的.因此根据定理 9.8 知 $\mathbf{Z}_p$ 是一个域.

9.141 证明域 F 的理想 J 只能是 $\{0\}$ 或是 F 本身.

证 ☞ 若 $J\neq\{0\}$,则 J 含有一个非零元素 a.由于 F 是一个域,因此 a 是一个单位,根据习题 9.106,$J=F$.

9.142 假设 $f:K\to K'$ 是从域 K 到域 K' 的一个同态.证明 f 是一个**入射**,即 f 是一对一的.

证 ☞ 设 $J=\mathrm{Ker}f$.根据定理 9.7,它则是 K 的一个理想.若 $J=K$,则 $f(1)=0'$.但是,由于 f 是一个同态,我们要求 $f(1)=1'$.因此,根据习题 9.141 知,$J\neq K$,从而 $J=\{0\}$.设 $f(a)=f(b)$,则 $f(a-b)=f(a)-f(b)=0$,因此 $a-b$ 属于 J,且 $a-b=0$ 或 $a=b$.因此 f 是一对一的.

9.143 设 D 是一个整环.定义 D 的商域.

解 ☞ 设 S 是由所有的有序对(商)a/b 组成,此处 $a,b\in D$ 且 $b\neq 0$.若 $ad=bc$,则定义 $a/b=c/d$.(这是一个等价关系.)设 $F(D)$ 是一个等价类 $[a/b]$ 的集,它由

$$[a/b]+[c/d]=[(ad+bc)/(bd)]$$

和

$$[a/b]\cdot[c/d]=[(ac)/(bd)]$$

来定义加法和乘法运算.那么 $F(D)$ 是所要求的域,定义为 D 的**商域**.

9.144 整数集整环 **Z** 的商域是什么?

解 ☞ $F(\mathbf{Z})=\mathbf{Q}$.它是有理数域.

9.145 设 $K=D[x]$ 是关于 x 的实系数多项式整环.K 的商域是什么?

解 ☞ $F(K)$是形如$f(x)/g(x)$的有理函数域,此处$f(x)$以及$g(x)\neq0$是多项式.

9.146 设D是一个整环.说明D是如何嵌入它的商域$F(D)$?

解 ☞ 设$f:D\to F(D)$定义为

$$f(a)=[a/1],$$

则f是一个嵌入,即f是一个同态且f是一对一的.例如,我们把$\mathbf{Z}$中的n与$\mathbf{Q}$中的$n/1$视为同一的.

9.147 定义环R的一个**极大理想**K.

解 ☞ 设K是R中的一个理想.如果$K\neq R$且没有理想J严格地在K和R之间,即若$K\subseteq J\subseteq R$,则$K=J$或$J=R$,那么K是R中的极大理想.

9.148 设K是具有单位元素1的交换环的一个极大理想.证明商环R/K是一个域.

证 ☞ 由于$K\neq R$,因此$1\notin K$(习题9.106).而且,由习题9.109,陪集$1+K$是R/K的一个单位元素.又由习题9.108知R/K是交换的.剩下的是证明任一陪集但不是K在R/K中有一个乘法的逆元素.设$a+K\neq K$,则$a\notin K$.令

$$J=\{ra+sk:r,s\in R,k\in K\},$$

则J是一个同时含有a和K的理想.由于$a\notin K$,因此$K\neq J$.因K是一个极大理想,因此$J=R$.这样,$1\in J$.因此存在$r_0,s_0\in R$以及$k_0\in K$使得$1=r_0a+s_0k_0$.于是有

$$1+K=r_0a+s_0k_0+K=r_0a+K=(r_0+K)(a+K),$$

从而r_0+K是$a+K$的乘法逆元素.故R/K是一个域.

9.7 域上的多项式

这一节研究一个域K上的多项式环$K[t]$,并且指出$K[t]$有许多类似于整数环$\mathbf{Z}$的性质.

9.149 定义域K上的多项式及其次数.

解 ☞ 设K是一个域.形式上,K上的一个**多项式**f是K中的元素的一个无穷序列,在此,除了有限个数外其余都是0,即

$$f=(\cdots,0,a_n,\cdots,a_1,a_0),$$

或等价地

$$f(t)=a_nt^n+\cdots+a_1t+a_0,$$

其中符号t作为未定的.元素a_k称为f的第k个系数.若n是使$a_n\neq0$的最大整数,则说f的**次数**是n,记作$\deg f=n$.我们也称a_n是f的**首项系数**.并且,若$a_n=1$,则称f是**首一多项式**.此外,若f的每一个系数都是0,则f称为**零多项式**,记作$f\equiv0$.零多项式没有次数定义.

9.150 定义域K上的多项式环.

解 ☞ 设$K[t]$是全体多项式f的集合.在$K[t]$中定义加法和乘法如下.设

$$f(t)=a_nt^n+\cdots+a_1t+a_0$$

和

$$g(t)=b_mt^m+\cdots+b_1t+b_0,$$

则$f+g$是它们的对应系数相加得到的多项式,即若$m\leqslant n$,则

$$f(t)+g(t)=a_nt^n+\cdots+(a_m+b_m)t^m+\cdots+(a_1+b_1)t+a_0+b_0.$$

而且,f与g的积是多项式

$$f(t)g(t)=a_nb_mt^{n+m}+\cdots+(a_1b_0+a_0b_1)t+a_0b_0,$$

就是说,

$$f(t)g(t)=c_{n+m}t^{n+m}+\cdots+c_1t+c_0,$$

其中

$$c_k=\sum_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}=a_0b_k+a_1b_{k-1}+\cdots+a_kb_0.$$

定理 9.9　$K[t]$关于习题 9.150 的加法和乘法是一个交换环，它具有一个单位元素且无零因子.(就是说，$K[t]$是一个整环.)

9.151　说明 K 怎么可以视为$K[t]$的一个子集.

解　☞ 我们认为纯量 $a_0 \in K$ 与多项式 $f(t)=a_0$ 或 $a_0=(\cdots,0,a_0)$相同.于是，K 的元素的加法和乘法运算可以是

$$(\cdots,0,a_0)+(\cdots,0,b_0)=(\cdots,0,a_0+b_0)$$

和

$$(\cdots,0,a_0)\cdot(\cdots,0,b_0)=(\cdots,0,a_0b_0).$$

定理 9.10　设 f 和 g 是$K[t]$中的多项式，则 $\deg(fg)=\deg f+\deg g$.

9.152　证明定理 9.10.

证　☞ 假设

$$f(t)=a_nt^n+\cdots+a_0,$$
$$g(t)=b_mt^m+\cdots+b_0,$$

其中 $a_n\neq 0, b_m\neq 0$.那么

$$f(t)g(t)=a_nb_mt^{n+m}+\text{较低次的项}.$$

而且，由于 K 没有零因子，因此 $a_nb_m\neq 0$.故

$$\deg(fg)=n+m=\deg f+\deg g$$

9.153　证明 K 的非零元素是$K[t]$的单位.

证　☞ 设 $f(t)g(t)=1$，则

$$0=\deg(1)=\deg(fg)=\deg f+\deg g.$$

因此 $\deg f=0$ 且 $\deg g=0$，以及 f 和 g 是K 中的纯量.另一方面，若 $a\in K$ 且$a\neq 0$，则 $aa^{-1}=1$ 且 a 是 $K[t]$的一个单位.

注　设 f 和g 是多项式.若存在一个多项式 h 使得 $f(t)=g(t)h(t)$，则说多项式 $g(t)$ 整除(能除尽)多项式 f.

9.154　设 $g(t)$能整除 $f(t)$.证明 $\deg g\leqslant \deg f$.

证　☞ 若 g 能除尽 f，则存在 h 使得 $f(t)=g(t)h(t)$.于是，根据定理 9.10 知，$\deg f=\deg g+\deg h\geqslant \deg g$.

9.155　设 f 和 g 是两个多项式，且 f 能除尽g，g 能除尽f.证明(a)$\deg f=\deg g$，(b)f 和g 是相伴的，即 $f(t)=kg(t)$，其中 $k\in K$.

证　☞ (a) 根据习题 9.154(或定理 9.10)，我们有 $\deg f\leqslant \deg g$ 且 $\deg g\leqslant \deg f$，因此 $\deg f=\deg g$.

(b) 由于 g 能除尽f，因此存在 h 使得$f(t)=h(t)g(t)$.因 $\deg f=\deg g$，因此我们有 $\deg h=0$.换句话说，$h(t)=k$，k 为K 的一个元素.

9.156　设 d 和d'都是首一多项式，d 能除尽d'且d'能除尽d.证明 $d=d'$.

证　☞ 根据习题 9.155，我们有 $d(t)=kd'(t)$，其中 $k\in K$.由于 d 和 d'都是首一多项式，从而首项系数都是 1，$kd'(t)$的首项系数是 k，于是 $k=1$ 且 $d=d'$.

欧几里得(Euclid)方法，多项式的根

这一小节用到下面的三个定理，它们的证明在习题 9.161～9.162 中.

定理 9.11(欧几里得除法算式)　设 $f(t)$和 $g(t)$是域 K 上的两个多项式，且 $g(t)\neq 0$，则存在多项式 $g(t)$和 $r(t)$使得

$$f(t)=q(t)g(t)+r(t),$$

其中或是 $r(t)\equiv 0$ 或是 $\deg r<\deg g$.

上面定理的公式化过程为所熟知的“长除法”.

定理 9.12 设 $a\in K$ 是域 K 上的多项式 $f(t)$ 的一个根，且 $\deg f=n$，则存在一个多项式 $q(t)$，$\deg q=n-1$，使得

$$f(t)=(t-a)q(t).$$

(就是说，$t-a$ 能除尽 $f(t)$.)

定理 9.13 设一个有理数 p/q 是多项式

$$f(t)=a_nt^n+\cdots+a_1t+a_0$$

的一个根，其中 $a_n,\cdots,a_1,a_0\in\mathbf{Z}$. 那么 p 整除常数项 a_0 且 q 整除首项系数 a_n.（特别地，若 $c=p/q$ 是一个整数，则 c 整除 a_0.）

9.157 设 $f(t)=t^3+t^2-8t+4$. 假定 $f(t)$ 有一个有理根，求 $f(t)$ 的全部根.

解 ☞ 由于 $f(t)$ 的首项系数是 1，因此 $f(t)$ 的有理根必是 $\pm1,\pm2,\pm4$ 中的整数. 注意 $f(1)\neq0$，$f(-1)\neq0$. 应用**综合除法**或用 $t-2$ 来除 $f(t)$，我们得到

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & +1 & -8 & +4 \\ & & 2 & +6 & -4 \\ \hline & 1 & +3 & -2 & +0 \end{array}$$

因此 $t=2$ 是一个根，并且 $f(t)=(t-2)(t^2+3t-2)$. 对 $t^2-3t-3=0$，应用二次公式，我们得 $f(t)$ 的根：$t=2$，$t=(-3+\sqrt{17})/2$，$t=(-3-\sqrt{17})/2$.

9.158 设 $g(t)=t^3-2t^2-6t-3$. 假定 $g(t)$ 有一个整数根，求 $g(t)$ 的全部根.

解 ☞ $g(t)$ 的整数根必在 $\pm1,\pm3$ 之中. 注意 $f(1)\neq0$. 应用综合除法，或用 $t+1$ 除 $g(t)$，我们得到

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -2 & -6 & -3 \\ & & -1 & +3 & +3 \\ \hline & 1 & -3 & -3 & +0 \end{array}$$

因此 $t=-1$ 是一个根且 $g(t)=(t+1)(t^2-3t-3)$. 现在我们能对 t^2-3t-3 应用二次公式，于是我们得到 $g(t)$ 的三个根：$t=-1$，$t=(3+\sqrt{21})/2$，$t=(3-\sqrt{21})/2$.

9.159 设 $h(t)=t^4-2t^3+11t-10$. 假定 $h(t)$ 有两个整数根，试求 $h(t)$ 的全部实根.

解 ☞ 整数根必在 $\pm1,\pm2,\pm5,\pm10$ 之中. 应用综合除法(或用 $t-1$，再用 $t+2$ 来除)得

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -2 & +0 & +11 & -10 \\ & & 1 & -1 & -1 & +10 \\ \hline -2 & 1 & -1 & -1 & +10 & +0 \\ & & -2 & +6 & -10 & \\ \hline & 1 & -3 & +5 & +0 & \end{array}$$

因此 $t=1$ 和 $t=-2$ 是根且 $h(t)=(t-1)(t+2)(t^2-3t+3)$. 再对 t^2-3t+5 应用二次公式知没有其他实根. 这就是说，$h(t)$ 的实根仅仅是 $t=1$ 和 $t=-2$.

9.160 设 $f(t)=2t^3-3t^2-6t-2$. 已知 $f(t)$ 有一个有理根，求 $f(t)$ 的全部根.

解 ☞ 有理根必在 $\pm1,\pm2,\pm1/2$ 之中. 检验每一可能的根，应用综合除法(或用 $2t+1$ 来除 $f(t)$)得

$$\begin{array}{r|rrrr} -1/2 & 2 & -3 & -6 & -2 \\ & & 1 & +2 & +2 \\ \hline & 2 & -4 & -4 & +0 \end{array}$$

于是 $t=-1/2$ 是一个根且

$$f(t)=(t+1/2)(2t^2-4t-4)=(2t+1)(t^2-2t-2).$$

现在，对 t^2-2t-2 可用二次公式. 于是得到 $f(t)$ 的三个根：$t=-1/2$，$t=1+\sqrt{3}$，$t=1-\sqrt{3}$.

9.161 证明定理 9.11.

证 ☞ 若 $f(t)=0$，或若 $\deg f<\deg g$，我们则有所要求的表示式 $f(t)=0g(t)+f(t)$. 现设 $\deg f$

$\geqslant \deg g$，例如

$$f(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$$

以及

$$g(t) = b_m t^m + \cdots + b_1 t + b_0,$$

其中 $a_n, b_m \neq 0$，且 $n \geqslant m$．我们作多项式

$$f_1(t) = f(t) - \frac{a_n}{b_m} t^{n-m} g(t). \tag{1}$$

（这是"长除法"中头一个减法步．）那么 $\deg f_1 < \deg f$．由归纳法，存在多项式 $q_1(t)$ 和 $r(t)$ 使得

$$f_1(t) = q_1(t) g(t) + r(t),$$

其中或是 $r(t) \equiv 0$ 或是 $\deg r < \deg g$．将 $f_1(t)$ 代入(1)式，解得

$$f(t) = \left[q_1(t) + \frac{a_n}{b_m} t^{n-m} \right] g(t) + r(t).$$

这是所要求的表达式．

9.162 证明定理 9.12．

证 ☞ 根据定理 9.11，存在 $q(t)$ 和 $r(t)$ 使得

$$f(t) = (t - a) q(t) + r(t), \tag{1}$$

其中 $r(t) \equiv 0$ 或 $\deg r < \deg(t - a) = 1$．因此 $r(t) = k$ 是一个常数．将 $t = a$ 和 $r(t) = k$ 代入(1)式，得

$$f(a) = (a - a) q(a) + k.$$

由于 $f(a) = 0$ 且 $a - a = 0$，因此我们得到 $k = r(t) = 0$．于是

$$f(t) = (t - a) q(t),$$

而且

$$n = \deg f = \deg(t - a) + \deg q = 1 + \deg q.$$

故 $\deg q = n - 1$．

9.163 证明定理 9.13．

证 ☞ 将 $t = p/q$ 代入 $f(t) = 0$ 得

$$a_n (p/q)^n + \cdots + a_1 (p/q) + a_0 = 0.$$

用 q^n 乘上式两端得

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + a_{n-2} p^{n-2} q^2 + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0. \tag{1}$$

由于 p 整除(1)的前 n 项，因此 p 必整除最后一项 $a_0 q^n$．由假设 p 和 q 互质，则 p 整除 a_0．同理，q 整除(1)的后 n 项，因此 q 整除第一项 $a_n p^n$．因 p 和 q 互质，因此 q 整除 a_n．

定理 9.14 设 $f(t)$ 是域 K 上的一个多项式，$\deg f = n$，则 $f(t)$ 在 K 中最多有 n 个根．

9.164 证明定理 9.4．

证 ☞ 对 n 用归纳法来证明．若 $n = 1$，则 $f(t) = at + b$ 且 $f(t)$ 有惟一根 $t = -b/a$．设 $n > 1$．若 $f(t)$ 没有根，则定理成立．设 $a \in K$ 是 $f(t)$ 的一个根，则

$$f(t) = (t - a) g(t), \tag{1}$$

其中 $\deg g = n - 1$．我们要求 $f(t)$ 的其他任何一个根也是 $g(t)$ 的一个根．设 $b \neq a$ 是 $f(t)$ 的另一个根．将 $t = b$ 代入(1)式得 $0 = f(b) = (b - a) g(b)$．由于 K 没有零因子，且 $b - a \neq 0$，因此必有 $g(b) = 0$．根据归纳法假设，$g(t)$ 最多有 $n - 1$ 个根．因此 $f(t)$ 除 a 之外最多有 $n - 1$ 个根，故 $f(t)$ 最多有 n 个根．

定理 9.15 设 $f(t)$ 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的一个多项式，复数 $z = a + bi (b \neq 0)$ 是 $f(t)$ 的一个根，则共轭复数 $\bar{z} = a - bi$ 也是 $f(t)$ 的一个根，并且 $c(t) = (t - z)(t - \bar{z}) = t^2 - 2at + a^2 + b^2$ 是 $f(t)$ 的一个因式．

9.165 证明定理 9.15．

证 ☞ 由于 $\deg c = 2$，因此存在 $q(t)$ 和 $M, N \in \mathbf{R}$ 使得

$$f(t) = c(t) q(t) + Mt + N. \tag{1}$$

$z=a+bi$ 是 $f(t)$和 $c(t)$的一个根.将 $t=a+bi$ 代入(1)式得

$$f(z)=c(z)g(z)+M(z)+N,$$

或

$$0=0q(z)+M(z)+N,$$

即

$$M(a+bi)+N=0.$$

因此 $Ma+N=0$ 且 $Mb=0$.因 $b\neq 0$,因此必有 $M=0$.于是 $0+N=0$ 或 $N=0$.故 $f(t)=c(t)q(t)$ 且 $\bar{z}=a-bi$ 也是$f(t)$的一个根.

9.166 设 $f(t)=t^4-3t^2+6t^2+25t-39$. 已知 $t=2+3i$ 是$f(t)$的一个根,求 $f(t)$的全部根.

解 ☞ 由于$2+3i$ 是 $f(t)$的一个根,因此 $2-3i$ 也是 $f(t)$的一个根且 $c(t)=t^2-4t+13$ 是 $f(t)$的一个因式.用 $c(t)$除 $f(t)$得

$$f(t)=(t^2-4t+13)(t^2+t-3).$$

对 t^2+t-3 应用二次公式得 $f(t)$的其他根.因此 $f(t)$有 4 个根:$2+3i,2-3i,(-1+\sqrt{13})/2,(-1-\sqrt{13})/2$.

9.167 设 $f(t)$是一个奇次实多项式.证明 $f(t)$必有一个实根.

证 ☞ 据定理 9.15 知,$f(t)$的复根必成对出现.代数学基本定理(习题 9.175)指出 $f(t)$有奇数个根.因此 $f(t)$至少有一个根是实的.

9.168 从几何上证明奇次实多项式 $f(t)$有一个实根.

证 ☞ 设 $f(t)$的首项系数是正的(否则,用 -1 乘 $f(t)$).由于 $\deg f=n$,n 是奇数,因此我们有

$$\lim_{t\to+\infty}f(t)=+\infty,\quad \lim_{t\to-\infty}f(t)=-\infty.$$

于是 $f(t)$的图形至少通过 t 轴一次,如图 9-4 所示.

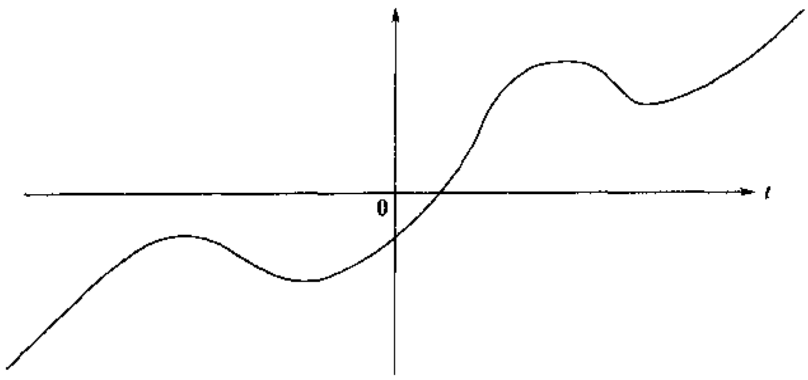


图 9-4

$K[t]$作为一个 PID 和 UFD

这一小节,证明一个域 K 上的多项式环$K[t]$是一个主理想整环和一个惟一因子分解整环.(有关定义,请读者参考 9.5 节.)

定理 9.16 域 K 上的多项式环$K[t]$是一个主理想整环.若 J 是$K[t]$中的一个理想,则存在惟一的首一多项式 d,它生成 J,即能除尽每一多项式 $f\in J$.

9.169 证明定理 9.16.

证 ☞ 设 d 是 J 中次数最低的一个多项式.由于我们能用一个非零数乘 d 后仍在 J 中,因此不失一般性,可假定 d 是一个首一多项式.现设 $f\in J$.由除法算式,存在多项式 q 和 r 使得 $f=qd+r$,其中或是 $r=0$ 或是 $\deg r<\deg d$.现在 $f,d\in J$ 蕴含 $qd\in J$,从而 $r=f-qd\in J$.但是,d 是 J 中次数最低的多项式,因此 $r=0$ 且 $f=qd$,即 d 能除尽 f.我们尚需证明 d 是惟一的.设 d'是另一个

生成 J 的首一多项式，则 d 能除尽 d' 且 d' 能除尽 d．因 d 和 d' 都是首一的，因此 $d=d'$．定理得证．

定理 9.17　设 f 和 g 是 $K[t]$ 的两个非零多项式，则存在惟一的首一多项式 d 使得(i) d 能除尽 f 和 g 以及(ii)若 d' 能除尽 f 和 g，则 d' 能除尽 d．

9.170　证明定理 9.17．

证　☞ 集合 $I=\{mf+ng:m,n\in K[t]\}$ 是一个理想．设 d 是生成 I 的首一多项式．注意到 $f,g\in I$，因此 d 能除尽 f 和 g．现设 d' 能除尽 f 和 g．令 J 是由 d' 生成的理想．那么，$f,g\in J$，因而 $I\subseteq J$．于是 $d\in J$，从而正如我们所要求的 d' 能除尽 d．我们尚需证明 d 是惟一的．若 d_1 是 f 和 g 的另一(首一的)最高公因式，则 d 整除 d_1 且 d_1 整除 d．因 d 和 d_1 都是首一的，因此 $d=d_1$．定理得证．

注　定理 9.17 中的多项式 d 称为 f 和 g 的**最高公因式**．若 $d=1$，则称 f 和 g 是**互质的**．

推论 9.18　设 d 是多项式 f 和 g 的最高公因式，则存在多项式 m 和 n 使得

$$d=mf+ng.$$

特别地，若 f 和 g 是互质的，则存在多项式 m 和 n 使得

$$mf+ng=1.$$

9.171　证明推论 9.18．

证　☞ 从定理 9.17 的证明可知，d 生成理想 $I=\{mf+ng:m,n\in K[t]\}$．因此存在 $m,n\in K[t]$ 使得 $d=mf+ng$．

9.172　定义不可约多项式．

解　☞ 设多项式 $p\in K[t]$ 有正的次数，即 p 不是一个常数，并且若 $p=fg$ 意指 f 或 g 是一个纯量，则说 p 是不可约的．

引理 9.19　设 $p\in K[t]$ 是不可约的．若 p 能除尽 $f,g\in K[t]$ 的积 fg，则 p 能除尽 f，或 p 能除尽 g．而且一般地，若 p 能除尽 n 个多项式的积 $f_1f_2\cdots f_n$，则 p 能除尽它们之中的一个多项式．

9.173　证明引理 9.19．

证　☞ 设 p 能除尽 fg 但不能除尽 f．由于 p 是不可约的，因此 f 和 p 必为互质的．于是，存在多项式 $m,n\in K[t]$ 使得

$$mf+np=1.$$

用 g 乘等式两端得

$$mfg+npg=g.$$

因 p 能除尽 fg，因而能除尽 mfg．且 p 能除尽 npg．故 p 能除尽和 $g=mfg+npg$．

现设 p 能除尽 $f_1f_2\cdots f_n$．若 p 能除尽 f_1，则所要证明的结论成立．若 p 不能除尽 f_1，且应用上面的结果，p 能除尽 $f_2\cdots f_n$．对 n 应用归纳法，p 能除尽 $f_2,\cdots,f_n$ 中的一个多项式．引理得证．

定理 9.20(惟一因式分解定理)　设 f 是 $K[t]$ 的任一非零多项式，则 f 可惟一地(除顺序之外)写成一个乘积 $f=kp_1p_2\cdots p_n$，此处 $k\in K$ 且诸 p_i 是 $K[t]$ 的首一不可约多项式．

9.174　证明定理 9.20．

证　☞ 首先，我们证明这样的乘积是存在的．若 f 是不可约多项式或 $f\in K$，则显然存在这样一个乘积．另一方面，设 $f=gh$，其中 f 和 g 都不是纯量，则 g 和 h 的次数小于 f 的次数．由归纳法，我们可以假定 $g=k_1g_1g_2\cdots g_r$ 以及 $h=k_2h_1h_2\cdots h_s$，此处 $k_1,k_2\in K$ 且 g_i 和 h_j 都是不可约多项式．因此

$$f=(k_1k_2)g_1g_2\cdots g_rh_1h_2\cdots h_s$$

是我们所要求的表示式．

其次，f 的这样的乘积是惟一的(除顺序之外)．设

$$f=kp_1p_2\cdots p_n=k'q_1q_2\cdots q_m,$$

其中 $k,k'\in K$ 且 $p_1,\cdots,p_n,q_1,\cdots,q_m$ 都是首一不可约多项式．现在 p_1 整除 $k'q_1q_2\cdots q_m$．由于 p_1 是不可约的，因此根据引理 9.19，它必整除诸 q_i 的一个，比方说 p_1 整除 q_1．由于 p_1 和 q_1 都是不可

约的且是首一的.因此 $p_1=q_1$.于是 $kp_2\cdots p_n=k'q_2\cdots q_m$.由归纳法,我们有 $n=m$,并且适当调换 q_i 的顺序便有 $p_2=q_2,\cdots,p_n=q_m$.我们还有 $k=k'$.定理得证.

9.175　不加证明地叙述代数学基本定理.

解　☞ 复数域 **C** 是封闭的.这就是说,**C** 上的任一个次数≥1 的多项式 $f(t)$ 在 **C** 中有一个根,因而 $f(t)$ 可惟一地(除顺序之外)表示成乘积

$$f(t)=k(t-r_1)(t-r_2)\cdots(t-r_n),$$

其中 $k,r_i\in\mathbf{C}$ 且 $n=\deg f$.

定理 9.21　设 $f(t)$ 是实数域 **R** 上的任一个次数 $n\geqslant1$ 的多项式,则 $f(t)$ 可惟一地(除顺序之外)表示成乘积

$$f(t)=kp_1(t)p_2(t)\cdots p_m(t),$$

其中 $k\in\mathbf{R}$ 且诸 $p_i(t)$ 都是次数为 1 或 2 的首一不可约多项式.

9.176　证明定理 9.21.

证　☞ 根据代数学基本定理,我们有

$$f(t)=k(t-r_1)(t-r_2)\cdots(t-r_n),$$

其中 $k、r_i\in\mathbf{C}$.由于 k 是 $f(t)$ 的首项系数,因此 $k\in\mathbf{R}$,而且,若 $r_j=a+bi$ 是一个复根,则 $\bar{r}_j=a-bi$ 也是一个根.并且

$$p(t)=(t-r_j)(t-\bar{r}_j)=t^2-2at+a^2+b^2$$

是 **R** 上的一个多项式,$p(t)$ 是首一的.由于 $p(t)$ 的根不是实数,因此 $p(t)$ 在 **R** 上是不可约的.定理得证.

第十章 语言、文法和自动机

10.1 单词

10.1 定义一集合 A 上的一个单词或字符串,并给出一个例子.

解 ☞ 设 A 是一个**字母表**,即其元素称为**字母**的集合,来自于 A 的(或者 A 上的)一个**单词(字符串)**是一个有限的字母序列.例如

$$u = ababb, \quad v = accbaa$$

是来自于字母表 $A=\{a,b,c\}$ 的单词.空序列用 λ(希腊字母)或 1 表示,亦定义为来自 A 的一个单词.我们常常把记号 aa 缩写成 a^2, aaa 缩写成 a^3,等等.这样,上面的单词写成 $u=abab^2$ 和 $v=ac^2ba^2$. A 上的所有单词的集合用 A^* 来表示.

注 若无特别申明,字母表 A 将是有限的,符号 u,v,w 留作 A 上的单词之用,以及 A 的元素来自于字母 a,b,c.

10.2 定义联结运算,并给出例子.

解 ☞ 考虑一字母表 A 上的两个单词 u 和 v. u 和 v 的**联结**,记作 uv,它是 u 的字母后面紧跟着写 v 的字母得到的 A 上的单词.例如,习题 10.1 中 $u=abab^2$, $v=ac^2ba^2$,我们有

$$uv = abab^2ac^2ba^2, \quad vu = accbaaababb.$$

这样,联结是不可交换的.我们仍然定义 $u^2=uu$, $u^3=u^2u$.一般地, $u^{n+1}=u^nu$.

10.3 考虑单词 $u=a^2ba^3b^2$ 和 $v=bab^2$.求(a) uv, (b) vu, (c) v^2.

解 ☞ 先写第一个单词的字母,接着写第二个单词的字母:

(a) $uv=(a^2ba^3b^2)(bab^2)=a^2ba^3b^3ab^2$,

(b) $vu=(bab^2)(a^2ba^3b^2)=bab^2a^2ba^3b^2$,

(c) $v^2=vv=(bab^2)(bab^2)=bab^3ab^2$.

10.4 设 $u=a^2b$, $v=b^3ab$.求:(a) uvu, (b) λu, $u\lambda$, $u\lambda v$.

解 ☞ (a) 写出 u 的字母,再写 v 的字母,最后写 u 的字母,得到

$$uvu = a^2b^4aba^2b.$$

(b) 由于 λ 是空单词,因此

$$\lambda u = u\lambda = u = a^2b.$$

和

$$u\lambda v = uv = a^2b^4ab.$$

10.5 定义一个单词 w 的子单词和初始节.

解 ☞ 设单词 $w=v_1uv_2$,则 u 称为 w 的一个**子单词**.若 $v_1=\lambda$ 为空单词,则 u 称为 w 的**初始节**.注意,由于 $w=\lambda\lambda w$,因此 λ 是 w 的一个子单词.并且,由于 $w=\lambda w\lambda$,因 w 是 w 的一个子单词.

10.6 设 $w=abcd$.求 w 的所有子单词.它们之中哪些是 w 初始节.

解 ☞ 子单词是 $\lambda,a,b,c,d,ab,bc,cd,abc,bcd,w=abcd$.初始节是 λ,a,ab,abc 和 $abcd$.我们强调,尽管 $v=acd$ 的字母都属于 w,但它不是 w 的一个子单词.

10.7 定义单词 u 的长度,记作 $\|u\|$ 或 $l(u)$.

解 ☞ u 的长度等于其字母序列的元素数目.就是说,若 $u=a_1a_2\cdots a_n$,则 $\|u\|=n$.且若 $u=\lambda$,则 $\|u\|=0$.

10.8 设 u 和 v 是习题 10.3 中的单词.求 $\|u\|$, $\|v\|$, $\|uv\|$, $\|vu\|$ 和 $\|v^2\|$.

解 ☞ 计算每个单词的字母数目得到 $\|u\|=8$, $\|v\|=4$, $\|uv\|=12$, $\|vu\|=12$, $\|v^2\|=8$.

10.9 对于 A 上的任意两个字母 u 和 v. 证明:(a) $\| uv \| = \| u \| + \| v \|$;(b) $\| uv \| = \| vu \|$.

证 ☞ (a)设 $\| u \| = r$, $\| v \| = s$,则 uv 会有 u 的 r 个字母及其后 v 的 s 个字母.因此

$$\| uv \| = r + s = \| u \| + \| v \|.$$

(b) 应用(a),得

$$\| uv \| = \| u \| + \| v \| = \| v \| + \| u \| = \| vu \|.$$

10.10 定义自由半群.

解 ☞ 设 F 是字母表 A 上的所有单词的集合,具有联结运算.显然该运算是结合的且空单词 λ 是一个单位元素.因此 F 是一个半群,称为 A 上的**自由半群**.注意 F 满足右和左消去律.

10.2 语言

10.11 定义一个集合 A 上的语言.

解 ☞ 一字母表 A 上的任一单词集合 L,即 A^* 的子集称为 A 上的一个语言.

10.12 用文字叙述 $A = \{a, b\}$ 上的下列语言:

(a) $L_1 = \{a, ab, ab^2, \cdots\}$;

(b) $L_2 = \{a^m b^n : m > 0, n > 0\}$;

(c) $L_3 = \{a^m b^m : m > 0\}$;

(d) $L_4 = \{b^m a b^n : m > 0, n > 0\}$.

解 ☞ (a) L_1 是由开始为一个 a,其后是一个或更多个 b 的所有的单词组成的.

(b) L_2 是由开始为一个或更多个 a,其后是一个或更多个 b 的所有的单词组成的.

(c) L_3 是由开始为一个或更多个 a,其后是同样个数 b 的所有单词组成的.

(d) L_4 由恰好是既不是开头又不是最后字母的一个 a,即在 a 的前面和后面有一个或更多个 b 的所有单词组成.

10.13 设 K 和 L 是一字母表 A 上的语言.定义 A 上的语言 KL.

解 ☞ KL 是 A 上的所有联结 K 的单词和 L 的单词形成的单词组成,即

$$KL = \{w : w = uv, \text{其中 } u \in K, v \in L\}.$$

10.14 设 $K = \{a, ab, a^2\}$, $L = \{b^2, aba\}$ 是 $A = \{a, b\}$ 上的语言.求(a) KL, (b) LL.

解 ☞ (a)联结 K 的单词和 L 的单词得到

$$KL = \{ab^2, a^2ba, ab^3, ababa, a^2b^2, a^3ba\}.$$

(b) 联结 L 的单词和 L 的单词得到

$$LL = \{b^4, b^2aba, abab^2, aba^2ba\}.$$

10.15 设 L 是 A 上的语言.定义:(a) L^n, $n \geq 0$, (b) L^*.

解 ☞ (a) $L^0 = \{\lambda\}$, $L^1 = L$, $L^{n+1} = L^n L$, $n > 0$.

(b) L^* 由单词的字母是 L 中单词的字母的所有单词组成,即

$$L^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} L^k.$$

注意,L^* 包含空单词 λ 且这个定义与 A^*(习题 10.1)的定义一致.

10.16 考虑 $A = \{a, b, c\}$ 上的语言 $L = \{ab, c\}$.求(a) L^0, (b) L^3, (c) L^{-2}.

解 ☞ (a) 根据定义,$L^0 = \{\lambda\}$.

(b) 从 L 的所有 3 个单词形成的序列得到

$$L^3 = \{ababab, ababc, abcab, abc^2, cabab, cabc, c^2ab, c^3\}.$$

(c) 一个语言的负数幂没有定义.

10.17 设 $A = \{a, b, c\}$.求 L^*,其中(a) $L = \{b^2\}$, (b) $L = \{a, b\}$, (c) $L = \{a, b, c^3\}$.

解 ☞ (a) L^* 由所有单词 b^n 组成,其中 n 为偶数(包含空单词).

(b)L^*由 a 和 b 的单词组成.

(c)L^*由 A 上的所有具有下面性质的单词组成:完全由 c 合成的每个最大子单词的长度能被 3 除尽.

10.18 考虑一个可数的字母表 $A=\{a_1,a_2,\cdots\}$.设 L_k 是 A 上的语言,它由那些单词 w 组成,w 的字母下标之和等于 k.例如,$a_2a_3a_3a_6a_4$ 属于 L_{18}.求 L_4.

解 ☞ 在 L_4 的单词中不能用 n 大于 4 的字母 a_n.而且,在 L_4 中不会有多于 4 个字母的单词.因此得到 L_4 的单词如下:

$$a_1a_1a_1a_1,\ a_1a_1a_2,\ a_1a_2a_1,\ a_2a_1a_1,\ a_1a_3,\ a_3a_1,\ a_2a_2,\ a_4.$$

10.19 考虑习题 10.18 中 $A=\{a_1,a_2,\cdots\}$上的语言 L_k.证明 L_k 是有限的.

证 ☞ 只有有限个 a,即 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 可作为 L_k 中单词的字母,并且 L_k 中没有多于 k 个字母的单词.因此,L_k 是有限的.

10.20 考虑一个可数的字母表 $A=\{a_1,a_2,\cdots\}$.证明:(a)A^*是可数的;(b)A 上的任一语言 L 都是可数的.

证 ☞ (a)A^*是习题 10.18 中定义的有限集合 L_k 的可数的并集.因此 A^*是可数的.

(b)L 是可数集 A^*的一个子集,因此 L 也是可数的.

10.3 正则式和正规语言

10.21 定义字母表 A 上的一个正则式 r 以及 A 上的用 r 来定义的语言 $L(r)$.

解 ☞ A 上的一个**正则式** r 是来自于 A,并且有 5 个新元素:

"(",")","*","∨","λ"

的一特殊类型的字符串.此处"∨"读作"或","*"读作"星".A 上的表达式 r 和语言 $L(r)$是对 r 的长度归纳地定义如下:

基本准则:

(i) 没有长度为 0 的正则式.

(ii) 长度为 1 的正则式是 λ 和每个 $a\in A$.$L(\lambda)=\{\lambda\}$,$L(a)=\{a\}$.

(iii) 只有长度为 2 的正则式是(　),并且由它定义的语言是空集,即该语言没有元素.

归纳步骤:

(i) 设 r 是定义一个语言的正则式.那么(r)是一个正则式且 $L((r))=L(r)$,以及(r^*)是定义语言 L^*的正则式.

(ii) 设 r_1 和 r_2 是分别定义语言 L_1 和 L_2 的正则式.那么$(r_1\vee r_2)$是定义语言 $L_1\cup L_2$ 的正则式,并且(r_1r_2)是定义语言 L_1L_2 的正则式.

所有的正则式都是按这种方法形成的.

注 通常,有可能的话,我们从正则式省去括号.由于语言的联结和语言的并是结合的,因此许多括号可以省略.而且,为采用方便,"*"优先于联结以及联结优先于"∨",其他括号可以省略.

10.22 定义字母表 A 上的一个**正规集**或**正规语言** L.

解 ☞ 若 L 是用 A 上的一个正则式 r 来定义的语言,即若有一个正则式 r 使得 $L=L(r)$,则 L 是一个正规语言.

10.23 设 $A=\{a,b\}$,$r=(a\vee b)^*bb$.(a)说明 r 是 A 上的一个正则式,(b)描述 A 上的由 r 定义的语言 $L(r)$.

解 ☞ (a) 这里,由于 a 和 b 都属于 A,因而它们都是正则的.因此$(a\vee b)$和(bb)是正则的,于是$(a\vee b)^*$是正则的,从而$(a\vee b)^*bb$ 是正则的.

(b) 注意$(a\vee b)^*=A^*$是由 a 和 b 的所有单词组成的,因此 L 是以 $b^2=bb$ 为结尾的所有单词组成的.

10.24 设 $A=\{a,b\}$.判定(a)$r=a^*$,(b)$r=aa^*$中每一个 r 是否是 A 上的一个正则式,若

是,则描述 $L(r)$.

解 ☞ (a) 注意 a^*是(a^*)的一种缩写.由于 $a\in A$ 是正则的,因此 $r=a^*$是一个正则式.$L(r)$是 a 的所有单词(包括空单词 λ)组成的.

(b) 这里,由于 a 和 a^*都是正则的,因此 $r=aa^*$是正则的.而且,$L(r)$是由 a 的所有单词(包括空单词)组成的.

10.25 对(a)$r=ab^*$,(b)$r=a\vee b^*$,$r=a\wedge b^*$重复习题 10.24.

解 ☞ (a) 由于 a 和 b^*都是正则的,因此 $r=ab^*$也是正则的.$L(r)$是以 a 开始而其后没有或有多个 b 的所有单词组成.

(b) 由于 a 和 b^*都是正则的,因此 $r=a\vee b^*$也是正则的.$L(r)$是由单词 $w=a$ 和任一 b 的单词组成的.

(c) 由于$\wedge$不是伴随 A 的 5 个元素之一,因此 r 不是正则的.

10.26 设 $A=\{a,b,c\}$,$w=ac$.说明 w 是否属于$L(r)$,此处(a)$r=ab^*c^*$,(b)$r=(a^*b\vee c)^*$.

解 ☞ (a) 是.因 $w=a\lambda c$ 以及 $\lambda\in L(b^*)$且 $c\in L(c^*)$.

(b) 否.注意 $L(a^*b)$是由单词 a^nb 组成的.因此,若 a 出现在$L(r)$的任一单词中,则跟在后面只能是一个 a 或b 而不能是c.

10.27 设 $A=\{a,b,c\}$,$w=abc$.说明 w 是否属于$L(r)$,此处(a)$r=a^*\vee(b\vee c)^*$,(b)$r=a^*(b\vee c)^*$.

解 ☞ (a) 否.这里 $L(r)$由 a 的单词或者 b 和 c 的单词组成.

(b) 是.因 $a\in L(a^*)$且 $bc\in L((b\vee c)^*)$.

10.28 对 $A=\{a,b\}$上的正则式 $r=abb^*a$,求 $L(r)$.

解 ☞ $L(r)$是以 a 开头和结尾并且中间是由一个或更多个 b 的所有单词组成.

10.29 对 $A=\{a,b\}$上的正则式 $r=b^*ab^*ab^*$,求 $L(r)$.

解 ☞ $L(r)$由恰好有两个 a 的所有单词组成.

10.30 求 $A=\{a,b\}$上的一个正则式使得 $L(r)=\{a^mb^n: m>0, n>0\}$.(见习题 10.12(b).)

解 ☞ 注意 $L(r)$由开头为一个或更多个 a,其后是一个或更多个 b 的所有单词组成.因此,我们可令 $r=aa^*bb^*$.(注意 r 不是惟一的,例如 $r=a^*ab^*b$ 也是一个解.)

10.31 求 $A=\{a,b\}$上的一个正则式 r 使得$L(r)=\{b^mab^n: m>0, n>0\}$.(见习题 10.12(d).)

解 ☞ 注意 $L(r)$由这样的一些单词 w 组成.w 的字母除了一个既不是开头又不是最后的字母 a 之外其余都是字母 b.因此 $r=bb^*abb^*$是一个解.

10.32 求 $A=\{a,b\}$上的一个正则式 r 使得$L=\{a^mb^m: m>0\}$.(见习题 10.12(c).)

解 ☞ 不存在这样的 r,即该语言不是正规的.在习题 10.46 中给出它的证明.

10.4 有限状态自动机

10.33 定义一个有限状态自动机(FSA).

解 ☞ 一个有限状态自动机,或简单地一个自动机 M 由五部分组成:

(1) 一个有限的输入集合(字母表)A.

(2) 一个有限的内部状态集合 S.

(3) S 的一个子集Y(其元素称为**接受**或者**"是"状态**).

(4) S 中的一个初始状态 s_0.

(5) 一个从 $S\times A$ 到S 的下一状态函数.

当我们要指明自动机 M 的五个部分时，这样的一个自动机用 $M=\langle A, S, Y, s_0, F\rangle$ 来表示.

有些教科书定义(5)中下一状态函数 $F: S\times A\to S$ 为对每一个 $a\in A$ 的函数 $f_a: S\to S$ 的集合. 这就是说，每一个输入 a 可以被认为是在自动机的状态中产生一个转换. 置 $F(s,a)=f_a(s)$ 表示两种定义是等价的.

10.34 给出一个有限状态自动机 M 的例子.

解 ☞ 定义 M 的五个部分如下：

(1) $A=\{a,b\}$，输入符号.

(2) $S=\{s_0,s_1,s_2\}$，内部状态.

(3) $Y=\{s_0,s_1\}$，接受状态.

(4) s_0，初始状态.

(5) 下一状态函数 $F: S\times A\to S$ 定义为

$$F(s_0,a)=s_0,\quad F(s_0,b)=s_1,\quad F(s_1,a)=s_0,$$
$$F(s_1,b)=s_2,\quad F(s_2,a)=s_2,\quad F(s_2,b)=s_0.$$

F	a	b
s_0	s_0	s_1
s_1	s_0	s_2
s_2	s_2	s_2

图 10-1

那么，M 是一个自动机，下一状态函数常常用一个表给出，如图 10-1 所示.

10.35 定义一个有限状态自动机 M 的状态图 $D=D(M)$，并给出一个例子. 通常，一个自动机是用其状态图而不是列出它的 5 个部分来定义.

解 ☞ $D(M)$ 是如下的标号有向图. $D(M)$ 的顶点是 S 的状态，一个接受状态用双圈表示. 在 $D(M)$ 中，从状态 s_j 到 s_k 若 $F(s_j,a)=s_k$ 或等价地 $f_a(s_j)=s_k$，则有一个标注输入 a 的箭头(有向边).(为记号方便，我们对所有产生一个给定的状态转换的输入只有一个箭头，而并不是对每个这样的输入都有一个箭头.)而且，初始状态标上一个特殊的箭头，其终端在顶点 s_0 但无起始顶点.

习题 10.34 中自动机的状态图如图 10-2 所示. 注意，由于 $F(s_2,a)=s_2$，$F(s_2,b)=s_2$，因此从 s_2 到 s_2 的箭头标上 a 和 b.

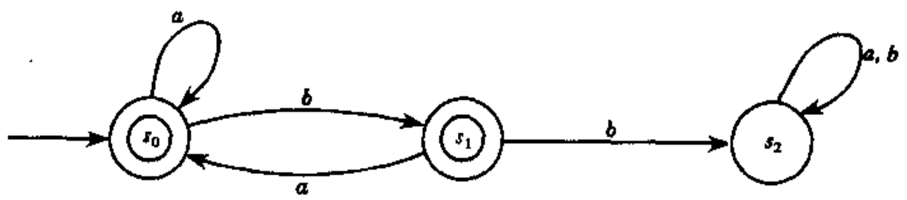


图 10-2

10.36 设 M 是一个具有输入 A 的自动机. 定义 A 上的由 M 确定的语言 $L(M)$.

解 ☞ A 上的每一个单词 $w=a_1a_2\cdots a_n$ 确定一个状态转换序列

$$s_0\to s_1\to s_2\to\cdots\to s_n,$$

其中 s_0 是初始状态，$s_i=F(s_{i-1},a_i)$，$i>0$. 等价地，单词 w 确定图 $D(M)$ 的一条通路 P. 它按标注 w 中的字母的箭头序列起始于 s_0 从顶点到顶点.

若最后状态 s_n 是 Y 中的一个接受状态，则说 M **识别或接受** w. M 的语言 $L(M)$ 是 A 上的为 M 所接受的所有单词的集合.

10.37 考虑图 10-2 的自动机 M. 判定单词 w 是否为 M 所接受，此处(a) $w=ababba$，(b) $w=baab$，(c) $w=\lambda$.

解 ☞ (a)由图 10-2 和单词 $w=ababba$ 得到通路

$$P=s_0\xrightarrow{a}s_0\xrightarrow{b}s_1\xrightarrow{a}s_0\xrightarrow{b}s_1\xrightarrow{b}s_2\xrightarrow{a}s_2.$$

最后的状态 s_2 不在 Y 中，因此 w 不为 M 所接受.

(b)单词 $w=baab$ 确定通路

$$P=s_0\xrightarrow{b}s_1\xrightarrow{a}s_0\xrightarrow{a}s_0\xrightarrow{b}s_1.$$

最后的状态 s_1 在 Y 中，因此 w 为 M 所接受.

(c)这里,由于 w 是空单词,所以最后的状态是初始状态.因 s_0 属于 Y,因此 λ 为 M 所接受.

10.38　叙述图 10-2 的自动机 M 的语言 $L(M)$.

解 ☞ 由于(1)我们只能在相继两个 b 之后进入状态 s_2,(2)我们决不离开 s_2,(3)只有状态 s_2 是拒受状态,因此 $L(M)$是 A 上的所有没有相继两个 b 的单词组成的.

下面的定理给出正规语言和自动机之间的基本关系.

定理 10.1　一个字母表 A 上的一个语言 L 是正规语言的充分必要条件是:存在一个有限状态自动机 M 使得 $L = L(M)$.

10.39　设 $A = \{a, b\}$,构造一个自动机 M,它恰恰接受 A 上的那些有偶数个 a 的单词.例如,$aababbab$, aa, bbb, $ababaa$ 为 M 所接受,但 $ababa$, aaa, $bbabb$ 将被 M 拒受.

解 ☞ 我们只需两个状态 s_0 和 s_1.我们假设 M 处于 s_0 或 s_0 是根据 a 的数目与给定步数是偶或是奇相符合而定.(这样 s_0 是一个接受状态,而 s_1 是一个拒受状态.)于是只有 a 将转换状态,而且,s_0 是初始状态.M 的状态图如图 10-3 所示.

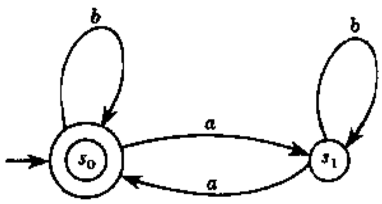
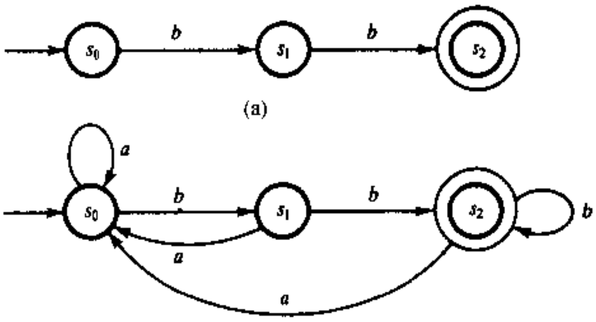


图 10-3



(a)

(b)

图 10-4

10.40　设 $A = \{a, b\}$.构造一个自动机 M,它恰恰接受 A 上那些以两个 b 结尾的单词.

解 ☞ 由于 b^2 为 M 所接受,但 λ 或 b 不为接受,因此我们需要 3 个状态 s_0, s_1 和 s_2,其中 s_0 为初始状态,从 s_0 到 s_1 和从 s_1 到 s_2 有标注 b 的箭头.而且 s_2 是一个接受状态,但 s_0 和 s_1 不是接受状态.这就给出图 10-4(a).另一方面,若有一个 a,我们则要回到 s_0,以及我们若处在 s_2 且有一个 b,我们则要停留在 s_2.加上这些条件给出所要求的自动机如图 10-4(b)所示.

10.41　设 $A = \{a, b\}$.构造一个自动机 M.它恰恰接受 A 上那些单词中 b 的数可被 3 整除.

解 ☞ 我们需要 3 个状态 s_0, s_1 和 s_2,其中 s_0 为初始状态.从 s_0 到 s_1,从 s_1 到 s_2 以及从 s_2 回到 s_0 需要有标注 b 的箭头.按模 3 计算 b 的数目以确定所处状态.这样 s_0 是一个接受状态但 s_1 或 s_2 则不是.标注 a 的箭头不转换状态.所要求的自动机如图 10-5 所示.

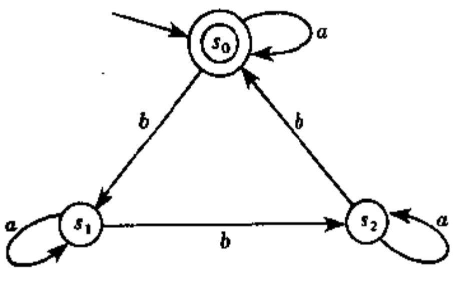


图 10-5

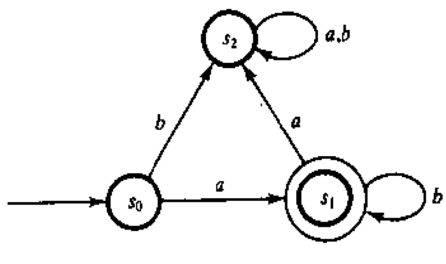


图 10-6

10.42　设 $A = \{a, b\}$.构造一个自动机 M,它接受习题 10.12 的语言 L_1.

解 ☞ 见图 10-6.

10.43　设 $A = \{a, b\}$.构造一个自动机 M,它将接受语言 $L = \{a^m b^n : m$ 和 n 为正整数$\}$.(见

习题 10.12(b).)

解 ☞ 见图 10-7.

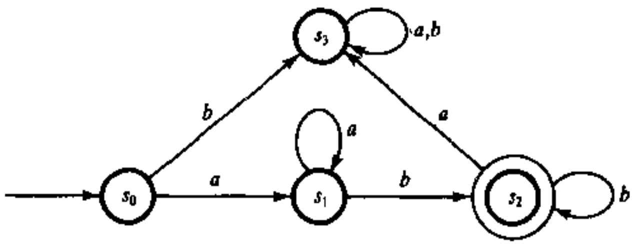


图 10-7

10.44 设 $A=\{a,b\}$. 构造一个自动机 M, 它将接受语言 $L=\{b^m ab^n : m$ 和 n 为正整数$\}$. (见习题 10-12(d).)

解 ☞ 见图 10-8.

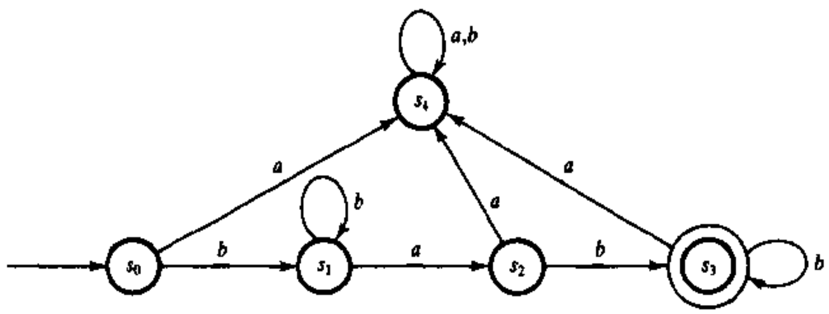


图 10-8

定理 10.2(抽吸引理) 设(i) A 上的一个自动机 M 有 k 个状态;(ii) w 是 A 上的为 M 所接受的单词;(iii) $\| w \| > k$. 那么, 若 $w=xyz$, 则对于每一个正整数 m, $w_m = xy^m z$ 为 M 所接受.

10.45 证明定理 10.2.

证 ☞ 设 $w=a_1a_2\cdots a_n$, $P=(s_0,s_1,\cdots,s_n)$ 为 w 所确定的相应的状态序列. 根据假设, $n>k$, k 为状态的数目. 因此 P 中必有两个状态相同, 例如 $s_i=s_j$, 其中 $i<j$. 设 $x=a_1a_2\cdots a_i$, $y=a_{i+1}\cdots a_j$, $z=a_{j+1}\cdots a_n$. 如图 10-9 所示的 xy 在 $s_i=s_j$ 终止且 xy^m 也在 s_i 终止. 因此, $w_m=xy^m z$ 在一个接受状态 s_n 终止. 定理得证.

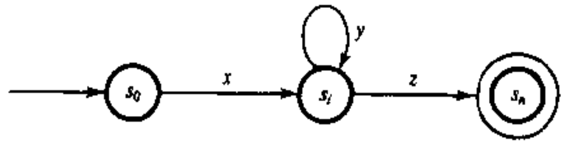


图 10-9

10.46 证明语言 $L=\{a^m b^m : m$ 为正整数$\}$不是正规的. (见习题 10.32.)

证 ☞ 设 L 是正规的. 据定理 10.1, 存在一个有限状态自动机 M 接受 L. 假定 M 有 k 个状态. 设 $w=a^k b^k$, 则 $|w|>k$. 由抽吸引理(定理 10.2), $w=xyz$ 为 M 所接受, 其中 y 非空, $w_2=xy^2z$ 也为 M 所接受. 若 y 仅仅由 a 组成或仅仅由 b 组成, 则 w_2 没有相同数目的 a 和 b. 若 y 含有 a 和 b, 则 w_2 将有 a 跟在 b 的后面. 无论那种情形, w_2 不属于 L, 这就产生矛盾. 故 L 不是正规的.

10.47 设 L 是 A 上的语言, 它为自动机 $M=\langle A,S,Y,s_0,F\rangle$ 所接受. 求一个接受 L^c 的

自动机N，L^c由A上的那些不属于L的单词组成.

解 ☞ 只要交换M中的接受状态和拒受状态便得到N.于是，当且仅当w不为M所接受，即当且仅当w属于L^c时，w为新的自动机N所接受.写成式子的话，

$$N=\langle A, S, S\setminus Y, s_0, F\rangle.$$

10.48　设$M=\langle A, S, Y, s_0, F\rangle$和$M'=\langle A, S', Y', s_0', F'\rangle$是同一字母表$A$上的分别接受语言$L(M)$和$L(M')$的自动机.构造一个$A$上的恰好接受$L(M)\cap L(M')$的自动机$N$.

解 ☞ 设$S\times S'$是N的状态集合.若s和s'分别为M和M'的接受状态，则令(s, s')是N的一个接受状态，且令(s_0, s'_0)是N的初始状态.N的下一状态函数$G:(S\times S')\times A\to(S\times S')$定义为

$$G((s,s'),a)=(F(s,a),F'(s',a)).$$

那么，N将恰好接受$L(M)\cap L(M')$中的那些单词.

10.49　重复习题10.48，只是现在构造一个A上的恰好接受$L(M)\cup L(M')$的自动机N.

解 ☞ 我们再设$S\times S'$是N的状态集合且(s_0, s'_0)是N的初始状态.现设$(S\times Y')\cup(Y\times S')$是$N$的接受状态.下一状态函数$G$定义为

$$G((s,s'),a)=(F(s,a),F'(s',a)).$$

那么N将恰好接受$L(M)\cup L(M')$中的那些单词.

10.50　构造$A=\{a, b\}$上的一个自动机M，它接受来自A的那些使得a的数目是偶数和b的数目可被3整除的单词.

解 ☞ 应用习题10.39，10.41和10.48得到的自动机M在图10-10中.

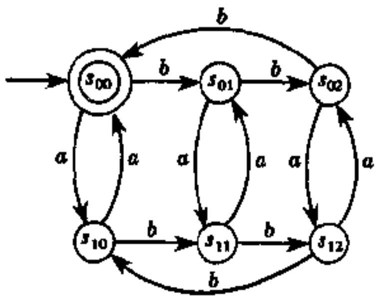


图10-10

10.51　构造$A=\{a, b\}$上的一个自动机M，它接受来自A的那些a的数目为偶数或b的数目可被3整除的单词.

解 ☞ 由习题10.49和10.50，假如在图10-10中我们令s_{00}，s_{01}，s_{02}和s_{10}是接受状态，则图10-10便是这样的自动机M的图.

10.52　构造$A=\{a, b\}$上的一个自动机M，它将接受来自A的那些b的数目不被3整除的单词.

解 ☞ 图10-5给出接受b的数目可被3整除的单词.于是只要改变该图使得s_0是拒受状态，而s_1和s_2是接受状态，便得到所要求的自动机M.

10.53　求为图10-11中自动机M所接受的语言$L(M)$.

解 ☞ 一个单词w到达接受状态s_4且停留在s_4当且仅当w包含$aabb$作为一个子单词.$L(M)$由所有这样的单词组成.

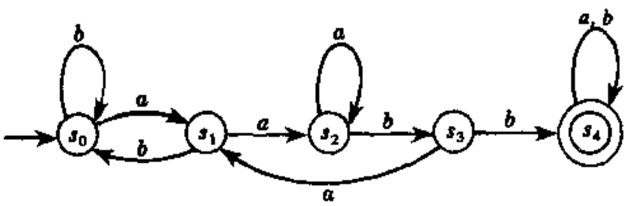


图10-11

10.54　描述为图10-12中的自动机所接受的语言L的单词w.

解 ☞ w的每一个a不转换状态系统的状态，而w的每个b则转换系统的状态：从s_i到s_{i+1}

(模 4). 因此, 若 w 中 b 的数目 n 对于模 4 与 3 同余, 即 $n=3,7,11,\cdots$, 则该 w 为 M 所接受.

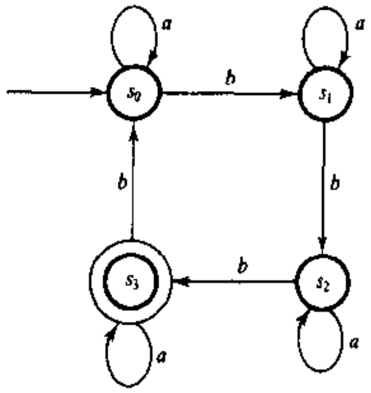


图 10-12

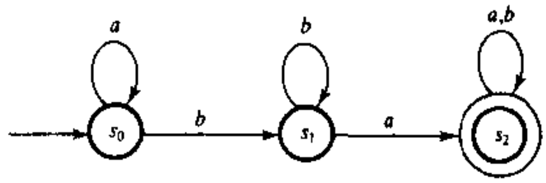


图 10-13

10.55　描述为图 10-13 的自动机所接受的语言 L 的单词 w.

解　☞ 该系统只有单词 w 中存在一个 a 跟在 b 之后, 才能到达接受状态 s_2.

10.5　文法和语言

10.56　定义一个文法.

解　☞ 一个**文法** G 由四部分组成:

(1) 一个有限的元素集合 V, 其元素称为**变元**或非**终结元**;

(2) 一个有限的元素集合 T, 其元素称为**终结元**(T 与 V 是分离的);

(3) V 中一个称为**开始符号**的元素 S;

(4) 一个有限的产生式集合 P: 一个**产生式**是一个有序偶(α,β), 通常记作 $\alpha\to\beta$, 其中 α,β 是 $V\cup T$ 中的单词. α 中至少有一个必须含有一个变元.

当我们要指明文法的 4 个部分时, 则用 $G(V,T,S,P)$来表示它.

除非有其他申述, 下列记号将用于我们的文法中. 我们用小斜体拉丁字母 $a,b,c,\cdots$表示终结元, 用大写斜体拉丁字母 $A,B,\cdots$表示变元. 希腊字母 $\alpha,\beta,\cdots$表示变元和终结元中的单词(字符串). 而且, 我们将产生式 $\alpha\to\beta_1,\cdots,\alpha\to\beta_k$ 写成

$$\alpha\to(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k).$$

10.57　举一个文法 G 的例子.

解　☞ 定义 G 的 4 个部分如下:

$$V=\{A,B,S\},\quad T=\{a,b\}$$

$$P=\{S\xrightarrow{1}AB,A\xrightarrow{2}Aa,B\xrightarrow{3}Bb,A\xrightarrow{4}a,B\xrightarrow{5}b\},$$

S 为开始符号. 产生式可缩写成

$$P=\{S\to AB,A\to(Aa,a),B\to(Bb,b)\}.$$

注　我们常常给出文法 G 的产生式来定义文法 G, 且总假定出现在产生式中的 S 是开始符号以及 V 和 T 分别是变元集合和终结元集合.

10.58　设 G 是一个有终结元集合 T 的文法. 定义 T 上由 G 决定的语言 $L=L(G)$.

解　☞ 设 ω 和 ω'是 $V\cup T$ 中的单词(字符串). 若 ω'可从 ω 用产生式之一得到, 即若存在单词 μ 和 υ 使得 $\omega=\mu\alpha\upsilon$ 且 $\omega'=\mu\beta\upsilon$, 此处 $\alpha\to\beta$ 是一个产生式, 我们则记

$$\omega\Rightarrow\omega'.$$

若 ω'可从 ω 由一个有限产生式序列得到, 则记

$$\omega\Rightarrow^*\omega'.$$

G 的语言用 $L(G)$表示. 它由终结元集合中可以用上述过程从符号 S 开始得到的所有单词组成, 即

$$L(G)=\{\omega:S\Rightarrow^*\omega\}.$$

10.59　考虑习题10.57的文法 G.证明 $\omega=a^2b^4$ 属于由 G 确定的语言 $L(G)$.

解　☞ 从 S 开始,我们得到下列替换序列:

$$S\Rightarrow AB\Rightarrow AaB\Rightarrow aaB\Rightarrow aaBb\Rightarrow aaBbb\Rightarrow aaBbbb\Rightarrow aabbbb = a^2b^4.$$

这里,我们分别用了产生式1,2,4,3,3,3和5.于是,我们写成 $S\Rightarrow^* a^2b^4$.故 $\omega=a^2b^4$ 属于 $L(G)$.

10.60　描述习题10.57中文法 G 的语言 $L(G)$.

解　☞ 产生式序列1,2(r 次),4,3(s 次),5将得到单词 $\omega=a^r ab^s b$,其中 r 和 s 是非负整数.另一方面,没有产生式序列能在一个 b 之后产生一个 a.因此

$$L(G)=\{a^m b^n : m \text{ 和 } n \text{ 为正整数}\},$$

即单词开头是一串 a,而后跟着一串 b.

10.61　设文法 G 有变元 S,A,B,终结元 a,b 以及产生式 $S\rightarrow aB$, $B\rightarrow b$, $B\rightarrow bA$, $A\rightarrow aB$.求由 G 生成的语言 $L(G)$.

解　☞ 我们只能使用第一产生式一次,其原因是开始符号 S 不在其他任何地方出现.而且,我们最后用第二个产生式只能得到一个终结单词.此外,我们用第三和第四个产生式交替地添加 a 和 b.换句话说,

$$L(G)=\{(ab)^n = ababab\cdots ab : n\in \mathbf{N}\}.$$

10.62　设文法 G 有产生式:$S\rightarrow aSb$, $aS\rightarrow Aa$, $Aab\rightarrow c$.求由 G 生成的 $\{a,b,c\}$ 上的语言 $L(G)$.

解　☞ 首先我们必须用第一个产生式一次或更多次得到单词 $\omega=a^n Sb^n$,其中 $n>0$.为了消去 S,我们必须用第二产生式得到 $\omega'=a^m Aabb^m$,其中 $m=n-1\geqslant 0$.现在我们要用第三产生式最后得到单词 $\omega''=a^m cb^m$,其中 $m\geqslant 0$.因此

$$L(G)=\{a^m cb^m : m \text{ 为非负整数}\},$$

即相同非负数目的 a 和 b 由 c 隔开.

10.63　设 L 是 a 和 b 中有偶数个 a 的所有单词的集合.求生成 L 的一个文法 G.

解　☞ 我们要求生成 L 的文法 G 有下列产生式:

$$S\rightarrow aA,\ S\rightarrow bB,\ B\rightarrow bB,\ B\rightarrow aA,\ A\rightarrow aB,\ A\rightarrow bA,\ A\rightarrow a,\ B\rightarrow b.$$

我们看到,任何一个产生式用于一个单词 α 时,a 和 A 的数目之和或是保持相同或是增加2.因此从 S 导出的终结元 a 和 b 中任一单词 ω 必含有偶数个 a.换句话说,$L(G)\subseteq L$.另一方面,显然,产生式将用来输出 L 的每一个单词 v.就是说,我们依照 v 以 a 或 b 开头而确定用 $S\rightarrow ab$ 或 $S\rightarrow bB$,并且,若任一后继字母是一个 a,我们则用 $A\rightarrow aB$ 或 $B\rightarrow aA$;若任一后继字母是一个 b,则用 $A\rightarrow bA$ 或 $B\rightarrow bB$.对 v 的最后字母,我们用 $A\rightarrow a$ 或 $B\rightarrow b$.因此 $L(G)=L$.

文法和语言的类型

10.64　定义1,2和3型文法和语言.(此外,一个0型文法(语言).)

解　☞ 这些文法由所容许的产生式的类型来定义:

(1) 若每一产生式 $\alpha\rightarrow\beta$ 都有性质 $|\alpha\|\leqslant\|\beta\|$,则称文法 G 是1型的.

(2) 若每一产生式具形式 $A\rightarrow\beta$,即左边是一个变元而右边是一个或更多个符号的单词,则称文法 G 是2型的.

(3) 若所有产生具形式 $A\rightarrow a$ 或 $A\rightarrow aB$,即左边是单个变元而右边或是单个终结元或是一个终结元随后还跟着一个变元,则称文法 G 是3型的或是正规的.

上面的三个类型文法都容许"平凡"产生式 $S\rightarrow\lambda$(此处 λ 是空序列).一语言 L 依照它能由1,2或3型文法生成而分别称之为1,2或3型.(容许有产生式 $S\rightarrow\lambda$,因此空序列可属于该语言.)

10.65　判定由产生式:

(a) $S\rightarrow aA$, $A\rightarrow aAB$, $B\rightarrow b$, $A\rightarrow a$;

(b) $S\rightarrow aAB$, $AB\rightarrow bB$, $B\rightarrow b$, $A\rightarrow aB$

组成的文法 G 的类型.

解 ☞ (a)由于每个产生式具形式 $A\to\alpha$,即左边是一个变元,因此 G 是 2 型文法.

(b)每个产生式左边的长度不超过右边的长度,因此 G 是 1 型文法.

10.66 确定由产生式:

(a) $S\to aAB, AB\to c, A\to b, B\to AB$;

(b) $S\to aB, B\to bA, B\to b, B\to a, A\to aB, A\to a$

组成的文法 G 的类型.

解 ☞ (a)产生式 $AB\to c$ 意味着 G 是 0 型文法.

(b) 由于每个产生式具有形式 $A\to a$ 或 $A\to aB$,因此文法 G 是 3 型的,或是正规的.

10.67 确定由产生式

(a) $S\to aSb, S\to AB, A\to a, B\to b$;

(b) $S\to aB, B\to AB, aA\to b, A\to b, B\to Aa$

组成的文法 G 的类型.

解 ☞ (a) 由于每个产生式左边有一个变元,因此文法 G 是 2 型的.

(b) 产生式 $aA\to b$ 表明 G 是一个 0 型文法.

10.68 解释术语:(a)上下文有关文法;(b)上下文无关文法.

解 ☞ (a) 若一个文法 G 的产生式具有形式

$$\alpha A\alpha' \to \alpha\beta\alpha',$$

则说 G 是**上下文有关的**.

名称"上下文有关"来自于这样的事实,在一个单词中当 A 在 α 和 α' 中间时,我们仅仅用 β 替代变元 A.

(b) 若一文法 G 的产生式具有形式

$$A \to \beta,$$

则说 G 是**上下文无关的**.

名称"上下文无关"来自于,不管变元 A 出现在什么地方,我们可以用 β 替代 A.

注意,上下文无关文法和 2 型文法相同.

正规文法和有限自动机之间有下面的基本关系:

定理 10.3 一个语言 L 可由一个 3 型文法生成,即 L 是正规的当且仅当存在一个接受 L 的有限自动机.

10.69 考虑 $\{a,b\}$ 上的语言 $L=\{a^nb^n : n>0\}$.(a)求一个生成 L 的上下文无关文法 G;(b)我们能否找到一个 3 型(正规)文法生成 L?

解 ☞ (a)显然,具有下面的产生式:

$$S\to ab, S\to aSb$$

的文法 G 将生成语言 L.注意 G 是一个上下文无关文法.

(b)不能.根据习题 10.46,没有一个有限自动机接受 L,因此由定理 10.3 可知 L 不能由 3 型文法生成.

10.70 设语言 L 由 $\{a,b\}$ 上所有的恰好有一个 b 的单词组成,即

$$L=\{b, a^rb, ba^s, a^rba^s, r>0, s>0\}.$$

求一个生成语言 L 的正规文法.

解 ☞ 我们要求下列产生式:

$$S\to(b,aA),\quad A\to(b,aA,bB),\quad B\to(a,aB)$$

的文法 G 生成 L.这就是说,从 S 导出的任一单词 ω 中,字母 b 只能出现一次.由于每个产生式具有所要求的形式,因此 G 是正规文法.

10.71 设语言 L 由 a 和 b 上使得没有两个 a 紧跟在其他的字母之后的所有单词组成.求生成语言 L 的一个正规文法 G.

解 ☞ 有下面产生式的文法 G 将生成 L：

$$S\to(a,b,aB,bA),\quad A\to(bA,ab,a,b),\quad B\to(b,bA).$$

注意 G 是正规的.

10.72 设语言 L 由形式为 $a^r b^s c^t$，其中 $r,s,t>0$，即 b 跟在 a 后面，而 c 跟在 b 后面的所有单词组成. 求一个生成语言 L 的上下文无关文法 G.

解 ☞ 有下面产生式的上下文无关文法 G 将生成 L：

$$S\to ABC,\quad A\to(a,aA),\quad B\to(b,bB),\quad C\to(c,cC).$$

10.73 习题 10.72 中的语言是正规的吗？

解 ☞ 是. 因具有下面产生式：

$$S\to aA,\quad A\to(aA,bB),\quad B\to(bB,c,cC),\quad C\to(c,cC)$$

的正规文法也生成语言 L.

10.74 设语言 L 由 a 和 b 上所有 a 的数目比 b 的数目多一倍的单词组成. 求一个生成语言 L 的上下文无关文法 G.

解 ☞ 这个生成 L 的上下文无关文法具有下面的产生式：

$$S\to(A,AB,ABA,BAA),\quad A\to(a,BAAA,ABAA,AABA,AAAB),$$
$$B\to(b,BBAA,BABA,BAAB,ABAB,AABB).$$

树形图

10.75 考虑具有下列产生式的一个上下文无关文法 G：

$$S\to aAB,\quad A\to Bba,\quad B\to bB,\quad B\to c.$$

单词 $w=acbabc$ 可从 S 如下导出：

$$S\Rightarrow aAB\Rightarrow a(Bba)B\Rightarrow acbaB\Rightarrow acba(bB)\Rightarrow acbabc.$$

画出 w 的**树形图** T.

解 ☞ 图 10-14 表明树形图 T 的构造步骤. 具体地说，我们以 S 为根开始，然后依用来导出 w 的产生式添加分枝到树上. 这就得到如图 10-14(e)的完全树 T. T 中从左到右的叶子序列是导出的单词 w. 而且，T 中任一非叶子是一个变元，例如 A，A 的直接继承者(孩子)形成一个单词 α，此处 $A\to\alpha$ 是 G 的用来导出 w 的产生式.

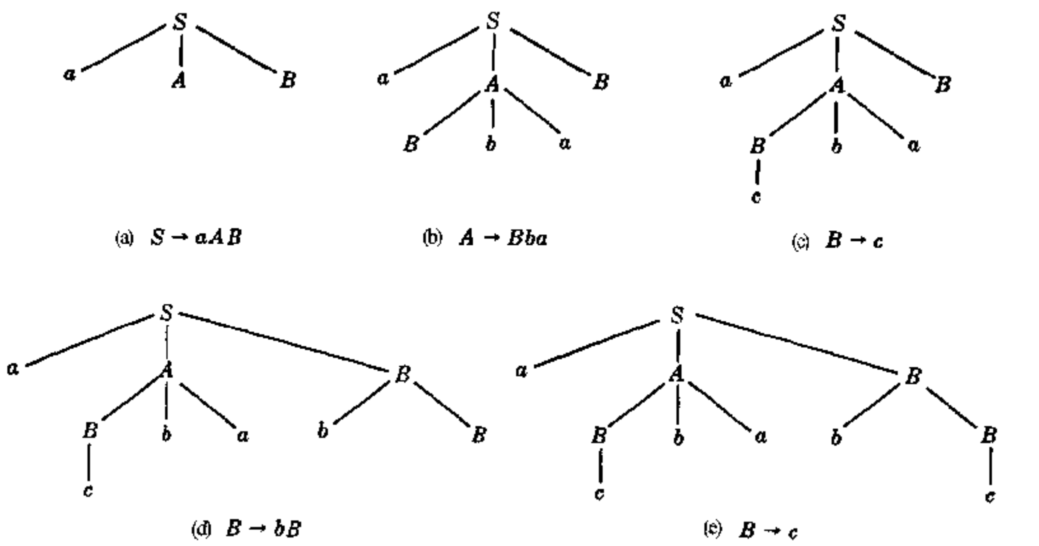


图 10-14

10.76 考虑具有产生式 $S\to(a,aAS)$ 和 $A\to bS$ 的上下文无关文法 G. 求单词 $w=abaabaa$

的树形图.

解 ☞ 首先注意 w 可从 S 如下导出：

$$S \Rightarrow aAS \Rightarrow a(bS)S \Rightarrow abaS \Rightarrow aba(aAS) \Rightarrow abaa(bS)S \Rightarrow abaabaS \Rightarrow abaabaa.$$

图 10-15 表示相应的树形图.

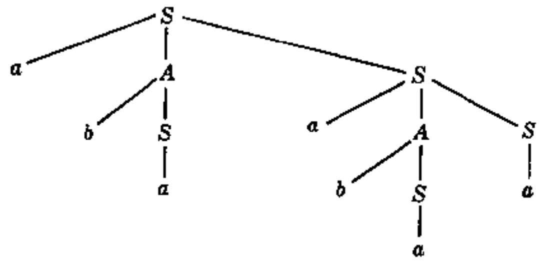


图 10-15

10.77 考虑具有产生式

$$S \to aA,\quad A \to aB,\quad B \to bB,\quad B \to a$$

的正规文法 G.(a)求单词 $w = aaba$ 的树形图.(b)描述由 G 生成的语言 L 中所有单词 w.

解 ☞ (a)首先注意 w 可从 S 如下导出：

$$S \Rightarrow aA \Rightarrow a(aB) \Rightarrow aa(bB) \Rightarrow aaba.$$

图 10-16 表示相应的树形图.

(b)应用产生式 1,2,3(r 次)和 4 将导出单词 aab^ra,其中 $r \geqslant 0$.没有其他单词 w 可从 S 导出.

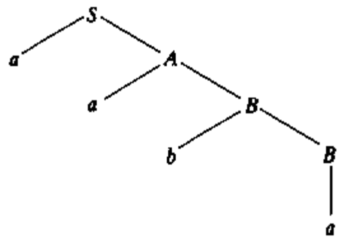


图 10-16

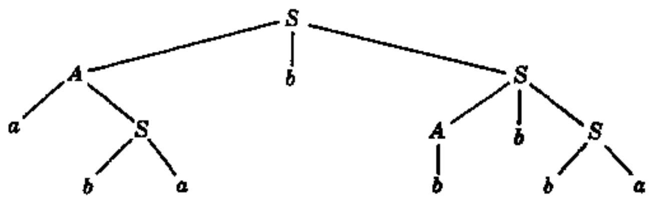


图 10-17

10.78 图 10-17 是一个上下文无关文法 G 的语言 L 中一个单词 w 的树形图.(a)求 w;(b)哪些终结元、变元和产生式必在 G 中?

解 ☞ (a)从左到右的叶子序列得到单词 $w = ababbbba$.

(b)这些叶子表明 a 和 b 必是终结元,内部顶点表明 S 和 A 必是变元且 S 是开始变元.每个变元的孩子表明 $S \to AbS$, $A \to aS$, $S \to ba$ 和 $A \to b$ 必是产生式.

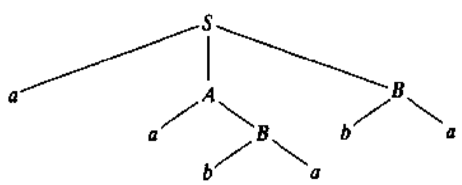


图 10-18

10.79 图 10-18 是一个上下文无关文法 G 的语言 L 中一个单词 w 的树形图.(a)求 w.(b)哪些终结元、变元和产生式必在 G 中?

解 ☞ (a)从左到右读叶子得到 $w = aababa$.

(b)G 必含有终结元 a 和 b,变元 A 和 B,以及产生式 $S \to aAB$, $A \to aB$ 和 $B \to ba$.

10.80 在一个文法 G 中从开始符号 S 导出的任一单词 w 都存在一个树形图吗?

解 ☞ 不.只有 2 和 3 型文法即上下文无关和正规文法存在树形图.

第十一章　有序集和格

11.1　有序集

11.1　定义一个偏序集.

解　☞ 设 R 是集合 S 上的一个关系,满足下面 3 个性质:

$[O_1]$　自反的:对于每一个 $a\in S$,有 aRa;

$[O_2]$　反对称的:若 aRb 且 bRa,则 $a=b$;

$[O_3]$　传递的:若 aRb 且 bRc,则 aRc.

那么,称 R 是一个**偏序**或一个**偏序关系**,且 S 和偏序一起称为一个**偏序集合**,或者简单地称为一个**有序集**.

11.2　定义正整数集 **N** 上的通常次序,并描述关于偏序集的通常记号.

解　☞ 最常见的次序关系,称为常序,是 **N** 上的或更一般地 **R** 的任一子集上的关系≤("小于或等于").由于这个缘故,一个偏序关系通常用$\precsim$表示,且 $a\precsim b$ 读作"a 前于 b"(或 a 在 b 之前).在此情况下,我们亦记:

$a\prec b$(读作"a 严格前于 b"),若 $a\precsim b$ 但 $a\neq b$;

$a\succsim b$(读作"a 后于 b"(a 在 b 之后)),若 $b\precsim a$;

$a\succ b$(读作"a 严格后于 b"),若 $b\prec a$.

在不会引起混淆的情况下,符号≤,<,>和≥常分别用来代替$\precsim$,$\prec$,$\succ$和$\succsim$

11.3　设 $\mathscr{S}$ 是一个集合的集合.集合包含关系⊆是 $\mathscr{S}$ 上的一个偏序吗?

解　☞ 是的,因集合包含是自反的,反对称的和传递的.这就是说,对于 $\mathscr{S}$ 中的任何集合 A,B,C,我们有(i)$A\subseteq A$;(ii)若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则 $A=B$;(iii)若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$.

11.4　考虑正整数集 **N**.若有 $a,c\in\mathbf{N}$ 使得 $ac=b$,我们则说 a 整除 b,记作 $a\mid b$.例如,$2\mid 4$,$3\mid 12$,$7\mid 21$,等等.证明可除性是 **N** 上的一种偏序,即证明:(a)$a\mid a$;(b)若 $a\mid b$ 且 $b\mid a$,则 $a=b$;(c)若 $a\mid b$ 且 $b\mid c$,则 $a\mid c$.

证　☞ (a)由 $a\cdot 1=a$,我们有 $a\mid a$.

(b)设 $a\mid b$ 且 $b\mid a$,比方说,$b=ra$ 且 $a=sb$,则 $b=rsb$,因此 $rs=1$.由于 r 和 s 都是正整数,因此 $r=s=1$.故 $a=b$.

(c)设 $a\mid b$ 且 $b\mid c$,例如 $b=ra$ 且 $c=sb$,则 $c=sra$.因此 $a\mid c$.

11.5　考虑整数集 **Z** 上的可除性关系.(a)这个关系是 **Z** 上的一个偏序吗?(b)若不是,为什么习题 11.4 的证明不能移至 **Z** 上?

解　☞ (a)不是.例如,$2\mid -2$,且 $-2\mid 2$,但 $2\neq -2$.这就是说,该关系不是反对称的.

(b)若 $rs=1$,则 r 和 s 作为整数无须是 1.它们可以是 -1.

11.6　考虑整数集 **Z**.定义 aRb 为 $b=a^r$,r 为某一正整数.证明 R 是 **Z** 上的一个偏序,即证明 R 是(a)自反的,(b)反对称的,(c)传递的.

证　☞ (a)R 是自反的,因 $a=a^1$.

(b)设 aRb 且 bRa,比方说 $b=a^r$ 且 $a=b^s$,则 $a=(a^r)^s=a^{rs}$.于是有三种可能性:(i)$rs=1$,(ii)$a=1$ 和(iii)$a=-1$.若 $rs=1$,则 $r=1$ 且 $s=1$,因此 $a=b$.若 $a=1$,则 $b=1^r=1=a$.同理,若 $b=1$,则 $a=1$.最后,若 $a=-1$,则 $b=-1$(因 $b\neq 1$),因此 $a=b$.在所有三种情形中,$a=b$.故 R 是反对称的.

(c)设 aRb 且 bRc,比方说 $b=a^r$ 且 $c=b^s$,则 $c=(a^r)^s=a^{rs}$,因此 aRc.故 R 是传递的.

11.7　设$\precsim$是集合 S 的一个偏序.定义 S 上的对偶序.对偶序与关系$\precsim$的逆有什么关系?

解　☞ 关系$\succsim$,即 a 后于 b 也是 S 的一个偏序,称为**对偶序**.注意 $a\succsim b$ 当且仅当 $b\precsim a$,因此$\succsim$

是关系$\preceq$的逆,即$\succeq=\preceq^{-1}$.

11.8 描述下列关系的对偶(逆)序:(a)集合包含$\subseteq$,(b)**N**上的可除性.

解 ☞ (a)当且仅当$B\supseteq A$时$A\subseteq B$,即"B包含A"是"A是B的一个子集"的对偶.

(b)当且仅当b是a的倍数时,a整除b.这样,"是……的倍数"是"整除"的逆.

11.9 设A是有序集S的一个子集.A上的诱导序是什么含义?什么是S的一个有序子集?

解 ☞ 假设$a,b\in A$.设每当$a\preceq b$为S的元素时$a\preceq b$为A的元素.这就定义A上的一个偏序,称为A上的**诱导序**.具有诱导序的子集A称为S的一个**有序子集**.除非特别申明,S的任一子集将作为S的一个有序子集对待.

11.10 设**N**是用可除性排序的,判定A是否是**N**的一个有序子集,此处

(a)$A=\{2,3,4,5,6\}$关于常序;

(b)$A=\{2,4,8,32\}$关于常序.

解 ☞ (a)否,因这两种次序是不同的,例如,关于常序2前于3,但对于可除性则2与3没有关系.

(b)是.这里在A上常序和可除性一致,就是说,对于元素$a,b\in A$,$a\leqslant b$当且仅当$a|b$.

11.11 有些教科书将集合S上的一个偏序定义为满足下列三个性质的一个关系R:

[O_1^*] 非自反的:对于每一个$a\in S$,$a\not R a$;

[O_2^*] 非对称的:若aRb,则$b\not R a$;

[O_3^*] 传递的:若aRb且bRc,则aRc.

为什么这个不同的定义由习题11.1给出?

解 ☞ 设Δ表示S上的对角或相等关系,即$\Delta=\{(a,a):a\in S\}$.若R满足[O_1^*],[O_2^*]和[O_3^*],则$R\cup\Delta$满足原来的一个偏序的公理[O_1],[O_2]和[O_3].相反地,若R'满足[O_1],[O_2]和[O_3],则$R'\setminus\Delta$满足[O_1^*],[O_2^*]和[O_3^*].这样两个定义实质上是相同的.

换句话说,$\preceq$满足[O_1],[O_2]和[O_3]当且仅当$\prec$满足[O_1^*],[O_2^*]和[O_3^*].于是,我们定义一个偏序常常用$\prec$而不用$\preceq$.

11.12 给出满足[O_1^*],[O_2^*]和[O_3^*]的关系的例子.

解 ☞ 这样的一个常见的关系是**N**或**R**的任一子集上的$>$("大于").另一个这样的关系是任一集合上的$\subset$("真子集").

可比性和线性有序集

11.13 我们说一个有序集S的元素a和b可比较的含义是什么?给出例子.

解 ☞ 若元素a和b中的一个在另一个之前,即若$a\preceq b$或$b\preceq a$,则a和b**是可比较的**.这样,若既不是$a\preceq b$又不是$b\preceq a$,则a和b是不可比较的.例如,设**N**是用可除性排序的,那么,因$7|21$,因此21和7是可比较的,但既不是$3|5$而又不是$5|3$,因此3和5是不可比较的.

11.14 定义一个线性次序集,并举一个例子.

解 ☞ 设S是一个有序集.如果S的每一对元素都是可比较的,那么我们说S是**线性次序的**,或是**全序的**,并且称S是一个**链**.例如,正整数集**N**上的常序$\leq$是线性次序的.

11.15 设$\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots\}$是用整除排序的.**N**的下列各子集是否是线性次序(全序)的.

(a)$\{24,2,6\}$;　(b)$\{3,15,5\}$;　(c)$N=\{1,2,3,\cdots\}$;

(d)$\{2,8,32,4\}$;　(e)$\{7\}$;　(f)$\{15,5,30\}$.

解 ☞ (a)由于2整除6,6整除24,因此该集合是线性次序的.

(b)因3和5不可比较,因此该集合不是线性次序的.

(c)因2和3不可比较,因此该集合不是线性次序的.

(d)因$2\prec4\prec8\prec32$,因此该集合是线性次序的.

(e)由一个元素组成的任一集合都是线性次序的.

(f)由于5整除15,15整除30,因此该集合是线性次序的.

11.16　考虑具有常序的N.求N的所有线性次序子集.

解　☞ 由于N自身关于≤是线性次序的,因此N的每个子集也是线性次序的.

11.17　设集合 $A=\{2,3,6,8,9,18\}$ 是用整除排序的.指出 A 的哪些元素对是不可比较的.

解　☞ 不可比较的元素对是哪些元素对,其一个元素不在另一个元素之前也不在另一元素之后.这样,

$$\{2,3\},\{2,9\},\{3,8\},\{6,8\},\{6,9\},\{8,9\},\{8,18\}$$

是不可比较元素对,这是因为,例如,既不是 $2|3$ 又不是 $3|2$.

11.18　考虑习题11.17中的有序集 A.指出有3个或更多个元素的线性次序子集.

解　☞ 一个线性次序子集是每对元素都是可比较的元素组成的集合.当然,由一个元素组成的任一集合是线性次序的,任一对可比较元素组成的集合也是线性次序的.A 的有3个或3个以上元素的线性次序子集是 $\{2,6,18\}$,$\{3,6,18\}$,$\{3,9,18\}$.由于元素6和8是不可比较的,因此 $\{2,6,8\}$ 不是线性次序的.

11.19　考虑在习题11.6的偏序下的整数集 **Z**.下列各子集是线性次序吗?

(a)$A=\{2,4,64\}$,　(b)$B=\{3,9,18\}$,　(c)$\{8\}$.

解　☞ 一个线性次序集合是每对元素都是可比较的元素组成的集合.

(a)是.因 $4=2^2$, $64=4^3$, $64=2^6$.

(b)否.因元素9和18是不可比较的.

(c)是.只有一个元素的任一集合都是线性次序的.

11.20　就子集:

(a)$D=\{1,5,25\}$,　(b)$E=\{3,27,729\}$,　(c)$F=\{2,8,32\}$,

重复习题11.19.

解　☞ (a)否.元素1和5是不可比较的.

(b)是.因 $27=3^3$, $729=27^2$, $729=3^6$.

(c)否.元素8和32是不可比较的.

积集和次序

11.21　假设 S 和 T 是两个有序集.设 R 是积集 $S\times T$ 上的关系,定义为每当 $a\precsim a'$ 且 $b\precsim b'$ 时 $(a,b)R(a',b')$.证明 R 是 $S\times T$ 上的偏序,即证明 R 是(a)自反的,(b)反对称的,(c)传递的.$S\times T$ 的这个次序称为**积序**.

解　☞ (a)由于 $a\precsim a$ 且 $b\precsim b$,我们有 $(a,b)R(a,b)$.因此 R 是自反的.

(b)设 $(a,b)R(a',b')$ 且 $(a',b')R(a,b)$,则 $a\precsim a'$, $a'\precsim a$, $b\precsim b'$, $b'\precsim b$.因此 $a=a'$ 且 $b=b'$,于是 $(a,b)=(a',b')$.故 R 是反对称的.

(c)设 $(a,b)R(a',b')$ 且 $(a',b')R(a'',b'')$.那么 $a\precsim a'$ 且 $a'\precsim a''$ 因而 $a\precsim a''$.同理,$b\precsim b''$.于是 $(a,b)R(a'',b'')$.故 R 是传递的.

11.22　设已给 **N**×**N** 积序(习题11.21),此处 **N** 有常序≤.在 **N**×**N** 的下列元素对之间填上正确的符号<,>或‖(不可比较的):

(a)(5,7)________(7,1),　(b)(4,6)________(4,2),

(c)(5,5)________(4,8),　(d)(1,3)________(1,7),

(e)(7,9)________(4,1),　(f)(7,9)________(8,2).

解　☞ 这里,$(a,b)\precsim(a',b')$ 是以 $a\leqslant a'$ 且 $b\leqslant b'$ 为条件的.因此,若 $a<a'$ 且 $b\leqslant b'$ 或若 $a\leqslant a'$ 且 $b<b'$,则 $(a,b)<(a',b')$.

(a)‖,因 $5<7$ 但 $7>1$;(b)>,因 $4\geq4$ 且 $6>2$;(c)‖,因 $5>4$ 且 $5<8$;(d)<,因 $1\leqslant1$ 且 $3<7$;(e)

$\succ$，因 7>4 且 9>1；(f) ∥，因 7<8 且 9>2.

11.23 设英语字母表 $A=\{a,b,c,\cdots,y,z\}$ 以常序(字母表次序)给出. 再设 $A\times A=A^2$ 以积序(习题 11.21)给出. 在下列两字母单词(视为 A^2 的元素)之间填入正确的符号 $\prec$，$\succ$ 或 ∥(不可比较的)：

(a) cx __ at，　(b) cx __ by，　(c) cx __ cz，

(d) cx __ rs，　(e) cx __ dx，　(f) cx __ cs.

解 ☞

(a) $\succ$，因 $c>a$ 且 $x>t$；(b) ∥，因 $c>b$ 但 $x<y$；(c) $\prec$，因 $c\leqslant c$，且 $x<z$；(d) ∥，因 $c<r$，但 $x>s$；(e) $\prec$，因 $c<d$，且 $x\leqslant x$；(f) $\succ$，因 $c\geqslant c$，且 $x>s$.

11.24 设 S 和 T 是线性次序的. 定义 $S\times T$ 上特别地 $S^n(T=S^{n-1})$ 上的词典次序.

解 ☞ 这里，$S\times T$ 是如下有序的：

$$(a,b)\prec(a',b'),\text{若 } a<a' \text{ 或若 } a=a' \text{ 且 } b<b'. \tag{1}$$

对于 $S\times S\times\cdots\times S$. n = 折迭应用(1)得到，若对 $i=1,2,\cdots,k-1$，$a_i=a_i'$ 且 $a_k\prec a_k'$，则

$$(a_1,\cdots,a_n)\prec(a_1',\cdots,a_n'). \tag{2}$$

注意，词典次序是线性的.

11.25 对 $A\times A=A^2$ 应用词典次序重复习题 11.23.

解 ☞ (a) $\succ$，因 $c>a$；(b) $\succ$，因 $c>b$；(c) $\prec$，因 $c=c$ 且 $x<z$；(d) $\prec$，因 $c<r$；(e) $\prec$，因 $c<d$；(f) $\succ$，因 $c=c$ 且 $x>s$.

11.26 设 A 是非空集合，A^* 表示 A 上的全体词(有限序列) $w=a_1a_2\cdots a_n$，w 的长度记作 $|w|$，它是 w 的元素个数 n. 设 A 是线性次序的. 定义 A^* 上的自由半群次序.

解 ☞ 设 w 和 w' 表示 A 上的词. 那么，若 $|w|<|w'|$ 或若 $|w|=|w'|$，但按字典式 w 前于 w'，则 $w\prec w'$. 这就定义了 A^* 上的自由半群次序.

注意，这也是 A^* 的一个线性次序.

11.27 设英语字母表 $A=\{a,b,c,\cdots,y,z\}$ 为常序(字母表次序)给出的. A^* 以自由半群次序(习题 11.26)给出的. 将 A^* 的下列元素按恰当的次序排放，即将下列元素：

went, forget, to, medicine, me, toast, melt, for, we, arm

排序.

解 ☞ 首先将元素按长度排序，然后将它们按字典式排序：

me, to, we, arm, for, melt, went, toast, forget, medicine.

11.28 用 A^* 的常序(字母表次序)重复习题 2.27.

解 ☞ 按常序得到

arm, for, forget, me, medicine, to, toast, we, went.

11.29 设 $\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots\}$ 和 $A=\{a,b,c,\cdots,z\}$ 是按常序排序的. 考虑 $\mathbf{N}\times A$ 的如下子集：

$$S=\{(2,a),(1,c),(2,c),(4,b),(4,z),(3,b)\}.$$

设 $\mathbf{N}\times A$ 是词典式排序的. 将 S 的元素按恰当次序排放.

解 ☞ 按词典式次序，除非有一个系结，我们用第一个元素排序. 在有系结的情况下，我们用第二个元素排序. 这样，这些元素的恰当次序是

$$(1,c),\ (2,a),\ (2,c),\ (3,b),\ (4,b),\ (4,z).$$

11.30 用 $\mathbf{N}\times A$ 上的积序(习题 11.21)重复习题 11.29.

解 ☞ 虽然 N 和 A 是线性次序的，但积集 N×A 和集合 S 不是线性次序的. S 的两个极大线性次序子集如下：

$$\{(1,c),\ (2,c),\ (4,z)\}$$

和

$\{(2,a),\ (3,b),\ (4,b),\ (4,z)\}$.

11.2 偏序集的图

11.31 定义术语"直接前元"和"直接后元".

解 ☞ 设 S 是一个偏序集,$a,b\in S$.如果 $a<b$ 而 a 和 b 之间没有 S 的元素,即不存在元素 c 使得 $a<c<b$,那么我们说在 S 中 a 是 b 的**直接前元**,或者说在 S 中 b 是 a 的**直接后元**,记作

$$a<<b.$$

11.32 设 $S=\{2,3,4,5,12,16,24,36,48\}$ 是用整除排序的.求(a) 12 的前元和直接前元;(b) 12 的后元和直接后元.

解 ☞ (a) 2,3 和 4 都在 12 之前.由于 $2|4|12$,因此 2 不是 12 的直接前元.因没有 S 的元素在 3 和 12 之间或 4 和 12 之间,因此 3 和 4 都是 12 的直接前元.

(b)数 24,36 和 48 在 12 之后,但只有 24 和 36 是 12 的直接后元.(因 12 不能整除 16,因此 16 不在 12 之后.)注意,关于偏序集的直接前元和直接后元都未必是惟一的.

11.33 说明为什么线性次序集的每一个元素最多只能有一个直接前元.

解 ☞ 考虑一个线性次序集 S 的元素 a,b 和 c.设 a 和 b 都前于 c.再设 a 和 b 都是 c 的直接前元.由于 S 是线性次序的,因此 S 的任一对元素都是可比较的.这样,或是 $a<b$ 或是 $b<a$.不失一般性,假设 $a<b$.于是元素 b 在 a 和 c 之间.这就产生了矛盾.因此 a 和 b 不能同时是 c 的直接前元.

11.34 描述偏序集 S 的图.

解 ☞ 一个偏序集 S 的图是有向图,它的顶点是 S 的元素并且在 S 中每当 $a\ll b$ 时,从 a 到 b 有一条边.(有时我们把 b 放在较 a 高的位置并且在它们之间画一条线替代从 a 到 b 画一个箭头.于是我们明白,向上移动表示顺序.)在这样建立的图中,从顶点 x 到顶点 y 有一条有向通路当且仅当 $x<y$.并且,由于次序关系是反对称的,因此在 S 的图中不可能有(有向)循环.我们注意到这种图未必是连通的.

11.35 设 $A=\{1,2,3,4,6,8,9,12,18,24\}$ 用整除排序.作 A 的图.

解 ☞ A 的图为图 11-1 所表示.与有根树相反,在有序集的图中一条线的方向总是向上的.

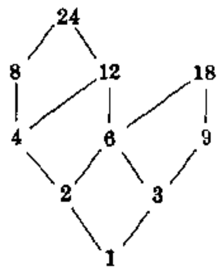


图 11-1

11.36 考虑集合 $B=\{a,b,c\}$ 和集合 P,P 是 B 的所有子集的集合.画出关于集合包含的偏序的 P 的元素图.

解 ☞ P 的元素是

$$\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\},$$

并且这个偏序集的图为图 11-2 所表示.

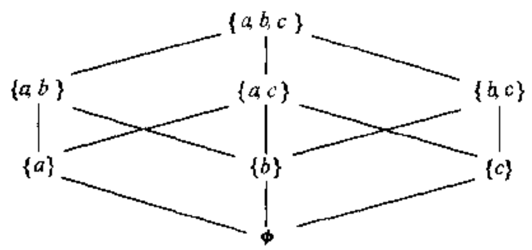


图 11-2

11.37 设 $B=\{a,b,c,d,e\}$ 是按字母的通常方法(字母表上顺序)排序的.作出 B 的图.关于这个图,你注意到什么?

解 ☞ 该图由图 11-3 给出.由于 B 是用已给的关系线性排序的,因此这个图原来是从 a 到 e 的

单一一条通路.

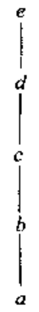


图 11-3

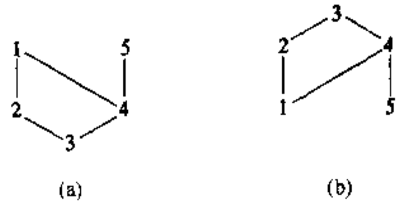


图 11-4

11.38　考虑偏序集 $D=\{1,2,3,4,5\}$,它是如图 11-4(a)所表示的那样排序的.画出 D 上的逆次序的图.

解　☞ 只要将原来图的边的方向倒过来就是逆次序的图.逆次序如图 11-14(b)所示.

11.39　在大学课程中确定先行课是一种常见的现有课程类的偏序.为了学好课程 B 要求先学好课程 A,我们则说 $A\preceq B$.考虑以下给出的数学(Math)类课程的先行课.画出这类课程的偏序图.

类	先行课
Math 101	没有
Math 201	Math 101
Math 250	Math 101
Math 251	Math 250
Math 340	Math 201
Math 341	Math 340
Math 450	Math 201, math 250
Math 500	Math 450, math 251

解　☞ 数学类的偏序图为图 11-5 所表示.

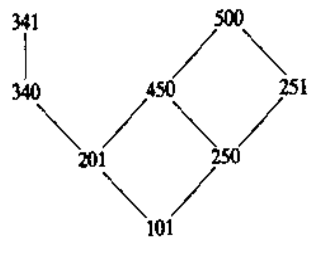


图 11-5

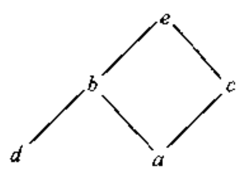


图 11-6

11.40　设 $V=\{a,b,c,d,e\}$按图 11-6 排序的.在下列各元素对之间填上正确符号<,>或 ‖(不可比较的):

(a)a __ e,　(b)c __ b,　(c)b __ d,　(d)a __ d.

解　☞ (a)从 a 到 e 有一条通路(或是 a,b,e 或是 a,c,e),因此 $a<e$.

(b)从 c 到 b 或从 b 到 c 没有通路(回忆一下,所有边指向向上),因此 $c\parallel b$.

(c)从 d 到 b 有一条通路,因此 $b>d$.

(d)既不是 $a<d$ 又不是 $d<a$,因此 $a\parallel d$.

11.41　一个正整数 m 的划分是和为 m 的正整数集合.例如,$m=5$ 有七种划分:

$$5,3-2,2-2-1,1-1-1-1-1,4-1,$$

3 − 1 − 1, 2 − 1 − 1 − 1.

我们将整数 m 的划分排序如下.如果划分 P_1 的整数相加能得划分 P_2 的整数(或等价地,如果 P_2 的整数相减能得到 P_1 的整数),那么 P_1 前于 P_2.例如,由于 $2+1=3$,因此 2 − 2 − 1 前于 3 − 2.另一方面,3 − 1 − 1 和 2 − 2 − 1 是不可比较的.画出 $m=5$ 的划分偏序集的图.

解 ☞ 该图为图 11-7 所表示的.

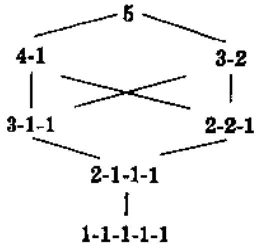


图 11-7

相容枚举

11.42 定义有限偏序集的一个相容枚举.

解 ☞ 我们常常将正整数赋予一个有限偏序集 S 的元素,S 的次序保持与整数集常序一致,这就是说,我们寻找一个一对一函数 $f:S\to\mathbf{N}$,或者当 S 有 n 个元素时,通常 $f:S\to\{1,2,\cdots,n\}$,使得若 $a<b$ 则 $f(a)<f(b)$.这样的一个函数称为 S 的**相容枚举**.(下面的定理指出这样的一个枚举总是能找到的.)

定理 11.1 任一有限的有序集 S 都存在一个相容枚举.

11.43 证明定理 11.1.

证 ☞ 对于 S 的元素数目用归纳法证明.若 $S=\{s\}$ 只有一个元素,则显然 $f:S\to\mathbf{N}$ 定义为 $f(s)=1$ 是 S 的一个相容枚举.现设 S 有 $n>1$ 个元素并且对于有序集 S 有少于 n 个元素时定理成立.假设 $b\in S$,考虑 S 的子集 $T=S\setminus\{b\}$.那么,T 有 $n-1$ 个元素,因此由归纳法 T 有一个相容枚举,比方说,$g:T\to\mathbf{N}$.于是 $h:T\to\mathbf{N}$ 定义为 $h(x)=2g(x)$ 也是一个相容枚举.(证明!)注意 h 的象集只含偶数.设 $f:S\to\mathbf{N}$ 定义如下:

$$f(x)=\begin{cases}h(x), & x\neq b,\\ h(a)+1, & x=b\text{ 且 }a<<b,\\ 1, & x=b\text{ 且没有元素在 }b\text{ 之前}.\end{cases}$$

那么 f 是 S 的相容枚举.

11.44 求图 11-8 中偏序集 S 的两个相容枚举.

解 ☞ 一个相容枚举将整数赋予有序集的每一元素,使得有序集的次序保持同整数的次序一致.两个可能相容枚举如下:

$$f(a)=1, f(b)=2, f(c)=3, f(d)=4, f(e)=5;$$
$$f(a)=1, f(b)=2, f(c)=4, f(d)=3, f(e)=5.$$

我们要强调通常不能从一个给定的相容枚举重新建立原来的偏序.

11.45 设 $S=\{a,b,c,d,e\}$ 如图 11-9 排序.求 S 到 $\{1,2,3,4,5\}$ 的所有相容枚举.

解 ☞ 有 5 个可能的相容枚举.它们是

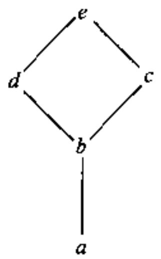


图 11-8

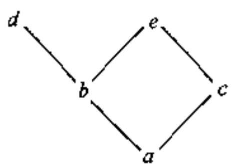


图 11-9

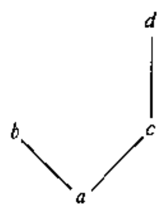


图 11-10

a	b	c	d	e
1	2	3	4	5
1	3	2	4	5
1	2	3	5	4
1	3	2	5	4
1	2	4	3	5

11.46　假设下面是一个有序集 $A=\{a,b,c,d\}$ 的 3 个相容枚举：

a	b	c	d
1	2	3	4
1	3	2	4
1	4	2	3

假设 A 的图 D 是连通的，画出 D.

解　☞ 由这些枚举定义的偏序为图 11-10 所示.

极大和极小元素

11.47　定义一个偏序集 S 的极大和极小元素.

解　☞ 设 a 是 S 的一个元素，若没有其他元素在 a 之后，即若 $a\leqslant x$ 意味着 $a=x$，则称 a 为极大元素.类似地，设 b 是 S 的一个元素，若没有其他元素在 b 之前，即若 $y\leqslant b$ 意味着 $y=b$，则称 b 为极小元素.可能有多于一个极大元素或者多于一个极小元素.

11.48　设 $S=\{2,4,6,12,20\}$ 是按整除性排序的.求 S 的极大和极小元素.

解　☞ 极大元素是在其后面没有其他元素的那些元素.因此 12 和 20 是 S 的极大元素.极小元素在其前面没有其他元素的那些元素，因此只有一个极小元素是 2.

11.49　设 $T=\{2,3,4,16\}$ 是用整除性排序的.求 T 的极大和极小元素.

解　☞ 极大元素是 3 和 16，极小元素是 2 和 3.注意 3 同时是极大和极小元素，这是因为 3 与 T 的任一其他元素都不是可比较的.

11.50　质数集合 $P=\{2,3,5,7,11,13,\cdots\}$ 用整除性排序.求 P 的极大和极小元素.

解　☞ 由于每个质数只能被其自身和 1 整除，并且 1 不属于 P，因此 P 中任何两个元素都是不可比较的.于是，P 的每个元素同时是极大和极小元素.

11.51　求图 11-11 所表示的偏序集 B 的极大和极小元素.

解　☞ 没有元素严格前于 a 或 b，因此 a 和 b 都是 B 的极小元素.没有元素严格后于 e 和 g，因此 e 和 g 都是 B 的极大元素.

11.52　设 S 是一个线性次序集.证明 S 最多有一个极大元素.

证　☞ 设 a 和 b 是 S 的不同的极大元素.由于 S 的所有元素都是可比较的，因此或者 $a<b$，或者 $b<a$.由极大元素的定义，这就蕴含 $a=b$，于是与假设 a 和 b 是不同的相矛盾.

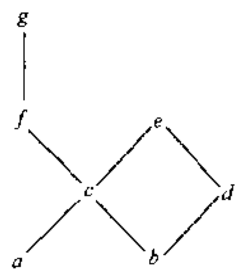


图 11-11

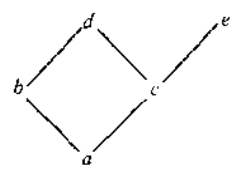


图 11-12

11.53　设 $F=\{a,b,c,d,e\}$ 如图 11-12 排序. 求 F 的 c 为极小元素的所有子集.

解 ☞ F 的含元素 c 但不含任何前于 c 的元素的子集是那些不含元素 a 的子集. 因此

$$\{c\},\{c,b\},\{c,d\},\{c,e\},\{c,b,d\},\{c,b,e\},\{c,d,e\},\{c,b,d,e\}$$

是 F 的 c 为极小元素的子集.

11.54　设 c 为一个极大元素, 重复习题 11.53.

解 ☞ F 的含元素 c 但不含任何后于 c 的元素的子集是那些不含元素 d 和 e 的子集. 因此

$$\{c\},\{c,a\},\{c,b\},\{c,a,b\}$$

是 F 的 c 为极大元素的子集.

11.55　极小和极大元素和相容枚举有什么关系?

解 ☞ 设 S 有 n 个元素, $f:S\to\{1,2,\cdots,n\}$ 是一个相容枚举. 若 $f(a)=1$, 则 a 必是 S 的一个极小元素; 若 $f(b)=n$, 则 b 必为一个极大元素.

11.56　设一学生要修读习题 11.39 的所有八门数学课, 但每学期只修读一门数学课.
(a)她作哪种选择或者她于第一学期和最后一(第八)学期应该如何选择课程?
(b)假设她第一年(第一或第二学期)要修读数学 250, 到四年级(第七和第八学期)时修读数学 340. 求她能选择修读这八门课的所有方法.

解 ☞ (a)由图 11-5, 只有数学 101 是极小元素, 因此必须在第一学期修读这门课. 数学 341 和 500 是极大元素, 因此它们其中之一课程必须在最后一学期修读.
(b)数学 250 不是一个极小元素, 因此必须在第二学期修读它. 数学 340 不是一个极大元素, 因此必须在第七学期修读它, 而在第八学期修读数学 341. 而且必须在第六学期修读数学 500. 下面给出修读这八门课的三种可能方法:

[101, 250, 251, 201, 450, 500, 340, 341],
[101, 250, 201, 251, 450, 500, 340, 341],
[101, 250, 201, 450, 251, 500, 340, 341].

11.3　上确界和下确界

11.57　设 A 是偏序集 S 的一个子集. 定义: (a) A 的一个上界和上确界; (b) A 的一个下界和下确界; (c)说 A 是有界的含义是什么?

解 ☞ (a)设 M 是 S 的一个元素. 若 M 在 A 的每个元素之后, 则 M 称为 A 的一个**上界**. 这就是说, 若对于 A 的每个元素 x, 我们有

$$x\precsim M,$$

则 M 是 A 的一个上界. 若 A 的一个上界前于 A 的每个其他上界, 则称它是 A 的一个**最小上界**或**上确界**, 并用 $\sup(A)$ 表示.
(b)类似地, 若 S 的一个元素 m 在 A 的每一个元素之前, 则称 m 是 A 的一个**下界**. 这就是说, 若对 A 的每个元素 x, 我们有

$$m\precsim x,$$

则 m 是 A 的一个下界. 若 A 的一个下界后于 A 的每个其他下界, 则称它是 A 的一个**最大下界**或**下确界**, 并用 $\inf(A)$ 表示.
(c)若 A 有一个上界, 则说 A 上有界; 若 A 有一个下界, 则说 A 下有界. 特别地, 若 A 有一个上界和下界, 则 A 是**有界的**.

11.58　设 $V=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ 是如图 11-13 排序的, $X=\{c,d,e\}$. 求 X 的上界和下界.

解 ☞ 元素 e,f,g 在 X 的每个元素之后, 因此 e,f 和 g 都是 X 的上界. 元素 a 在 X 的每个元素之前, 因此它是 X 的下界. 元素 b 不在 c 之前, 因此 b 不是 X 的一个下界, b 和 c 是不可比较的.

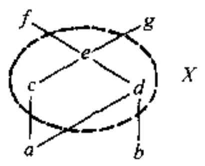


图 11-13

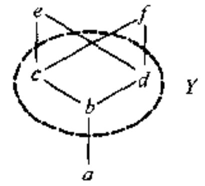


图 11-14

11.59　求习题 11.58 中 X 的上确界和下确界.

解　☞ 由于 e 前于 f 和 g, 因此我们有 $e=\sup(X)$. 而且, a 是 X 的惟一下界, 因此 $a=\inf(X)$. 注意, $\sup(X)$ 属于 X 但 $\inf(X)$ 不属于 X.

11.60　设 $w=\{a,b,c,d,e,f\}$ 是如图 11-14 排序的. $Y=\{b,c,d\}$. 求 Y 的上界和下界.

解　☞ 元素 e 和 f 在 Y 的每个元素之后, 因此 e 和 f 都是 Y 的上界. a 和 b 在 Y 的每个元素之前, 因此 a 和 b 都是 Y 的下界.

11.61　求习题 11.60 中 Y 的上确界和下确界.

解　☞ 由 Y 的两个上界 e 和 f 是不可比较的, 因此 $\sup(Y)$ 不存在. 上确界必须前于每个上界. 元素 b 后于 a, 因此我们有 $b=\inf(Y)$.

11.62　设自然数集 **N** 是用整除性排序的, $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 是 **N** 的一个有限子集. 证明 $\sup(A)$ 和 $\inf(A)$ 都存在.

证　☞ 诸 a_i 的最小公倍数记作 l.c.m.(A), 它是 $\sup(A)$, 以及诸 a_i 的最大公因子记作 g.c.d.(A), 它是 $\inf(A)$. 由于最小公倍数和最大公因子都是 **N** 的元素, 因此 $\inf(A)$ 和 $\sup(A)$ 总是存在的.

11.63　考虑有理数集 **Q**, 它具常序, 以及子集 D:

$$D=\{x : x\in \mathbf{Q} \text{ 且 } 8<x^3<15\}.$$

(a) D 是上有界或下有界吗?

(b) $\sup(D)$ 和 $\inf(D)$ 存在吗?

解　☞ (a) 子集 D 是上有界且是下有界的. 例如, 1 是一个下界和 100 是一个上界.

(b) $\sup(D)$ 是不存在的. 我们正相反地假设 $\sup(D)=x$, 由于 $\sqrt[3]{15}$ 是无理数, 因此 $x>\sqrt[3]{15}$. 然而, 存在一个有理数 y 使得 $\sqrt[3]{15}<y<x$. 这样, y 也是 D 的一个上界. 这与假设 $x=\sup(D)$ 矛盾. 另一方面, $\inf(D)$ 存在. 具体地, $\inf(D)=2$.

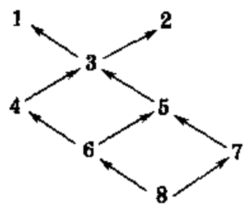


图 11-15

11.64　设 $S=\{1,2,3,\cdots,8\}$ 如图 11-15 排序. 令 $L=\{4,5,7\}$. (a) 求 L 的上界和下界; (b) 若 $\sup(L)$ 或 $\inf(L)$ 存在, 则求之.

解　☞ (a) L 的上界是 1, 2 和 3, 下界只是 8. 注意 7 不在 4 之前因而不是一个下界.

(b) 这里, $\sup(L)=3$, $\inf(L)=8$.

11.65　就 S 的子集 $M=\{2,3,6\}$ 重复习题 11.64.

解　☞ (a) M 的上界是 2, 下界是 6 和 8.

(b) 这里, $\sup(M)=2$, $\inf(M)=6$.

11.66　就 S 的子集 $K=\{1,2,4,7\}$ 重复习题 11.64.

解　☞ (a) 因没有 S 的元素在 K 的每一元素之后, 因此 K 没有上界. K 的下界是 8.

(b) 这里, $\sup(K)$ 不存在, 而 $\inf(K)=8$.

11.67　设集合 $S=\{3,6,9,12,18\}$ 用整除性排序, $\{6,12,18\}$ 是 S 的什么子集的上界集合?

解　☞ 集合 $\{6\}$, $\{6,3\}$ 以 6, 12 和 18 为其上界.

11.68　习题11.67中{3,6}是什么子集的下界集合?

解　☞ 子集{6},{6,12},{6,18},{12,18}和{6,12,18}以3和6为其下界.

11.4　相似集合和良序集合

11.69　定义相似有序集合.

解　☞ 如果两个有序集合之间存在一个一一对应关系并保持次序关系,那么称这两个集合是**相似的**.具体地说,设A和B是两个有序集合.如果存在一个函数$f:A\to B$,它是一对一映成函数并且具有性质:对于A的任意元素a和a',我们有

$$a \prec a' \text{ 当且仅当 } f(a) \prec f(a'),$$

那么有序集A与有序集B相似:

$$A \simeq B.$$

这样的一个函数f称为从A到B的**相似映射**.

11.70　设$V=\{1,2,6,8,12\}$按整除排序,令$W=\{a,b,c,d,e\}$.若

$$f=\{(1,e),(2,d),(6,b),(8,c),(12,a)\}$$

是从V到W的相似映射.试画出W的图.

解　☞ 相似映射保持原来集合的次序,并且它是一一满映射.这样,该映射可以认为是只要将原来集合的图的顶点重新标号.V和W的图在图11-16中.

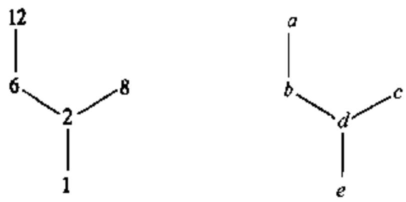


图 11-16

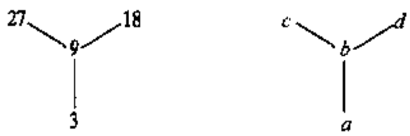


图 11-17

11.71　设$X=\{3,9,18,27\}$和$Y=\{a,b,c,d\}$是如图11-17排序的.指出从X到Y的所有可能的相似映射.

解　☞ 从X到Y只有两个可能的相似映射如下:

$$f=\{(3,a),(9,b),(27,c),(18,d)\},$$
$$g=\{(3,a),(9,b),(27,d),(18,c)\}.$$

11.72　设$A=\{2,4,8,16\}$按整除排序,$B=\{u,v,w,x\}$依字母表排序.求从A到B的所有可能的相似映射.

解　☞ 由于A和B都是线性次序的,因此从A到B只有一个可能的相似映射:$\{(2,u),(4,v),(8,w),(16,x)\}$.

第一元素和最后元素

11.73　设A是一个有序集.定义A的第一元素和最后元素.

解　☞ 设a是A的一个元素,若对于A的每一个元素x都有

$$a \precsim x,$$

则a称为A的一个**第一元素**.换句话说,若a在A的每个元素之前,则a是A的一个第一元素.类似地,设b是A的一个元素,若对于A的每一个元素x都有

$$x \precsim b,$$

则b称为A的一个**最后元素**.这就是说,若b在A的每个元素之后,则b是A的一个最后元素.一个有序集最多只能有一个第一元素和一个最后元素.

11.74　设 $S=\{a,b,c,d,e\}$ 按图 11-18 所示排序. 若 S 存在第一元素或最后元素，则指出它们是什么元素.

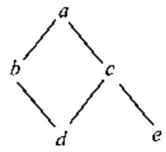


图 11-18

解 ☞ 由于 a 在 S 的每个元素之后，因此 a 是 S 的最后元素. 有序集 S 没有第一元素. 注意元素 d 不在元素 e 之前.

11.75　考虑在常序下的自然数集 **N**. 若 **N** 存在第一元素或最后元素，则指出它们是什么元素.

解 ☞ **N** 的第一元素是 1. 它没有最后元素.

11.76　设 A 是任一集合，$P(A)$ 是 A 的所有子集的集合. 若 $P(A)$ 是用集合包含排序的，则 $P(A)$ 的第一元素和最后元素是什么？

解 ☞ 空集 $\varnothing$ 是 $P(A)$ 的第一元素，A 是 $P(A)$ 的最后元素.

11.77　设 $A=\{x:0<x<1\}$ 是用 $\leqslant$ 排序的. 若 A 存在第一元素或最后元素，则它们是什么元素？

解 ☞ 集合 A 是线性次序的，它既无第一元素又无最后元素.（若认为 A 是 $[0,1]$ 的一个子集，则 $\inf(A)=0$，$\sup(A)=1$.）

良序集合

11.78　定义一个良序集合并举出一个例子.

解 ☞ 若有序集 A 的每一个子集都含有第一元素，则称 A 是良序的. 一个良序集的典型例子是具常序的自然数集 **N**.

11.79　证明一良序集 A 必是线性次序的.

证 ☞ 在 A 中任给一对元素 a 和 b，A 的子集 $\{a,b\}$ 必含一个第一元素. 这样必有一个元素在另一元素之前. 因此 A 的任两个元素都是可比较的.

11.80　设正偶数集 $E=\{2,4,6,8,\cdots\}$ 按整除排序. E 是良序集吗？

解 ☞ 因为并不是 E 的每个子集都有第一元素，因此 E 不是良序的. 例如，子集 $\{4,6\}$ 没有第一元素，当然每个含有元素 2 的子集有第一元素，即 2 本身.

11.81　设 S 是一个有限的线性次序集合. S 是良序集吗？

解 ☞ 是的. S 的任一子集是有限的且线性次序的，因此它有第一元素.

11.82　假设集合的集合

$$B=[\{a\},\{a,b\},\{a,b,c,d\},\{a,b,c,d,e,f\}]$$

按集合包含排序. B 是良序集吗？

解 ☞ 由于 B 是有限的且线性次序的，因此它是良序的.

11.83　考虑自然数集 **N** 及其子集 $E=\{2,4,6,8,\cdots\}$. (a) 求一个相似函数 $f:\mathbf{N}\to E$；(b) 证明对于 **N** 的每个 x 都有 $x\leqslant f(x)$.

解 ☞ (a) 函数 $f:\mathbf{N}\to E$ 定义为 $f(x)=2x$. 它是 **N** 到其子集 E 的一个相似映射.

(b) 因 x 是正数，因此 $x\leqslant 2x=f(x)$.

定理 11.2　设 A 是一个良序集，B 是 A 的一个子集. 令函数 $f:A\to B$ 是从 A 到 B 的一个相似映射，则对于 A 的每个 a，我们有 $a\preceq f(a)$.

11.84　证明定理 11.2.

证 ☞ 设 $D=\{x:f(x)<x\}$. 若 D 是空集，则定理成立. 设 $D\neq\varnothing$. 那么，由于 A 是良序的，因此 D 有第一元素 d_0. 注意 $d_0\in D$ 蕴含 $f(d_0)<d_0$. 由于 f 是相似映射，$f(d_0)<d_0$ 蕴含

$$f(f(d_0))<f(d_0),$$

因此 $f(d_0)$ 也属于 D. 但 $f(d_0) \prec d_1$ 且 $f(d_0) \in D$, 这与 d_0 是 D 的第一元素相矛盾. 于是原来的假设 $D \neq \varnothing$ 导出一个矛盾. 故 D 是空集, 并且定理成立.

11.85　求一个从 **N** 到其子集 $A = \{1, 3, 5, 7, \cdots\}$ 的相似映射.

解　☞ 对于 N 的每一个元素 x, 定义 $f(x) = 2x - 1$. 该映射保持正整数集的次序.

定理 11.3　设 A 和 B 是相似的良序集, 则从 A 到 B 仅仅存在一个相似映射.

11.86　证明定理 11.3.

证　☞ 设 $f: A \to B$ 和 $g: A \to B$ 都是相似映射. 设 $f \neq g$, 则存在一个元素 $x \in A$ 使得 $f(x) \neq g(x)$. 因此, 由习题 11.79, 或是 $f(x) \prec g(x)$ 或是 $g(x) \prec f(x)$. 比方说, $f(x) \prec g(x)$.

由于 $g: A \to B$ 是一个相似映射, 因此 $g^{-1}: B \to A$ 也是一个相似映射. 而且, $g^{-1} \circ f: A \to A$, 两个相似映射的积是一个相似映射. 但是 $f(x) \prec g(x)$ 蕴含

$$(g^{-1} \circ f)(x) \prec (g^{-1} \circ g)(x) = x.$$

我们有 $g^{-1} \circ f$ 是一个相似映射且 $(g^{-1} \circ f) \prec x$. 这与定理 11.2 矛盾. 因此假设 $f \neq g$ 导出一个矛盾. 故从 A 到 B 只能有一个相似映射.

11.5　格

11.87　定义术语格.

解　☞ 设 L 是一个非空集合, 它关于两个称为**交**和**联合(并)**, 分别用 $\wedge$ 和 $\vee$ 表示的二元运算是封闭的. 如果对于 L 的任意元素 a, b 和 c 下列公理:

(i)交换律

(1a)　$a \wedge b = b \wedge a$,　(1b)　$a \vee b = b \vee a$;

(ii)结合律

(2a)　$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$,　(2b)　$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$;

(iii)吸收律

(3a)　$a \wedge (a \vee b) = a$,　(3b)　$a \vee (a \wedge b) = a$

成立, 那么 L 称为一个**格**.

一个格常用 $(L, \wedge, \vee)$ 表示以强调所包含的运算.

11.88　设 C 是一个集合的集合, 它关于交和并运算是封闭的. 证明 $(C, \cap, \cup)$ 是一个格.

证　☞ 交和并运算满足定义一个格的三个公理. 具体地说, 对于任意三个集合 X, Y 和 Z, 有

(i) $X \cap Y = Y \cap X$,　$X \cup Y = Y \cup X$;

(ii) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$, $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;

(iii) $X \cap (X \cup Y) = X$, $X \cup (X \cap Y) = X$.

11.89　证明正整数集 **N** 关于运算

$$a \vee b = \text{l.c.m.}(a, b), \quad a \wedge b = \text{g.c.d.}(a, b) \tag{1}$$

是一个格, 此处 l.c.m. 表示最小公倍数, g.c.d. 表示最大公因子.

证　☞ 我们必须证明 **N** 关于两个运算(1)满足定义格的三个公理. 根据数论:

(i) $\text{g.c.d.}(a, b) = \text{g.c.d.}(b, a)$,　$\text{l.c.m.}(a, b) = \text{l.c.m.}(b, a)$;

(ii) $\text{g.c.d.}(\text{g.c.d.}(a, b), c) = \text{g.c.d.}(a, \text{g.c.d.}(b, c))$,

$\text{l.c.m.}(\text{l.c.m.}(a, b), c) = \text{l.c.m.}(a, \text{l.c.m.}(b, c))$;

(iii) $\text{g.c.d.}(a, \text{l.c.m.}(a, b,)) = a$,

$\text{l.c.m.}(a, \text{g.c.d.}(a, b)) = a$.

因此 **N** 关于 l.c.m. 和 g.c.d. 是一个格.

11.90　定义格 L 中一个关系式的对偶. 为什么对偶原理应用于 L?

解　☞ 在格 $(L, \wedge, \vee)$ 中任一陈述的对偶是由交换 $\wedge$ 和 $\vee$ 得到的陈述来定义的. 由于 L 的任一公理的对偶仍是 L 的一个公理, 因此对偶原理说明任一定理的对偶亦是一个定理.

11.91　写出下列关系式:

(a) $(a \wedge b) \vee c = (b \vee c) \wedge (c \vee a)$;

(b) $(a \wedge b) \vee a = a \wedge (b \vee a)$

的对偶.

解 ☞ 在每个关系式中用 $\wedge$ 替代 $\vee$ 以及用 $\vee$ 替代 $\wedge$，得到对偶关系式：

(a) $(a \vee b) \wedge c = (b \wedge c) \vee (c \wedge a)$,

(b) $(a \vee b) \wedge a = a \vee (b \wedge a)$.

11.92 证明格的元素的幂等定律：(i) $a \wedge a = a$，(ii) $a \vee a = a$.

证 ☞ (i)的证明只要应用两个吸收律(习题 11.87(iii))：

$$a \wedge a = a \wedge (a \vee (a \wedge b)) = a.$$

由对偶性得到(ii)的证明.

定理 11.4 设 L 是一个格，则当且仅当 $a \vee b = b$ 时 $a \wedge b = a$.

11.93 证明定理 11.4.

证 ☞ 设 $a \wedge b = a$. 在第一步中应用吸收律，我们有

$$b = b \vee (b \wedge a) = b \vee (a \wedge b) = b \vee a = a \vee b.$$

现设 $a \vee b = b$. 再在第一步中应用吸收律，我们有

$$a = a \wedge (a \vee b) = a \wedge b.$$

因此，当且仅当 $a \vee b = b$ 时 $a \wedge b = a$.

11.6 格和有序集

下面用到如下三个定理.

定理 11.5 设 L 是一个格. 那么用 $a \wedge b = a$ 或 $a \vee b = b$ 定义的关系 $a \preceq b$ 是 L 上的一个偏序.

(我们认为 L 的上面的偏序是由格诱导的偏序.)

定理 11.6 设 L 是一个格. 那么对于由 L 诱导的偏序中每一偶 $\{x, y\}$ 存在 $\inf(x, y)$ 和 $\sup(x, y)$.

定理 11.7 设 P 是一个偏序集，它使得 P 中的任一偶 $\{x, y\}$ 存在 $\inf(x, y)$ 和 $\sup(x, y)$. 那么如下定义 P 上的一个格：

$$x \wedge y = \inf(x, y), \quad x \vee y = \sup(x, y).$$

由这个格诱导的偏序集 P 和原来偏序集 P 相同.

从定理 11.6 和 11.7 得到格的另一个定义：

定义 一个格是一个偏序集，在此，对于任一对元素 a 和 b，

$$a \wedge b = \inf(a, b), \quad a \vee b = \sup(a, b)$$

都存在.

11.94 证明定理 11.5.

证 ☞ 对于格 L 的任一 a，由幂等性我们有 $a \wedge a = a$. 因此 $a \preceq a$，从而 $\preceq$ 是自反的.

设 $a \preceq b$ 且 $b \preceq a$，则 $a \wedge b = a$ 且 $b \wedge a = b$. 因此 $a = a \wedge b = b \wedge a = b$，从而 $\preceq$ 是反对称的.

最后，设 $a \preceq b$ 且 $b \preceq c$，则 $a \wedge b = a$ 且 $b \wedge c = b$. 这样

$$a \wedge c = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b = a.$$

于是 $a \preceq c$，从而 $\preceq$ 是传递的. 故 $\preceq$ 是 L 上的一个偏序.

11.95 设 P 是 $\{a, b, c\}$ 的幂集，作出由格 $(P, \cap, \cup)$ 诱导的 P 上的偏序图.

解 ☞ 关于由格诱导的偏序，每当 $a \wedge b = a$ 时有 $a \preceq b$. 于是，在此情形下，每当 $a \cap b = a$ 时有

$$a \preceq b.$$

这样，因 $\{a\} \cap \{a, b\} = \{a\}$，因此集合 $\{a\}$ 前于集合 $\{a, b\}$. 用此方法继续进行下去，我们得到图为图 11-19 所表示. 注意，这与关于集合包含的偏序(习题 11.36)得到的图(图 11-2)相同.

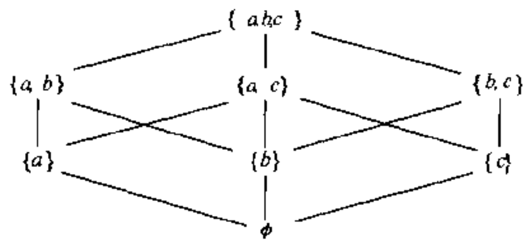


图 11-19

11.96 考虑一个正整数 m 的因子集合 D_m 上的格 L，此处

$$a \vee b = \mathrm{l.c.m}(a,b), \quad a \wedge b = \mathrm{g.c.d.}(a,b).$$

就 $m=36$，作出由 L 诱导的偏序图.

解 ☞ 这里，由 L 诱导的偏序是，每当 $\mathrm{g.c.d.}(a,b)=a$ 时，$a \preceq b$. D_{36} 的偏序图为图 11-20 所表示.

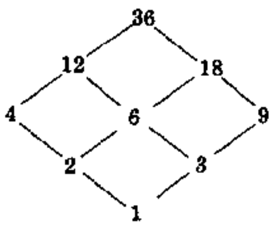


图 11-20

11.97 简要地解释为什么任一线性次序集是一个格.

解 ☞ 考虑一个线性次序集的任两个元素 a 和 b，此处 $a \preceq b$. 那么，$\inf(a,b)=a$，$\sup(a,b)=b$. 因对于任一元素偶，$\inf(a,b)$ 和 $\sup(a,b)$ 都存在，因此一个线性次序集是一个格.

11.98 指出图 11-21 所表示的偏序集中哪些是格.

解 ☞ 一个有序集 S 是格的充分必要条件为对 S 中的每一偶 $\{x,y\}$ 存在 $\sup(x,y)$ 和 $\inf(x,y)$. 图 11-21 中的有序集(a)和(b)都是格. 有序集(c)不是格. 这是因为 $\{b,c\}$ 有上界 d，e 和 f，但它们之中没有一个在其他两个之前，因此 $\sup(b,c)$ 不存在.

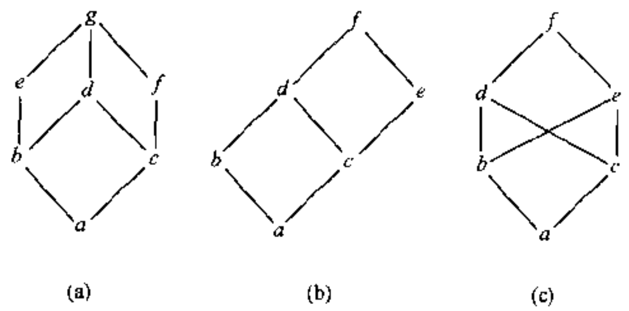


图 11-21

11.99 图 11-22 所示的有序集中哪些是格?

解 ☞ 只有图 11-22 的有序集(c)是格. 有序集(a)不是格，因元素 1 和 2 没有上界因而 $\sup(1,2)$ 不存在. 有序集(b)不是格，因元素 5 和 6 有两个下界但没有一个后于另一个，因此 $\inf(5,6)$ 不存在.

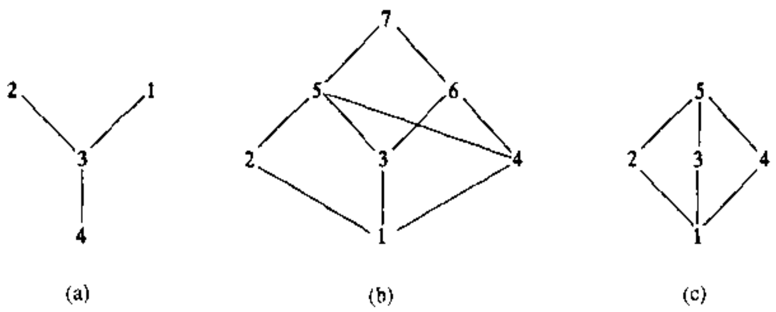
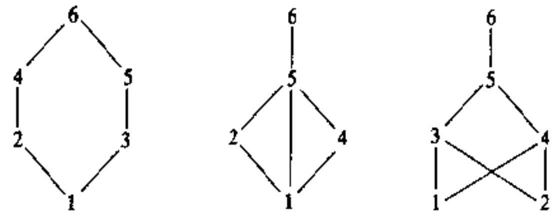


图 11-22

11.100 图 11-23 所示的有序集中哪些是格?



(a) (b) (c)

图 11-23

解 ☞ 图 11-23 的有序集(a)和(b)都是格. 有序集(c)不是格,因元素 1 和 2 没有下界因而 inf(1,2)不存在.

11.101 设 A 是实数集 $\mathbf{R}$ 的任一子集,它具有常序. A 在什么条件下是一个格?

解 ☞ 只要 A 不是空集,则因它是线性次序的,因此 A 是一个格.

11.102 判定下列集合关于整除是否是一个格:$A=\{2,3,4,12\}$ 和 $B=\{1,2,3,9,18\}$.

解 ☞ 这两个集合都不是格,因 $\sup(a,b)$ 和 $\inf(a,b)$ 不总是存在. 例如,在集合 A 中,我们有 g.c.d.(2,3) = 1,但 1 不属于 A,因此 inf(2,3)不存在. 而且,在集合 B 中,l.c.m.(4,3) = 12,但 12 不属于 B.

11.103 判定下列集合关于整除是否是一个格:$C=\{1,3,4,9\}$ 和 $D=\{1,2,3,9,18\}$.

解 ☞ 只有 C 是一个格,因 C 中每一元素偶都存在下确界和上确界. 在集合 D 中,l.c.m.(2,3) = 6,但 6 不属于 D.

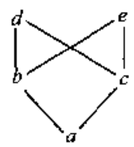


图 11-24

11.104 考虑图 11-24 所示的偏序集 $P=\{a,b,c,d,e\}$. 求 P 的两个子集使得它们关于 P 上的运算都是格.

解 ☞ 我们必须指出两个子集,使得子集中每一元素偶都存在下确界和上确界. 任一线性次序子集是一个格. 这两个是格的子集为

$$\{a,b,c,d\},\quad \{a,b,c,e\}.$$

注意,整个集合 P 不是一个格,因 $\sup(d,e)$ 不存在.

子格

11.105 定义术语子格.

解 ☞ 设 M 是格 L 的一个非空子集. 若关于 L 的运算 M 本身是一个格,则称 M 是 L 的一个子格. 注意,M 是 L 的一个子格当且仅当 M 关于 L 的运算 $\wedge$ 和 $\vee$ 是封闭的. 因此 M 的任一对元素的下确界和上确界也必是 M 的元素. 例如,关于整除运算的正整数集 $\mathbf{N}$. 由 $m(>1)$ 的所有因子组成的集合 D_m 是 $\mathbf{N}$ 的一个子格,但集合 $C=\{2,3,6\}$ 不是 $\mathbf{N}$ 的一个子格,因 inf(2,3) = 1 不属于 C.

11.106 考虑图 11-25 中的格 L. 判定下列:

$$L_1=\{x,a,b,y\},\quad L_2=\{x,a,e,y\},$$
$$L_3=\{a,c,d,y\},\quad L_4=\{x,c,d,y\}$$

是否是 L 的子格.

解 ☞ 一个子集 L' 若关于运算 $\wedge$ 和 $\vee$ 是封闭的,则它是一个子格. 于是 L_1 不是子格,因 $a\vee b=c$ 不属于 L_1. 集合 L_4 不是子格,因 $c\wedge d=a$ 不属于 L_4. 其他两个集合 L_2 和 L_3 都是子格.

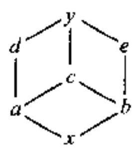


图 11-25

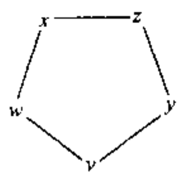


图 11-26

11.107　考虑图 11-26 所示的格 $D=\{v, w, x, y, z\}$. 求所有的具有 3 个或更多个元素的子格.

解　☞ 我们必须指出所有这样的具有 3 个或更多个元素的子集，使得该子集的每一对元素存在上确界和下确界(且是该子集的元素). 这些子格是

$\{v, w, x\}$,　$\{v, y, z\}$,　$\{v, x, z\}$,　$\{v, w, z\}$,
$\{w, x, z\}$,　$\{v, w, y, z\}$,　$\{v, x, y, z\}$,　$\{v, w, x, z\}$,
$\{v, w, x, y, z\}$.

同构格

11.108　定义同构格.

解　☞ 设 L 和 L' 是两个格. 若有一个双射函数 $f: L \to L'$ 使得对 L 的任意元素 a 和 b 都有

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$$

和

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b),$$

则称 L 和 L' 是**同构的**.

11.109　图 11-27 中两个格同构吗?

解　☞ 是的. 考虑映射 $f=\{(a,1),(b,2),(c,4),(d,3),(e,5)\}$. 这个映射实际上保持原来集合的结构. 例如, $f(c \wedge d)=f(b)=2$ 和 $f(c) \wedge f(d)=3 \wedge 4=2$.

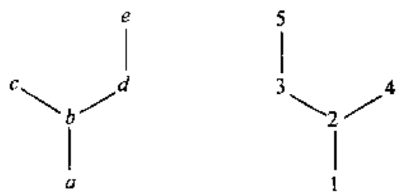


图 11-27

11.110　图 11-28 中两个格 L 和 L' 同格吗?

解　☞ 不. 为了看到这一点，首先注意到，显然 a 必须映射到 1, 且 f 必须映到 6. 因此, 在 L' 中, 对于 $x \neq 1$, 有 $\inf(2, x)=2$. 在 L 中, 这对 b, c, d 或 e 都是不正确的. 这样, L 和 L' 不是同构的.

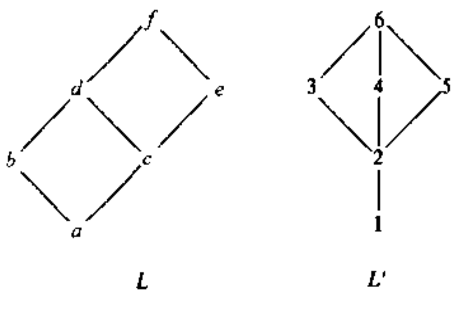


图 11-28

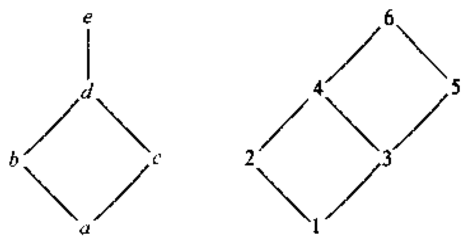


图 11-29

11.111　图 11-29 中两个格同构吗?

解　☞ 不. 因两个格的元素数目不同, 因此不存在满足给定条件的一一满映射.

11.7　有界格

11.112　设 L 是一个格. 定义 L 的下界和上界, 并确定什么情况下 L 是有界的.

解 ☞ 我们说 L 有一个**下界**,用 0 表示,如果对 L 的任一元素 x,都有 $0 \leq x$.类似地,我们说 L 有一个**上界**,用 I 表示,如果对 L 的任一元素 x,都有 $x \leq I$.若 L 同时有一个下界和一个上界,我们则说 L 是**有界的**.在这样的一个格中,对 L 的任一元素 a,我们有等式

$$a \vee I = I, \quad a \wedge I = a, \quad a \vee 0 = a, \quad a \wedge 0 = 0.$$

11.113 正整数集 **N** 关于常序若有下界和上界,则请指出它们是什么.

解 ☞ **N** 有一个下界 1,但没有上界.

11.114 $A = \{x : 1 < x < 2\}$ 关于常序为有序的.若其上界和下界存在,则指出它们是什么.

解 ☞ 集合 A 既无下界又无上界.

11.115 集合 A 的幂集 $P(A)$ 关于交和并运算,若其上界和下界存在的话,则指出它们是什么.

解 ☞ 空集 $\varnothing$ 是 $P(A)$ 的下界,A 是 $P(A)$ 的上界.

11.116 证明每个有限格是有界的.

证 ☞ 设 $L = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 是一个有限格,则 $a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n$ 和 $a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n$ 分别是 L 的上界和下界.

11.8 分配格和分解

11.117 定义一个分配格.

解 ☞ 设 L 是一个格.如果对 L 的任何元素 a, b 和 c,我们有下列的分配律:

(4a) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$,

(4b) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$,

那么称 L 是**分配的**.否则,称 L 是**非分配的**.注意,根据对偶原理(见习题 11.90),(4a)成立当且仅当(4b)成立.

11.118 一个集合 A 的幂集 P 关于运算 $\cap$ 和 $\cup$ 是一个格.P 是一个分配格吗?

解 ☞ 对于 P 的任何元素 a, b 和 c,我们有

$$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$$

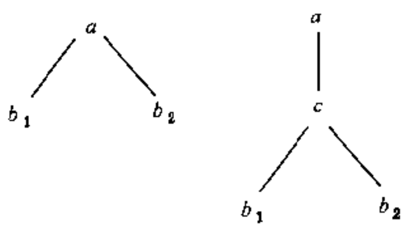
和

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c),$$

因此 P 是一个分配格.

11.119 定义一个有下界 0 的格 L 的联合不可约元素.

解 ☞ 设 a 是 L 的一个元素.若 $a = x \vee y$ 蕴含 $a = x$ 或 $a = y$,则说 a 是**联合不可约的**.很清楚,0 有这个性质.(注意,关于乘法运算,质数有这个性质,即若 p 是一个质数且 $p = ab$,则 $p = a$ 或 $p = b$.)



(a)　　(b)

图 11-30

11.120 设 $a \neq 0$ 是格 L 的一个元素.证明 a 是联合不可约当且仅当它有惟一的一个直接前元.

证 ☞ 设 a 至少有两个直接前元,比方说,如图 11-30(a)中的 b_1 和 b_2.那么 $a = b_1 \vee b_2$,并且 a 不是联合不可约的.另一方面,若 a 有惟一的直接前元 c,则对任何前于 a 的 b_1 和 b_2,因 c 在它们中间(如图 11-30(b)),我们不可能有

$$a = b_1 \vee b_2 = \sup(b_1, b_2).$$

11.121 求图 11-31(a)表示的格 K 的联合不可约元素.

解 ☞ K 的联合不可约元素是那些有惟一前元的元素.因此,元素 a, b, c 和 d 都是联合不可

约元素.

11.122 求图 11-31(b)表示的格 L 的联合不可约元素.

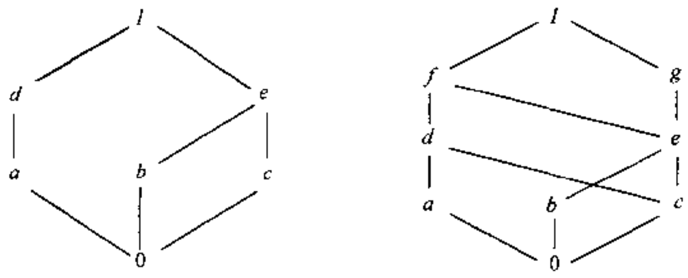
解 ☞ L 的联合不可约元素是 a,b,c 和 g.

11.123 设 L 是有一个上界 I 的一个格,a 是 L 的一个元素.若 $a=x\wedge y$ 蕴含 $a=x$ 或 $a=y$,则称 a 是**交不可约的**.并且,类似地,$a\neq I$ 是交不可约的当且仅当 a 只有一个直接后元.求图 11-31(a)所表示的格的所有交不可约元素.

解 ☞ 交不可约元素是那些只有一个直接后元的元素.因此 a,b,c,d 和 e 都是交不可约元素.

11.124 求图 11-31(b)所表示的格的所有交不可约元素.

解 ☞ 交不可约元素是 a,b,d,f 和 g.



(a) (b)

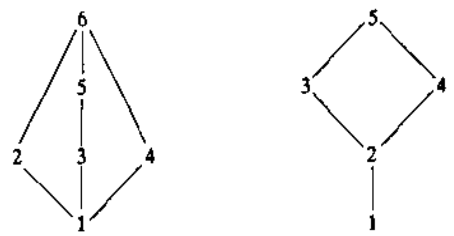
图 11-31

11.125 设 L 是有下界 0 的格.定义术语原子.

解 ☞ 直接后于 0 的那些联合不可约元素称为**原子**.(我们强调,并不是所有联合不可约元素必是原子.)

11.126 求图 11-32(a)所表示的格的原子.(这里,1 是下界,即 0 元素.)

解 ☞ 原子是直接后于 0 元素的那些元素.因此该格的原子是 2,3 和 4.



(a) (b)

图 11-32

11.127 求图 11-32(b)所表示的格的原子.

解 ☞ 只有一个原子,即元素 2.

11.128 求图 11-31 表示的两个格的原子.

解 ☞ 在这两个格中,直接后于 0 的元素是 a,b 和 c.因此它们都是原子.

11.129 考虑用整除排序的正整数集 N.(这 1 是下界.)(a)N 的哪些元素是原子?(b)哪些元素是联合不可约的?

解 ☞ (a)质数都是原子.

(b)所有的质数的幂和 1 都是联合不可约的.

11.130　任一非空集合 A 的幂集 $P(A)$ 关于集合包含是一个格.(a)$P(A)$的哪些元素是原子?(b)哪些元素是联合不可约?

解　☞ (a)独个元素集合$\{a\}$都是 $P(A)$的原子.

(b)独个元素集合$\{a\}$但不是下界$\varnothing$都是联合不可约元素.

分解

11.131　设格 L 的一个元素 a 可表示成形式

$$a = d_1 \vee d_2 \vee \cdots \vee d_n,$$

其中诸 d_i 都是联合不可约.说 d_i 是无赘的含义是什么?

解　☞ 若 $d_j \preceq d_k$,即若 $d_j \vee d_k = d_k$,我们则可从 a 中删除 d_j.这样,若没有 d_j 在 d_k 之前,则该表示式是**无赘的**.

11.132　设 L 是一个有限格.证明 L 的一个元素 a 可表示成无赘的联合不可约元素的联合.

证　☞ 若 a 不是联合不可约的,我们则记

$$a = b_1 \vee b_2.$$

而且,若 b_1 或 b_2 不是联合不可约的,则可用两个元素的并来替代它,等等.我们可以重复这个过程直到 a 表示成不可约元素的联合.于是

$$a = d_1 \vee d_2 \vee \cdots \vee d_n,$$

此处,这些 d 是联合不可约.若 d_i 前于d_j,则从表达式中删除 d_i.继续将此过程进行下去便得到我们要求的分解.

11.133　一个格 L 的元素 a 表示成无赘的和联合元素的分解是惟一的吗?

解　☞ 不是,a 可能有许多分解.考察图 11-33 中的元素 f.f 有四种分解 $d \vee e, d \vee c, b \vee e$ 和 $b \vee c$.

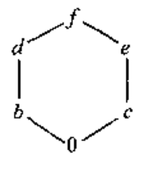


图 11-33

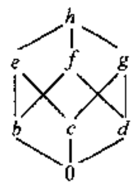


图 11-34

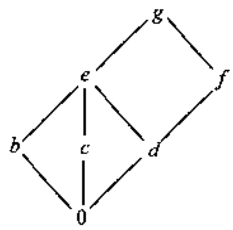


图 11-35

11.134　求图 11-34 中元素的一个无赘且联合不可约分解.

解　☞ 我们先将 h 表示成两个元素的并 $h = e \vee g$.那么由于 $e = b \vee c$ 和 $g = c \vee d$,我们将它们代入 h 的表示式得到

$$h = b \vee c \vee c \vee d.$$

最后,由于 $c \preceq c$,我们从该表示式删去一个 c 得到

$$h = b \vee c \vee d,$$

此处,b, c 和 d 都是无赘且联合不可约的.注意,我们亦可将 h 表示成$h = e \vee f$ 或$h = f \vee g$.最后我们将得到相同的解.

11.135　求图 11-35 中元素 g 的一个无赘且联合不可约分解.

解　☞ 我们先将 g 表示两个元素的并 $g = e \vee f$.由于 $e = c \vee d$,我们将它代入 g 的表示式得到

$$g = c \vee d \vee f.$$

由于 c, d 和 f 是无赘且联合不可约的,因此这就是我们的解.假如我们将 e 表示成$e = b \vee c$ 或$e = b \vee d$,则得到另两个解 $g = b \vee c \vee f$ 和 $g = b \vee d \vee f$.

11.136 考虑图 11-31(a)所表示的格 K. 将不是联合不可约元素表示成无赘联合不可约元素的联合.

解 ☞ K 的不是联合不可约元素是 I 和 e. 分解是

$$I = d \vee b \vee c, \quad e = b \vee c.$$

11.137 就图 11-31(b)所表示的格 L 重复习题 11.136.

解 ☞ L 的不是联合不可约元素是 I, f, d 和 e. 分解是

$$I = a \vee g, \quad f = a \vee b \vee c, \quad d = a \vee c, \quad e = b \vee c.$$

注意,为得到 $I = a \vee g$,我们先将 I 表示成 $I = f \vee g$,然后用 $a \vee b \vee c$ 替代 f 得 $I = a \vee b \vee c \vee g$. 但由于 b 和 c 在 g 之前,可将它们消去.

11.138 考虑 60 的因子格 $D_{60} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 30, 60\}$, 用整除排序(见图 11-36). 将每个不是联合不可约元素表示成最小数目的无赘联合不可约元素的联合.

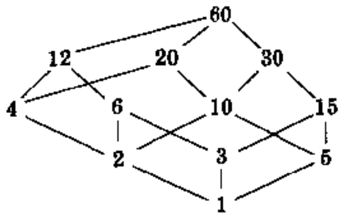


图 11-36

解 ☞ 所要求的结果是 $60 = 4 \vee 3 \vee 5, 30 = 2 \vee 3 \vee 5, 20 = 4 \vee 5, 15 = 3 \vee 5, 12 = 3 \vee 4, 10 = 2 \vee 5, 6 = 2 \vee 3$.

11.139 考虑由 $m\ (>1)$的所有因子组成的关于整除的格 D_m. 将 $a \neq 1$ 表示成最小数目的无赘联合不可约元素的联合.

解 ☞ D_n 的联合不可约元素是质数的幂. 令 $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$ 是将 a 分解成质数的幂的乘积. 那么

$$a = p_1^{n_1} \vee p_2^{n_2} \vee \cdots \vee p_k^{n_k}$$

是所要求的分解.

11.140 设 $P(A)$是一个非空的有限集合 A 的幂集. 考虑关于集合包含的格 $P(A)$. 将 $B \neq \varnothing$ 表示成无赘联合不可约元素的联合.

解 ☞ $P(A)$的联合不可约元素是独个元素集合 $\{a\}$. 于是

$$B = \{a_1\} \vee \{a_2\} \vee \cdots \vee \{a_k\}$$

是所要求的 B 的分解,其中 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 B 的不同元素.

定理 11.8 设 L 是一个有限分配格. 那么 L 的每个元素 a 都可惟一地(除顺序外)表示成无赘联合不可约元素的联合.

11.141 证明定理 11.8.

证 ☞ 由于 L 是有限的,因此我们可将 a 表示成无赘联合不可约元素的联合. 于是我们须证明惟一性. 设

$$a = b_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_r = c_1 \vee c_2 \vee \cdots c_s,$$

其中诸 b 是无赘且联合不可约的,并且诸 c 也是无赘联合不可约的. 对于任一给定的 i,我们有

$$b_i \preceq (b_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_r) = (c_1 \vee c_2 \vee \cdots \vee c_s).$$

因此

$$b_i = b_i \wedge (c_1 \vee c_2 \vee \cdots \vee c_s) = (b_i \wedge c_1) \vee (b_i \wedge c_2) \vee \cdots \vee (b_i \wedge c_s).$$

由于 b_i 是联合不可约的,因此存在一个 j 使得 $b_i = b_i \wedge c_j$,从而 $b_i \preceq c_j$. 类似地,对 c_j 存在一个 b_k 使得 $c_j \preceq b_k$. 因此

$$b_i \preceq c_j \preceq b_k,$$

由于诸 b 是联合不可约的,这就得出 $b_i = c_j = b_k$. 因此诸 b 和 c 可成对删除. 这样, a 的分解除顺序外是惟一的.

11.142 定理 11.8 可推广到**有限长度格**. (a)定义一个有限长度格;(b)举一个有限长度的无

限格的例子.

解 ☞ (a)若格 L 的每个线性次序子集是有限的,则 L 有有限长度.

(b)设 $L=\{0,I,a_1,a_2,\cdots\}$ 如图 11-37 是有序的.这就是说,对 N 的每个 n,我们有 $0<a_n<I$.由于 L 有无穷多线性次序子集,因此 L 有有限长度.

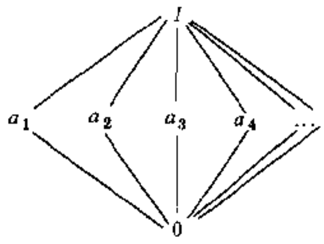


图 11-37

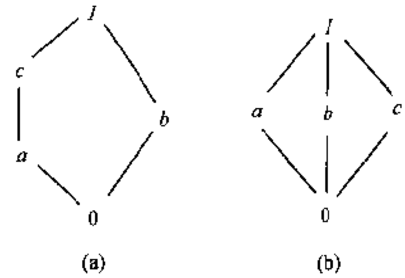


图 11-38

下面的定理证明超出本书的范围.

定理 11.9　一个格 L 是非分配的充分必要条件是它含有一个子格与图 11-38 的格(a)或(b)同构.

11.143　判别图 11-39 中哪些格是非分配的.

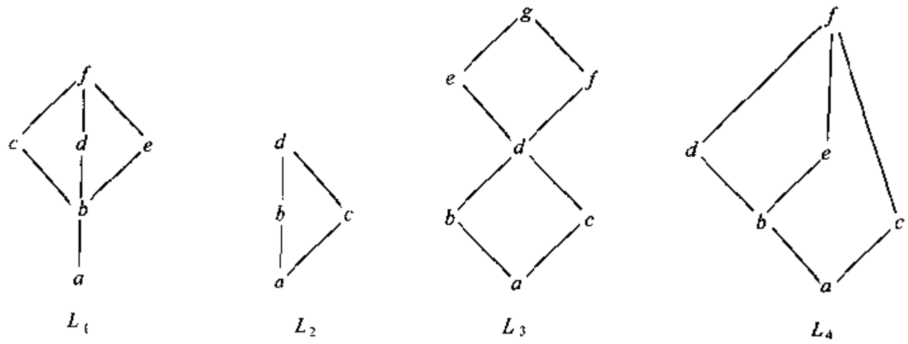


图 11-39

解 ☞ 应用定理 11.9,格 L_2 和 L_3 是分配的.然而,由于格 L_1 的子格 $\{b,c,d,e,f\}$ 与图 11-38(b)的格同构,因此 L_1 是非分配的;由于格 L_4 的子格 $\{a,b,c,d,f\}$ 与图 11-38(a)中的格同构,因此 L_4 是非分配的.

11.144　考虑图 11-40 的格 M.(a)求 M 的非零联合不可约元素和原子.(b)M 是分配的吗?

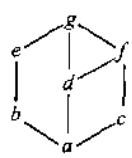


图 11-40

解 ☞ (a)首先,a 是零元素.因 b,c,d 和 e 有惟一的直接前元,因此它们都是联合不可约的,并且因元素 b,c 和 d 直接后于零元素 a,因此它们都是原子.

(b)不是.因 $\{a,b,d,e,g\}$ 是与图 11-38(a)的格同构的子格.

11.145　设 L' 是分配格 L 的一个子格.证明 L' 是分配的.

证 ☞ 对于 L 的任何元素 a,b 和 c,分配律(见习题 11.117)$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$ 和 $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$ 成立.由于 L' 的每个元素也在 L 中,因此对 L' 的任何元素 a',b' 和 c' 分配律成立.故 L' 是一个分配格.

11.146　证明每个线性次序集合 L 是一个分配格.

证 ☞ 图 11-38 的两个格都含有不可比较元素.这样,线性次序集 L 不可能含有与图 11-38 的任一个格同构的子格.因此据定理 11.9 知 L 是分配的.

11.9　有补格

11.147　设 L 是有下界 0 和上界 I 的有界格.定义 L 的一个元素 x 的补.

解　☞ L 的一个元素 y 是 x 的补,如果

$$x \vee y = I \quad 且 \quad x \wedge y = 0.$$

补未必存在且未必是惟一的.(注意,若 y 是 x 的一个补,则 x 是 y 的一个补,就是说,这种关系是对称的.)

11.148　求图 11-38(a)中元素 b 的补.

解　☞ 由于 $b \vee a = I$ 且 $b \wedge a = 0$,因此元素 a 是 b 的一个补.而且 $b \vee c = I$ 且 $b \wedge c = 0$,因此元素 c 也是 b 的一个补.

11.149　求图 11-41 中元素 a 的补.

解　☞ 由于 $a \vee c = I$ 且 $a \wedge c = 0$,因此 c 是 a 的一个补.注意,$a \vee b = d \neq I$,因此 b 不是 a 的一个补.

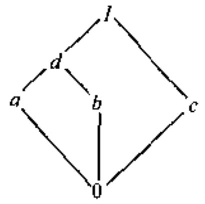


图 11-41

定理 11.10　设 L 是一个有界分配格.那么,若补存在则必惟一.

11.150　证明定理 11.10.

证　☞ 设 x 和 y 都是 L 的一个元素 a 的补,则有

$$a \vee x = I, \quad a \vee y = I, \quad a \wedge x = 0, \quad a \wedge y = 0.$$

应用分配性,

$$x = x \vee 0 = x \vee (a \wedge y) = (x \vee a) \wedge (x \vee y) = I \wedge (x \vee y) = x \vee y.$$

同理

$$y = y \vee 0 = y \vee (a \wedge x) = (y \vee a) \wedge (y \vee x) = I \wedge (y \vee x) = y \vee x.$$

因此 $x = x \vee y = y \vee x = y$,定理得证.

11.151　图 11-42 所表示的格是分配的.验证每个补若存在则是惟一的.

解　☞ 元素 a 是 d 的补,反之亦然.其他元素不存在补.因此所有的补只要存在则是惟一的.

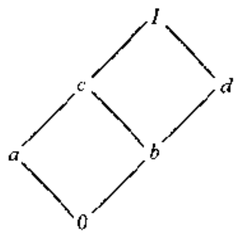


图 11-42

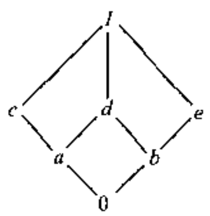


图 11-43

11.152　应用定理 11.10 证明图 11-43 的格是非分配的.

证　☞ 元素 c 有两个补 b 和 e.于是,由定理 11.10,L 不可能是分配的.(否则补将是惟一的.)

11.153　设 L 是有下界 0 和上界 I 的有界格.证明 0 和 I 是互补的.

证　☞ 我们有 $0 \vee I = I \vee 0 = I$ 且 $0 \wedge I = I \wedge 0 = 0$.因此 0 和 I 是互补的.

11.154　定义一个有补格.

解　☞ 若格 L 是有界的且 L 的每个元素都有一个补,则 L 是一个**有补格**.

11.155　举两个补不惟一的有补格例子.

解　☞ 图 11-38 的非分配格都是有补格,它的有些补不是惟一的.

11.156　考虑 $A = \{a, b, c\}$ 的幂集 $P(A)$,它关于交和并运算是有界格.求 $X = \{a, b\}$ 的补,若它存在的话.

解 ☞ 考虑 $X^c = A \setminus X = \{c\}$. 那么

$$\{a,b\} \cap \{c\} = \emptyset, \quad \{a,b\} \cup \{c\} = A.$$

因此 X^c 是 X 的一个(格)补. 而且它是 X 的惟一一个补.

11.157 推广习题 11.156 的结果.

解 ☞ 任一非空集 U 的所有子集的格 $P(U)$ 是有补的, 并且 U 的每个子集 X 都有惟一的补 $X^c = U \setminus X$.

11.158 考虑格 $D_{12} = \{1,2,3,4,6,12\}$, 12 的因子用整除排序的($D_{12}$的图如图 11-44 所示). 求(a)$D_{12}$的下界和上界, (b)4 和 6 的补, (c)$D_{12}$是一个有补格吗?

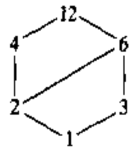


图 11-44

解 ☞ (a)下界是 1, 上界是 12.

(b)由于 g.c.d.(4,3) = 1 且 l.c.m.(4,3) = 12, 因此 4 的补是 3. 但是, 对于 $x \neq 1$, g.c.d.$(6,x) \neq 1$, 以及 l.c.m.$(6,1) \neq 12$, 因此 6 没有补.

(c)因 6 没有补, 因此 D_{12}不是一个有补格.

定理 11.11 设 L 是具有惟一补的有补格. 那么 L 的联合不可约元素除了 0 之外都是原子.

11.159 证明定理 11.11.

证 ☞ 设 a 是联合不可约的且它不是一个原子, 则 a 有惟一直接前元 $b \neq 0$. 设 b' 是 b 的补. 由于 $b \neq 0$, 我们有 $b' \neq I$. 若 a 在 b' 之前, 则 $b \precsim a \precsim b'$, 因而 $b \wedge b' = b'$. 因 $b \wedge b' = I$, 因此这是不可能的. 这样, a 不在 b' 之前, 并且 $a \wedge b'$ 必严格前于 a. 由于 b 是 a 的惟一直接前元, 我们也有 $a \wedge b'$ 前于 b. 如图 11-45. 但 $a \wedge b'$ 前于 b', 因此

$$a \wedge b' \precsim \inf(b, b') = b \wedge b' = 0.$$

故 $a \wedge b' = 0$. 由于 $a \vee b = a$, 我们有

$$a \vee b' = (a \vee b) \vee b' = a \vee (b \vee b') = a \vee I = I.$$

因此 b' 是 a 的一个补. 由于补是惟一的, 因此 $a = b$. 这就与假设 b 是 a 的一个直接前元相矛盾. 这样, L 的联合不可约元素只能是其原子.

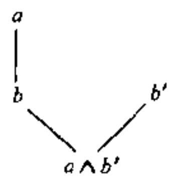


图 11-45

第十二章　命题演算

12.1　语句和基本运算

我们将使用下列记号：

$p \wedge q$：p 和 q 的合取，读作"p 并且 q"，

$p \vee q$：p 和 q 的析取，读作"p 或者 q"，

$\sim p$：p 的否定，读作"非 p".

而且，T 和 F 分别用来表示真和假.

注意，有些教科书对于 $p \wedge q$ 使用

$$p \& q, \qquad p \cdot q \text{ 或 } pq,$$

对于 $p \vee q$ 使用

$$p + q,$$

对于 $\sim p$ 使用

$$p', \bar{p} \text{ 或 } \neg p.$$

并且，T 和 F 分别用 1 和 0.

12.1　定义一个语句，并给出例子.

解　☞ 一个**语句**(或**字句断言**)或是真或是假但不能同时是真和假的符号(或声音)的集合. 一个语句的真或假称为它的**真值**. 例如，考虑下列表达式：

(a)巴黎在英国，　　(b)$2+2=4$，

(c)你去哪里？　　(d)把家庭作业放在黑板上.

表达式(a)和(b)都是语句，第一个是真的，第二个也是真的. 表达式(c)和(d)不是语句，因它们既不是真的，也不是假的.

12.2　定义一个复合语句，并给出例子.

解　☞ 有些语句是由子语句和各种联结词组成的. 这样合成的语句称为复合语句. 例如，

(a)"玫瑰花是红色的并且紫罗兰是蓝色的"是一个复合语句，它有子语句"玫瑰花是红色的"和"紫罗兰是蓝色的".

(b)"他是聪明的或每天晚上都学习"显然是一个复合语句. 它有子语句"他是聪明的"和"他每天晚上都学习".

12.3　设 p 表示"天冷"和 q 表示"天下雨". 给出一个简单的字句断言描述下列语句：(a)$\sim p$，(b)$p \wedge q$，(c)$p \vee q$，(d)$q \vee \sim p$.

解　☞ 在每种情形中，把 $\wedge$，$\vee$ 和 $\sim$ 分别译成"并且"，"或者"和"那是假的"或"不"，然后精简文句.

(a)天不冷，　(b)天冷并且下雨，　(c)天冷或下雨，　(d)天下雨或者天不冷.

12.4　就(a)$\sim p \wedge \sim q$ 和(b)$\sim(\sim q)$重复习题 12.3.

解　☞ (a)天不冷且不下雨，或换句话说，天既不冷又不下雨.

(b)天不下雨不是真的，或者换句话说，天不下雨是假的.

12.5　设 p 表示"他身材高"和 q 表示"他英俊". 用 p 和 q 的符号形式表示下列语句(假设"他身材矮"意指"他身材不高"，即 $\sim p$.)：

(a)他身材高并且英俊；　　(b)他身材高但不英俊；

(c)他身材矮或者英俊，这是假的；　　(d)他既不高又不英俊.

解　☞ (a)$p \wedge q$，(b)$p \wedge \sim q$，(c)$\sim(\sim p \vee q)$，(d)$\sim p \wedge \sim q$.

12.6　就下列语句重复习题 12.5.

(a)他身材高，或者他身材矮并且英俊；

(b)他身材矮或者不英俊，这不是真的.

解 ☞ (a)$p \vee (\sim p \wedge q)$,(b)$\sim(\sim p \vee \sim q)$.

12.7 设 p 表示"埃里克读《新闻周刊》"，q 表示"埃里克读《纽约人报》"，r 表示"埃里克读《时代周刊》".用符号形式表示下列语句：

(a)埃里克读《新闻周刊》或者《纽约人报》，但不读《时代周刊》；

(b)埃里克读《新闻周刊》和《纽约人报》，或者他不读《新闻周刊》和《时代周刊》；

(c)埃里克读《新闻周刊》但不读《时代周刊》，这不是真的；

(d)埃里克读《时代周刊》或者《纽约人报》但不读《新闻周刊》，这不是真的.

解 ☞ (a)$(p \vee q) \wedge \sim r$,(b)$(p \wedge q) \vee \sim (p \wedge r)$,(c)$\sim (p \wedge \sim r)$,(d)$\sim [(r \vee q) \wedge \sim p]$.

12.8 设 p 表示"奥德丽说法语"和 q 表示"奥德丽说丹麦语".给出描述下列：(a)$p \vee q$,(b)$p \wedge q$,(c)$p \wedge \sim q$,(d)$\sim p \vee \sim q$ 的简单字句.

解 ☞ 在每种情形中，将∧，∨和～分别翻译成"并且"，"或者"以及"那是假的"或"不".然后精简文句.

(a)奥德丽说法语或丹麦语.

(b)奥德丽说法语和丹麦语.

(c)奥德丽说法语但不说丹麦语.

(d)奥德丽不说法语或不说丹麦语.

12.9 就(a)$\sim\sim p$,(b)$\sim(\sim p \wedge \sim q)$重复习题 12.8.

解 ☞ (a)奥德丽不说法语不是真的.

(b)奥德丽既不说法语又不说丹麦语，这不是真的.

12.10 设 p 表示"萨姆是富有的"和 q 表示"萨姆是快乐的".将下列语句用符号形式表示.(假设"萨姆是贫穷的"意指"萨姆不富有"，即 $\sim p$.)

(a)萨姆贫穷但快乐.

(b)萨姆既不富有又不快乐.

(c)萨姆或是富有或是不快乐.

(d)萨姆贫穷，或者富有但不快乐.

解 ☞ (a)$\sim p \wedge q$,(b)$\sim p \wedge \sim q$,(c)$p \vee \sim q$,(d)$\sim p \vee (p \wedge \sim q)$.

波兰表示法

波兰(前束)表示法是在其论证之前而不在它们中间安置一个运算符号.这一小节将对 $p \wedge q$ 使用记号

$$Apq,$$

对 $\sim p$ 使用记号

$$Np.$$

这是波兰数学家卢克舍维奇首先提出的，故命名波兰表示法，它无须加括号.

12.11 用 A 和 N 分别替代∧和～重写下列表达式：

(a)$p \wedge \sim q$,(b)$\sim(\sim p \wedge q)$,(c)$\sim p \wedge (\sim q \wedge r)$.

解 ☞ (a)$p \wedge \sim q = p \wedge Nq = ApNq$.

(b)$\sim(\sim p \wedge q) = \sim(Np \wedge q) = \sim(ANpq) = NANpq$.

(c)$\sim p \wedge (\sim q \wedge r) = Np \wedge (Nq \wedge r) = Np \wedge (ANqr) = ANpANqr$.

12.12 用 A 和 N 分别替代∧和～重写下列表达式：

(a)$(\sim p \wedge q) \wedge (p \wedge \sim r)$,(b)$\sim(p \wedge \sim q) \wedge (\sim q \wedge \sim r)$.

解 ☞ (a) $(\sim p\wedge q)\wedge(p\wedge\sim r)=(Np\wedge q)\wedge(p\wedge Nr)$

$=(ANpq)\wedge(ApNr)=AANpqApNr$.

(b) $\sim(p\wedge\sim q)\wedge(\sim q\wedge\sim r)=\sim(ApNq)\wedge(ANqNr)$

$=(NApNq)\wedge(ANqNr)=ANApNqANqNr$.

注意，在最后的语句中无需加括号.

12.13 用 $\wedge$ 和 $\sim$ 替代 A 和 N 重写下列表达式：(a) $NApq$，(b) $ANpq$.

解 ☞ (a) $NApq=N(p\wedge q)=\sim(p\wedge q)$.

(b) $ANpq=A(\sim p)q=\sim p\wedge q$.

12.14 用 $\wedge$ 和 $\sim$ 替代 A 和 N 重写下列表达式：(a) $ApNq$，(b) $ApAqr$.

解 ☞ (a) $ApNq=Ap(\sim q)=p\wedge\sim q$.

(b) $ApAqr=Ap(q\wedge r)=p\wedge(q\wedge r)$.

12.15 用 $\wedge$ 和 $\sim$ 替代 A 和 N 重写下列表达式：(a) $NAANpqr$，(b) $ANpAqNr$.

解 ☞ (a) $NAANpqr=NAA(\sim p)qr=NA(\sim p\wedge q)r$

$=N[(\sim p\wedge q)\wedge r]=\sim[(\sim p\wedge q)\wedge r]$.

(b) $ANpAqNr=ANpAq(\sim r)=ANp(q\wedge\sim r)$

$=A(\sim p)(q\wedge\sim r)=\sim p\wedge(q\wedge\sim r)$.

注意含 A 和 N 的表达式是从右到左不散开的.

12.2 复合语句的真值

复合语句的一个基本性质是其真值完全由它的子语句的真值和将语句连接起来形成复合语句的方法一起确定的.

12.16 定义复合语句 $p\wedge q$，即"p 并且 q"的真值.

解 ☞ 语句 $p\wedge q$ 每当 p 和 q 同时是真时为真；否则 $p\wedge q$ 为假. 叙述这个性质的一个方便方法是用图 12-1(a)的"真值"表. 这就是说，第一行是叙述若 p 是真并且 q 是真则 $p\wedge q$ 是真的一种简要方法. 其他行有类似的含义. 我们将这个表如同 p 和 q 的真值函数那样作为精确地定义复合语句 $p\wedge q$ 的真(假)值.

p	q	$p\wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

(a)

p	q	$p\vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

(b)

p	$\sim p$
T	F
F	T

(c)

图 12-1

12.17 参照图 12-1(a)，判定下列语句的真假值：

(a)巴黎在法国并且 $2+2=4$；(b)巴黎在法国并且 $2+2=5$；

(c)巴黎在英国并且 $2+2=4$；(d)巴黎在英国并且 $2+2=5$.

解 ☞ 根据图 12-1(a)，仅当 p 和 q 同时为真时，语句 $p\wedge q$，即"p 并且 q"为真. 因此只有(a)是真的.

12.18 确定下列语句的真假值：

(a) $4+2=5$ 并且 $6+3=9$；(b) $3+2=5$ 并且 $6+1=7$；

(c) $4+5=9$ 并且 $1+2=4$；(d) $3+2=5$ 并且 $4+7=11$.

解 ☞ 只有当两个子语句 p 和 q 同时为真时，语句"p 并且 q"为真. 因此，(a)假，(b)真，(c)假，(d)真.

12.19　定义复合语句 $p \vee q$，即"p 或者 q"的真值.

解 ☞ 当 p 是真的或者 q 是真的或者 p 和 q 同时是真时，语句 $p \vee q$ 为真；否则 $p \vee q$ 为假. 这个性质也可用图 12-1(b)的真值表来叙述，在此，我们把它作为定义 $p \vee q$.

注　英文单词"or(或者)"通常有两种用法. 有时，它的含义是"p 或 q 或二者"，即出现两个可选择者中至少选一个，如习题 12.9. 有时它的使用含义是"p 或者 q 但非二者"，即出现两个可选择者中恰好选一个，例如，句子"他将上哈佛大学或者耶鲁大学". 按后一种意义使用"或者"，称为不可兼析取. 除非另有说明，我们将按前一种意义使用"或者". 这个讨论指出我们用真值表来定义符号语言：$p \vee q$ 的正确性，并且 $p \vee q$ 总是意指"p 与 q 二者或二者之一".

12.20　参照图 12-1(b). 重复习题 12.17.

解 ☞ 由图 12-1(b)，语句 $p \vee q$，即"p 或者 q"仅当两个子语句都是假时为假. 因此只有(d)是假的，其他语句都是真的.

12.21　确定下列语句的真假值.

(a) $1+1=5$ 或者 $2+2=4$；　　(b) $1+1=5$ 或者 $3+3=4$；

(c) $2+5=9$ 或者 $3+7=8$；　　(d) $2+5=9$ 或者 $1+7=8$.

解 ☞ 语句"p 或者 q"只有当其两个子语句都是假时为假. 因此(a)真，(b)假，(c)假，(d)真.

12.22　定义 $\sim p$(即"非 p"或者"p 是假的")的真值表，称为 p 的否定的真值表.

解 ☞ 语句 $\sim p$ 每当 p 是假时为真，并且每当 p 是真时为假. 这就是说，任一语句的否定的真假值总是同原来语句的真假值相反. 这样定义 $\sim p$ 的性质表明在图 12-1(c)的真值表中.

12.23　求下列语句的真假值：(a)巴黎在法国；(b)巴黎在法国是假的；(c)巴黎不在法国.

解 ☞ 语句(a)是真的. 因语句(b)和(c)中每一个都是(a)的否定，因此语句(b)和(c)都是假的.

12.24　求下列语句的真假值：(a) $3+3=7$；(b) $3+3=7$ 是假的；(c) $3+3\neq 7$.

解 ☞ 语句(a)是假的. (b)和(c)中每个都是(a)的否定，因而它们都是真的. 因此(b)和(c)都是真的语句.

12.25　确定下列语句的真假值：

(a) $2+2=4$ 并且 $1+1=5$，这是假的；

(b) $2+2=4$ 或者伦敦在法国，这是假的.

解 ☞ (a)由于子语句之一"$1+1=5$"是假的，因此语句"$2+2=4$ 并且 $1+1=5$"是假的，故它的否定，即所给的语句是真的.

(b)由于子语句之一"$2+2=4$"是真的，因此语句"$2+2=4$ 或者伦敦在法国"是真的. 故它的否定，即所给的语句是假的.

12.26　确定下列语句的真假值：

(a)哥本哈根在丹麦，并且 $1+1=5$ 或者 $2+2=4$.

(b)巴黎在英国，或者 $1+1=2$ 并且 $3+3=7$.

解 ☞ (a)因它的子语句之一"$2+2=4$"是真的，因此语句"$1+1=5$ 或者 $2+2=4$"是真的. 所给的语句是两个真的语句"哥本哈根在丹麦"和"$1+1=5$ 或者 $2+2=4$"的合取，因此它是真的.

(b)语句"$1+1=2$ 并且 $3+3=7$"是假的，因其子语句之一"$3+3=7$"是假的. 所给语句是两个假的语句的析取，因此它是假的.

12.27　确定下列语句的真假值：

(a)哥本哈根在丹麦，或者 $1+5=8$ 或者 $3+3=6$；

(b)巴黎在英国，并且 $3+4=7$ 或者 $2+6=8$.

解 ☞ (a)"哥本哈根在丹麦"是真的，所给语句具有形式"p 或者 q"，因此它是真的.

(b)"巴黎在英国"是假的. 所给语句具有陈述形式"p 并且 q"，因而是假的.

12.3　命题和真值表

12.28　定义一个命题及其真值表.

解　☞ 一个命题,又称为一个合式的公式(wff),是一个逻辑变元 $p,q,r,\cdots$ 或是由这些变元和逻辑联结词($\wedge,\vee,\sim$及其他以后讨论的)构成的一个表达式.有时,我们用 $P(p,q,\cdots)$ 来表示这样的一个命题.

一个命题的真假值只与其变元的真假值有关.这就是说,一旦知道命题变元的真假值便知道该命题的真假值.表明这种关系的一个简单明了方法是用如同习题 12.29 说明的真值表.

12.29　给出求命题 $\sim(p\wedge\sim q)$ 的真值表的两种方法.

解　☞ **方法一**　关于 $\sim(p\wedge\sim q)$ 的真值表,如图 12-2(a)来构造它.我们看到表的开头诸列是为变元 $p,q,\cdots$ 设置的,并且在表中有足够的行以供这些变元的 T 和 F 的所有可能组合之用.(如这里,2 个变元需要 4 行;对于 3 个变元则需 8 行;一般地,n 个变元则要求 2^n 行.)然后,命题构造的每一"初步"阶段有一列,每一步的真假值从先前阶段依联结词 $\wedge,\vee,\sim$ 的定义来确定.最后,我们得到该命题的真假值,它出现在表的最后一列中.

p	q	$\sim q$	$p\wedge\sim q$	$\sim(p\wedge\sim q)$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T

(a)

p	q	$\sim(p\wedge\sim q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

(b)

图 12-2

注　这个命题的真值表正好由变元下面的列和命题下面的列组成,如图 12-2(b)所表示的.

p	q	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$\sim$	$q)$
T	T					
T	F					
F	T					
F	F					
步骤						

图 12-3

方法二　这里,我们首先构造如图 12-3 的表.我们看到命题写在行顶上它的变元的右边,每个变元

p	q	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$\sim$	$q)$
T	T		T			T
T	F		T			F
F	T		F			T
F	F		F			F
步骤			1			1

p	q	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$\sim$	$q)$
T	T		T		F	T
T	T		T		T	T
F	T		F		F	F
F	F		F		T	F
步骤			1		2	1

p	q	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$\sim$	$q)$
T	T		T	F	F	T
T	F		T	T	T	F
F	T		F	F	F	T
F	F		F	F	T	F
步骤			1	3	2	1

p	q	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$\sim$	$q)$
T	T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	T	F
F	T	T	F	F	F	T
F	F	T	F	F	T	F
步骤		4	1	3	2	1

图 12-4

或命题联结词下面有一列．然后，在每步中将真假值填入真值表中，如图 12-4 所示．于是该命题的真值表由变元下面的原来的列和填入表的最后列，即 4 步(step)组成．

12.30 求 $\sim p \wedge q$ 的真值表．

解 ☞ 见图 12-5，在此给出习题 12.29 中介绍的构造真值表的两种方法(Method)．

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	F

方法 1

p	q	$\sim$	p	$\wedge$	q
T	T	F	T	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	F	F	F
步骤		2	1	3	1

方法 2

图 12-5

12.31 求 $\sim(p \vee q)$ 的真值表．

解 ☞ 见图 12-6．

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$
T	T	T	F
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	F	T

方法 1

p	q	$\sim$	$(p$	$\vee$	$q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	T	T	F
F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	F	F
步骤		3	1	2	1

方法 2

图 12-6

12.32 求 $\sim(p \vee \sim q)$ 的真值表．

解 ☞ 见图 12-7．

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim(p \vee \sim q)$
T	T	F	T	F
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	T	F

方法 1

p	q	$\sim$	$(p$	$\vee$	$\sim$	$q)$
T	T	F	T	T	F	T
T	F	F	T	T	T	F
F	T	T	F	F	F	T
F	F	F	F	T	T	F
步骤		4	1	3	2	1

方法 2

图 12-7

12.33 求下列命题的真值表：

(a) $p \wedge (q \vee r)$，(b) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$．

解 ☞ 因有 3 个变元，因此真值表要求 $2^3 = 8$ 行(见习题 12.29)．该真值表构造在图 12-8 中．我们看到两个命题有相同的真值表．

p	q	r	$q\vee r$	$p\wedge(q\vee r)$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	F
F	T	F	T	F
F	F	T	T	F
F	F	F	F	F

(a)

p	q	r	$p\wedge q$	$p\wedge r$	$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	T
T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F
F	T	T	F	F	F
F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F
F	F	F	F	F	F

(b)

图 12-8

12.34 求(a)$p\vee\sim q$ 和(b)$\sim p\wedge\sim q$ 的真值表.

解 ☞ 见图 12-9.

p	q	$\sim q$	$p\vee\sim q$
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T

(a)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\wedge\sim q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

(b)

图 12-9

12.4 重言式和矛盾

12.35 定义一个重言式和矛盾,并给出例子.

解 ☞ 若一个命题 $P(p,q,\cdots)$的真值表的最后一列只含 T,即若 P 对其变元的任一真假值都是真的,则 P 是一个**重言式(永真式)**.类似地,若一个命题 $P(p,q,\cdots)$的真值表的最后一列只含 F,即若 P 对其变元的任一真假值都是假的,则 P 是一个**矛盾(永假式)**.

例如,命题"p 或者非 p",即 $p\vee\sim p$ 是一个重言式;命题"p 并且非 p",即 $p\wedge\sim p$ 是一个矛盾.这可由构造它们的真值表如图 12-10 来验证.

p	$\sim p$	$p\vee\sim p$
T	F	T
F	T	T

p	$\sim p$	$p\wedge\sim p$
T	F	F
F	T	F

图 12-10

12.36 验证命题 $p\vee\sim(p\wedge q)$是一个重言式.

解 ☞ 构造 $p\vee\sim(p\wedge q)$的真值表如图 12-11 所示.由于对 p 和 q 的所有值 $p\vee\sim(p\wedge q)$都是 T,因此该命题是一个重言式.

p	q	$p\wedge q$	$\sim(p\wedge q)$	$p\vee\sim(p\wedge q)$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

图 12-11

12.37 验证命题$(p\wedge q)\wedge\sim(p\vee q)$是一个矛盾.

解 ☞ 构造$(p\wedge q)\wedge\sim(p\vee q)$的真值表如图 12-12 所示.因对 p 和 q 的所有值$(p\wedge q)\wedge\sim(p\vee q)$的真假值是 F,因此该命题是一个矛盾.

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$\sim(p\vee q)$	$(p\wedge q)\wedge\sim(p\vee q)$
T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	T	F

图 12-12

定理 12.1 若 $P(p,q,\cdots)$是一个重言式,则$\sim P(p,q,\cdots)$是一个矛盾.反之亦然.

12.38 证明定理 12.1.

证 ☞ 由于重言式总是取真,因此重言式的否定总是取假,即它是一个矛盾.并且,反之亦然.

定理 12.2(替换原理) 设 $P(p,q,\cdots)$是一个重言式,则对任何命题 $P_1,P_2,\cdots,P(P_1,P_2,\cdots)$是一个重言式.

12.39 证明定理 12.2.

证 ☞ 重言式 $P(p,q,\cdots)$不依赖其变元的特殊真假值,我们用 P_1 替代 p,P_2 替代 q,…后,$P(P_1,P_2,\cdots)$仍是一个重言式.

12.40 验证命题$(p\wedge\sim q)\vee\sim(p\wedge\sim q)$是一个重言式.

解 ☞ 这个命题具有形式 $P\vee\sim P$,其中 $P=p\wedge\sim q$.由图 12-10(a),$P\vee\sim P$ 是一个重言式,因此根据替换定理(定理 12.2)知$(p\wedge\sim q)\vee\sim(p\wedge\sim q)$也是一个重言式.

12.5 逻辑等价性

12.41 定义逻辑等价命题.

解 ☞ 若两个命题 $P(p,q,\cdots)$和 $Q(p,q,\cdots)$有相同的真值表,则称它们是逻辑等价的,或者简称等价的或相等的,表示成

$$P(p,q,\cdots)\equiv Q(p,q,\cdots).$$

12.42 证明命题$\sim(p\wedge q)$和$\sim p\vee\sim q$是逻辑等价的.

证 ☞ 构造$\sim(p\wedge q)$和$\sim p\vee\sim q$的真值表如图 12-13.因它们的真值表相同,即两个命题在第一种情形中取假而在其他情形中均取真,因此$\sim(p\wedge q)$和$\sim p\vee\sim q$是逻辑等价的.我们可以写成

$$\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q.$$

p	q	$p\wedge q$	$\sim(p\wedge q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\vee\sim q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

图 12-13

12.43 证明结合律(见表 12-1(2b)):$(p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge(q\wedge r)$.

证 ☞ 构造所要求的真值表如图 12-14.由于这两个命题的真值表相同,因此它们是等价的.

p	q	r	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\wedge r$	$q\wedge r$	$p\wedge(q\wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F
T	F	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	F	F	T	F
F	T	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

图 12-14

12.44 证明分配律(见表 12-1(4a)):$p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$.

证 ☞ 构造所要求的真值表如图 12-15.由于这两个命题的真值表相同,因此它们是等价的.

p	q	r	$q\wedge r$	$p\vee(q\wedge r)$	$p\vee q$	$p\vee r$	$(p\vee q)\wedge(p\vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

图 12-15

12.45 证明析取运算可用合取运算和否定来表示,具体地,$p\vee q\equiv\sim(\sim p\wedge\sim q)$.

证 ☞ 构造所要求的真值表如图 12-16.因两命题的真值表相同,因此它们是等价的.

p	q	$p\vee q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\wedge\sim q$	$\sim(\sim p\wedge\sim q)$
T	T	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T
F	T	T	T	F	F	T
F	F	F	T	T	T	F

图 12-16

12.46 设 $P(p)$是关于一个变元 p 的命题.(a)求非等价命题 $P(p)$的数目 m;(b)给出(a)中每个命题的一个例子.

解 ☞ (a)$P(p)$的真值表将含两行(因 p 只能或是 T 或是 F).在每行中 T 或 F 可出现在图 12-17(a)中,因此,$m=4$.

(b)考虑图 12-17(b)的真值表.这样

$$P_1(p)\equiv p\vee\sim p,\ P_2(p)\equiv p,\ P_3(p)\equiv\sim p,\ P_4(p)\equiv p\wedge\sim p.$$

p	$P_1(p)$	$P_2(p)$	$P_3(p)$	$P_4(p)$
T	T	T	F	F
F	T	F	T	F

(a)

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$	$p \wedge \sim p$
T	F	T	F
F	T	T	F

(b)

图 12-17

12.47　求两个变元的非等价命题 $P(p,q)$ 的数目 m.

解　☞ $P(p,q)$ 的真值表含有 $2^2=4$ 行. 在每一行中, T 或 F 可出现在如图 12-18 中. 这样, $m=2^4=16$.

p	q	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{14}	P_{15}	P_{16}
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	F	F	F	F	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F

图 12-18

12.48　求(a)3 个变元 p,q 和 r,(b)n 个变元 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 的非等价命题数目 m.

解　☞ (a)$P(p,q,r)$ 的真值表将含有 $2^3=8$ 行. 在每一行中可出现或是 T 或是 F. 因此 $m=2^8=256$.

(b)$P(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 的真值表将有 2^n 行. 因此, 仿上可得 $m=2^{2^n}$.

不可兼析取和联合否定

12.49　命题联结词$\veebar$称为**不可兼析取**, $p\veebar q$ 读作"p 或者 q 但非二者". 构造 $p\veebar q$ 的真值表.

解　☞ 现在, 若 p 是真的或者 q 是真的但非二者都是真的, 则 $p\veebar q$ 是真的. $p\veebar q$ 的真值表如图 12-19(a)所示.

p	q	$p\veebar q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

(a)

p	q	$(p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$q)$
T	T	T	T	T	F	F	T	T	T
T	F	T	T	F	T	T	T	F	F
F	T	F	T	T	T	T	F	F	T
F	F	F	F	F	F	T	F	F	F
步骤		1	2	1	4	3	1	2	1

(b)

图 12-19

12.50　证明 $p\veebar q \equiv (p\vee q)\wedge\sim(p\wedge q)$. 因此, $\veebar$可用原来的 3 个联结词$\wedge$, $\vee$和$\sim$来表示.

解　☞ 例如, 用习题 12-29 中的第二种方法来构$(p\vee q)\wedge\sim(p\wedge q)$的真值表, 如图12-19(b). 图 12-19(a)和(b)表明 $p\veebar q$ 和$(p\vee q)\wedge\sim(p\wedge q)$的真值表是相同的, 因此 $p\veebar q\equiv(p\vee q)\wedge\sim(p\wedge q)$.

12.51　命题联结词$\downarrow$称为**联合否定**, $p\downarrow q$ 读作"既非 p 又非 q". 构造 $p\downarrow q$ 的真值表.

解　☞ 现在, 仅当 p 非真并且 q 非真时 $p\downarrow q$ 为真. $p\downarrow q$ 的真值表如图 12-20 所示.

p	q	$p\downarrow q$
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

图 12-20

命题 12.3 三个联结词$\vee$，$\wedge$和$\sim$可用联结词$\downarrow$表示如下：

(i)$\sim p \equiv p \downarrow p$；

(ii)$p \wedge q \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$；

(iii)$p \vee q \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$.

12.52 证明命题 12.3(i).

证 ☞ 构造$\sim p$和$p \downarrow p$的真值表如图 12-21.因这两个命题有相同的真值表，因此有$\sim p \equiv p \downarrow p$.

p	$\sim p$	$p \downarrow p$
T	F	F
F	T	T

图 12-21

12.53 证明命题 12.3(ii).

证 ☞ 构造合适的真值表如图 12-22.因这两个命题有相同的真值表，因此$p \wedge q \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$.

p	q	$p \wedge q$	$p \downarrow p$	$q \downarrow q$	$(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	F

图 12-22

12.54 证明命题 12.3(iii).

证 ☞ 构造恰当的真值表.如图 12-23.因这两个命题的真值表相同，因此$p \vee q \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$.

p	q	$p \vee q$	$p \downarrow q$	$(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$
T	T	T	F	T
T	F	T	F	T
F	T	T	F	T
F	F	F	T	F

图 12-23

12.6 否定和德·摩根律

12.55 证明德·摩根(De Moregan)律(见表 12-1)：(a)$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$；(b)$\sim(p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$.

证 ☞ 构造恰当的真值表，如图 12-24(a)和(b).

p	q	$p\wedge q$	$\sim(p\wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\vee\sim q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

(a)

p	q	$p\vee q$	$\sim(p\vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\wedge\sim q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

(b)

图 12-24

12.56 验证$\sim\sim p\equiv p$(见表 12-1(8a)).

解 ☞ 构造恰当的真值表如图 12-25.

p	$\sim p$	$\sim\sim p$
T	F	T
F	T	F

图 12-25

12.57 应用习题 12.55 和 12.56 的结果简化下列各命题:(a)$\sim(p\vee\sim q)$;(b)$\sim(\sim p\wedge q)$.

解 ☞ (a)$\sim(p\vee\sim q)\equiv\sim p\wedge\sim\sim q\equiv\sim p\wedge q$.

(b)$\sim(\sim p\wedge q)\equiv\sim\sim p\vee\sim q\equiv p\vee\sim q$.

12.58 应用习题 12.55 和 12.56 的结果简化下列各命题:(a)$\sim(p\wedge\sim q)$;(b)$\sim(\sim p\vee\sim q)$.

解 ☞ (a)$\sim(p\wedge\sim q)\equiv\sim p\vee\sim\sim q\equiv\sim p\vee q$.

(b)$\sim(\sim p\vee\sim q)\equiv\sim\sim p\wedge\sim\sim q\equiv p\wedge q$.

12.59 简化下列各命题:(a)$\sim(\sim p\vee q)$,(b)$\sim(\sim p\wedge\sim q)$.

解 ☞ (a)$\sim(\sim p\vee q)\equiv\sim\sim p\wedge\sim q\equiv p\wedge\sim q$.

(b)$\sim(\sim p\wedge\sim q)\equiv\sim\sim p\vee\sim\sim q\equiv p\vee q$.

12.60 应用前面习题的结果简化下列语句:

(a)他的母亲是英国人或他的父亲是法国人,这不是真的;

(b)他学物理但不学数学,这不是真的.

解 ☞ (a)设p表示"他母亲是英国人"和q表示"他父亲是法国人",那么所给语句是$\sim(p\vee q)$.但$\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$,因此所给语句逻辑上等价于语句"他的母亲不是英国人并且他的父亲不是法国人".

(b)设p表示"他学物理"和q表示"他学数学",那么所给语句是$\sim(p\wedge\sim q)$.但$\sim(p\wedge\sim q)\equiv\sim p\vee\sim\sim q\equiv\sim p\vee q$,于是所给语句逻辑上等价于语句"他不学物理或者他学数学".

12.61 简化下列语句：

(a)销售额在减少并且价格在上涨，这不是真的；

(b)天不冷或者天在下雨，这不是真的.

解 ☞ (a)由于 $\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q$，因此所给的语句逻辑上等价于"销售额在增加或者价格在下跌".

(b)由于 $\sim(\sim p\vee q)\equiv p\wedge\sim q$，因此所给语句逻辑上等价于"天冷并不下雨".

12.62 尽可能简单地写出下列语句的否定.

(a)他身材高且英俊；

(b)他有淡黄色的头发或蓝色的眼睛.

解 ☞ (a)应用 $\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q$，得到："他不高或者不英俊".

(b)应用 $\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$，得到："他既无淡黄色的头发又无蓝色的眼睛".

12.63 尽可能简单地写出下列语句的否定.

(a)他既不富有又不快乐；

(b)他失去工作或者他今天不上班.

解 ☞ (a)应用 $\sim(\sim p\wedge\sim q)\equiv p\vee q$，得到："他富有或者快乐".

(b)应用 $\sim(p\vee\sim q)\equiv\sim p\wedge q$，得到："他没有失去工作并且他今天去上班".

12.64 尽可能简单地写出下列语句的否定.(a) $(\sim p\vee q)\wedge r$；(b) $p\vee(q\wedge\sim r)$.

解 ☞ (a) $\sim[(\sim p\vee q)\wedge r]\equiv\sim(\sim p\vee q)\vee\sim r\equiv(p\wedge\sim q)\vee\sim r$.

(b) $\sim[p\vee(q\wedge\sim r)]\equiv\sim p\wedge\sim(q\wedge r)\equiv\sim p\wedge(\sim q\vee r)$.

12.65 通过 $\vee$ 和 $\sim$ 表示 $\wedge$ 证明 $p\wedge q\equiv\sim(\sim p\vee\sim q)$.(同习题 12.45 比较.)

证 ☞ 应用德·摩根律得到

$$\sim(\sim p\vee\sim q)\equiv\sim\sim p\wedge\sim\sim q\equiv p\wedge q.$$

12.7 命题代数

命题关于逻辑等价关系满足列在表 12-1 中的各种定律(恒等式)(此处 t 和 f 分别限于表示真假值为真和假的变元).一些定律已在前面证明过.为完整起见，我们正式叙述成下面的定理.

定理 12.4 命题满足表 12-1 中的定律.

表 12-1

命题代数的定律	
幂等律	
1a. $p\vee p\equiv p$	1b. $p\wedge p\equiv p$
结合律	
2a. $(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)$	2b. $(p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge(q\wedge r)$
交换律	
3a. $p\vee q\equiv q\vee p$	3b. $p\wedge q\equiv q\wedge p$
分配律	
4a. $p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$	4b. $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$
同一律	
5a. $p\vee f\equiv p$	5b. $p\wedge t\equiv p$
6a. $p\vee t\equiv t$	6b. $p\wedge f\equiv f$
补余律	
7a. $p\vee\sim p\equiv t$	7b. $p\wedge\sim p\equiv f$
8a. $\sim\sim p\equiv p$	8b. $\sim t\equiv f$, $\sim f\equiv t$
德·摩根律	
9a. $\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$	9b. $\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q$

12.66 应用表 12-1 中定律证明逻辑等价性：$(p\vee q)\wedge\sim p\equiv\sim p\wedge q$.

证 ☞

语句	理由
(1) $(p\vee q)\wedge\sim p\equiv\sim p\wedge(p\vee q)$	(1) 交换律
(2) $\equiv(\sim p\wedge p)\vee(\sim p\wedge q)$	(2) 分配律
(3) $\equiv f\vee(\sim p\wedge q)$	(3) 补余律
(4) $\equiv\sim p\wedge q$	(4) 同一律

12.67 应用表 12-1 中定律证明 $p\vee(p\wedge q)\equiv p$.

证 ☞

语句	理由
(1) $p\vee(p\wedge q)\equiv(p\wedge t)\vee(p\wedge q)$	(1) 同一律
(2) $\equiv p\wedge(t\vee q)$	(2) 分配律
(3) $\equiv p\wedge t$	(3) 同一律
(4) $\equiv p$	(4) 同一律

12.68 应用表 12-1 中定律证明 $\sim(p\vee q)\vee(\sim p\wedge q)\equiv\sim p$.

证 ☞

语句	理由
(1) $\sim(p\vee q)\vee(\sim p\wedge q)\equiv(\sim p\wedge\sim q)\vee(\sim p\wedge q)$	(1) 德·摩根律
(2) $\equiv\sim p\wedge(\sim q\vee q)$	(2) 分配律
(3) $\equiv\sim p\wedge t$	(3) 补余律
(4) $\equiv\sim p$	(4) 同一律

12.69 应用表 12-1 中定律证明 $p\wedge(p\vee q)\equiv p$.

证 ☞ $p\wedge(p\vee q)\equiv(p\vee f)\wedge(p\vee q)\equiv p\vee(f\wedge q)$

$\equiv p\vee f\equiv p.$

12.70 应用表 12-1 中定律证明 $p\wedge(\sim p\vee q)\equiv p\wedge q$.

证 ☞ $p\wedge(\sim p\vee q)\equiv(p\wedge\sim p)\vee(p\wedge q)\equiv f\vee(p\wedge q)$

$\equiv p\wedge q.$

12.71 应用表 12-1 中定律证明 $(p\wedge q)\vee\sim p\equiv\sim p\vee q$.

证 ☞ $(p\wedge q)\vee\sim p\equiv\sim p\vee(p\wedge q)\equiv(\sim p\vee p)\wedge(\sim p\vee q)$

$\equiv(p\vee\sim p)\wedge(\sim p\vee q)\equiv t\wedge(\sim p\vee q)$

$\equiv(\sim p\vee q)\wedge t\equiv\sim p\vee q.$

12.8 条件语句 $p\rightarrow q$

特别是在数学中，许多语句具有形式"如果 p 那么 q". 这样的语句称为**条件语句**，并用

$$p\rightarrow q$$

来表示. 条件语句 $p\rightarrow q$ 有时读作：(1) p 推得 q，(2) 仅当 q 时才 p，(3) p 对 q 是充分的，(4) q 对 p 是必要的.

12.72 设 p 表示"天冷"和 q 表示"天下雨". 用符号形式写出下列语句.

(a)只有当天冷时才下雨；

(b)天冷的必要条件是天下雨；

(c)天冷的充分条件是天下雨.

解 ☞ 回忆起，$p\rightarrow q$ 可读作"仅当 q 时则 p"，"p 对 q 是充分的"或"q 对 p 是必要的". 因此(a) $q\rightarrow p$，(b) $p\rightarrow q$，(c) $q\rightarrow p$.

12.73 就下列语句重复问题 12.72.

(a)每当天下雨时天冷；

(b)当天冷时不下雨.

解 ☞ (a)现在，语句"每当天下雨时天冷"等价于"如果天下雨则天冷". 就是说，$q\rightarrow p$.

(b)语句“当天冷时不下雨”等价于“若天冷则不下雨”. 就是说, $p\to\sim q$.

12.74 定义复合语句 $p\to q$,即“若 p 则 q”的真假值.

解 ☞ 语句 $p\to q$ 除 p 是真且 q 是假的情形外总是取真. 这个性质也可用图 12-26(a)的真值表来表示.

p	q	$p\to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

(a)

p	q	$\sim p$	$\sim p\vee q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

(b)

图 12-26

12.75 证明 $p\to q$ 逻辑等价于 $\sim p\vee q$,即

$$p\to q\equiv\sim p\vee q.$$

解 ☞ 换句话说,条件语句“若 p 则 q”是逻辑等价于语句“非 p 或者 q”,在此仅含联结词 $\vee$ 和 $\sim$,并且这已是我们的语言的一部分. 我们可以认为 $p\to q$ 是常出现的语句的一个缩写.

构造 $\sim p\vee q$ 的真值表如图 12-26(b). 它与图 12-26(a) $p\to q$ 的真值表相同. 因此, $p\to q\equiv\sim p\vee q$.

12.76 确定下列语句的真假值:

(a)如果巴黎在法国,那么 $2+2=4$;

(b)如果巴黎在法国,那么 $2+2=5$;

(c)如果巴黎在英国,那么 $2+2=4$;

(d)如果巴黎在英国,那么 $2+2=5$.

解 ☞ 根据图 12-26(a),语句只有 p 是真且 q 是假时取假. 因此只有(b)是假的.

12.77 不用条件语句重新写下列语句.

(a)如果天冷,他则戴帽子;

(b)若产量增加,工资则提高.

解 ☞ 回忆一下,“若 p 则 q”等价于“非 p 或者 q”,即

$$p\to q\equiv\sim p\vee q.$$

(a)天不冷或者他戴帽子;

(b)产量不增加或者提高工资.

12.78 构造 $(p\to q)\to(p\wedge q)$ 的真值表.

解 ☞ 见图 12-27.

p	q	$p\to q$	$p\wedge q$	$(p\to q)\to(p\wedge q)$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	F
F	F	T	F	F

图 12-27

12.79 构造 $\sim p\to(q\to p)$ 的真值表.

解 ☞ 见图 12-28.

p	q	$\sim p$	$q\to p$	$\sim p\to(q\to p)$
T	T	F	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

图 12-28

12.80 验证$(p\wedge q)\to(p\vee q)$是一个重言式.

解 ☞ 构造$(p\wedge q)\to(p\vee q)$的真值表如图 12.29.因对 p 和 q 的所有值,$(p\wedge q)\to(p\vee q)$的真假值是 T,因此它是一个重言式.

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$(p\wedge q)\to(p\vee q)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

图 12-29

12.81 证明条件运算关于合取是分配的,即

$$p\to(q\wedge r)\equiv(p\to q)\wedge(p\to r).$$

证 ☞ 我们有 3 个变元,因此真值表需 $2^3=8$ 行.所要求的真值表为图 12-30 所表示.我们看到两个命题有相同的真值表.

p	q	r	$q\wedge r$	$p\to(q\wedge r)$	$p\to q$	$p\to r$	$(p\to q)\wedge(p\to r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	F	F
T	F	T	F	F	F	T	F
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T

图 12-30

条件语句和变型

这一小节考虑条件语句 $p\to q$ 和下列含 p 和 q 的其他简单命题:

$$q\to p,\ \sim p\to\sim q,\ \sim q\to\sim p.$$

这些命题分别称为原条件命题 $p\to q$ 的逆(命题),否(命题)和逆否(命题).

12.82 上面的命题中有哪些是逻辑等价于 $p\to q$?

解 ☞ 构造它们的真值表如图 12-31.只有逆否命题$\sim q\to\sim p$ 逻辑等价于原条件命题 $p\to q$.

				条件	逆	否	逆否
p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p\to q$	$q\to p$	$\sim p\to\sim q$	$\sim q\to\sim p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

图 12-31

我们把习题 12.82 的重要结果正式叙述为如下定理.

定理 12.5 条件语句 $p\to q$ 与其逆否 $\sim q\to\sim p$ 是逻辑等价的.

12.83 求下列语句的逆否：

(a)如果约翰是一位诗人,则他是贫穷的；

(b)只要马克学习他将会通过考试.

解 ☞ (a) $p\to q$ 的逆否是 $\sim q\to\sim p$. 因此所给的语句的逆否是

如果约翰不贫穷,他则不是一位诗人.

(b)所给语句等价于"若马克通过考试,则他是学习的". 因此它的逆否是

如果马克不学习,他将不会通过考试.

12.84 求下列各语句的逆否：

(a)埃里克要滑雪必须有雪；

(b)若 x 小于零,则 x 非正数.

解 ☞ (a)所给语句等价于"如果埃里克滑雪,则天下雪了". 因此它的逆否是

如果天不下雪,那么埃里克将不滑雪.

(b) $p\to\sim q$ 的逆否是 $\sim\sim q\to\sim p\equiv q\to\sim p$. 因此所给语句的逆否是

如果 x 是正数,则 x 不小于零.

12.85 求出并简化：(a) $p\to q$ 的逆否的逆否；(b) $p\to q$ 的逆的逆否；(c) $p\to q$ 的否的逆否.

解 ☞ (a) $p\to q$ 的逆否是 $\sim q\to\sim p$. $\sim q\to\sim p$ 的逆否是 $\sim\sim p\to\sim\sim q\equiv p\to q$，它是原来的条件命题.

(b) $p\to q$ 的逆是 $q\to p$. $q\to p$ 的逆否是 $\sim p\to\sim q$，它是 $p\to q$ 的否命题.

(c) $p\to q$ 的否是 $\sim p\to\sim q$. $\sim p\to\sim q$ 的逆否是 $\sim\sim q\to\sim\sim p\equiv q\to p$，它是 $p\to q$ 的逆命题.

12.86 求下列语句的逆否：

(a)如果他有勇气,他将获胜；

(b)作为一名士兵,强壮是必要的；

(c)只有当他不疲倦时,他将获胜；

(d)一个正方形必是长方形.

解 ☞ (a)如果他不获胜,他则没有勇气.

(b)如果他不强壮,那么他不是一名士兵.

(c)他若疲倦,则将不会获胜.

(d)若不是长方形,则它不是正方形.

12.87 证明($p\to q$)：若 x 是一个整数且 x^2 是奇数,则 x 是奇数.

证 ☞ 我们证明逆否命题 $\sim q\to\sim p$,"若 x 是偶数,则 x^2 是偶数"是真的,设 x 是偶数,则 $x=2n$,此处 n 是一个整数. 因此 $x^2=(2n)(2n)=2(2n^2)$ 也是偶数. 由于逆否语句 $\sim q\to\sim p$ 是真的,因此原来的条件语句也是真的.

12.9 双条件语句 $p\leftrightarrow q$

特别在数学中,另一个常用语句具有形式"p 当且仅当 q". 这样的语句用

$$p\leftrightarrow q$$

来表示,称之为**双条件语句**.

12.88 定义双条件语言 $p\leftrightarrow q$,即"p 当且仅当 q"的真值表.

p	q	$p\leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

图 12-32

解 ☞ 语句 $p\leftrightarrow q$ 每当 p 和 q 有相同的真假值时为真;否则 $p\leftrightarrow q$ 是假的.这个性质也用图 12-32 的真值表来表示.

12.89 求下列语句的真假值:

(a)巴黎在法国当且仅当 $2+2=4$;

(b)巴黎在法国当且仅当 $2+2=5$;

(c)巴黎在英国当且仅当 $2+2=4$;

(d)巴黎在英国当且仅当 $2+2=5$.

解 ☞ 由图 12-32,由于(a)的子语句同时是真的,(d)的子语句同时是假的,因此(a)和(d)是真的.另一方面,(b)和(c)是假的,因它们的子语句有不同的真假值.

定理 12.6 命题 $P(p,q,\cdots)$ 和 $Q(p,q,\cdots)$ 是逻辑等价的充分必要条件是命题

$$P(p,q,\cdots)\leftrightarrow Q(p,q,\cdots)$$

是一个重言式.

12.90 证明定理 12.6.

证 ☞ 设 $P(p,q,\cdots)\equiv Q(p,q,\cdots)$,则它们有相同的真值表.因此 $P(p,q,\cdots)\leftrightarrow Q(p,q,\cdots)$ 对变元 $p,q,\cdots$ 的每个值都是真的,这就是说该命题是一个重言式.反之,从每一步都是可逆的得 $P(p,q,\cdots)$ 和 $Q(p,q,\cdots)$ 是逻辑等价的.

12.91 证明"p 推得 q 且 q 推得 p"是逻辑等价于双条件语句"p 当且仅当 q",即

$$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)\equiv p\leftrightarrow q.$$

证 ☞ 列出 $p\leftrightarrow q$ 和 $(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$ 的真值表如图 12-33.由于两个真值表相同,因此它们是逻辑等价的.

p	q	$p\leftrightarrow q$	$p\rightarrow q$	$q\rightarrow p$	$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

图 12-33

12.92 证明双条件语句 $p\leftrightarrow q$ 可用原来的三个联结词 $\vee$, $\wedge$ 和 $\sim$ 来表示.

证 ☞ 现在,$p\rightarrow q\equiv\sim p\vee q$ 和 $q\rightarrow p\equiv\sim q\vee p$.因此,根据习题 12.91,

$$p\leftrightarrow q\equiv(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)\equiv(\sim p\vee q)\wedge(\sim q\vee p).$$

12.93 求下列语句的真假值:

(a)$2+2=4$　当且仅当　$3+6=9$;

(b)$2+2=7$　当且仅当　$5+1=2$;

(c)$1+1=2$　当且仅当　$3+2=8$;

(d)$1+2=5$　当且仅当　$3+1=4$.

解 ☞ 每当 p 和 q 有相同的真假值时 $p\leftrightarrow q$ 取真值,因此(a)和(b)是真语言,但(c)和(d)是假的.我们注意到,虽然(b)的两个子语句 $2+2=7$ 和 $5+1=2$ 都是假的,但根据双条件语句的定义,(b)是真语句.

12.94 列出 $(p\rightarrow q)\vee\sim(p\leftrightarrow\sim q)$ 的真值表.

解 ☞ 见图 12-34.

p	q	$(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\vee$	$\sim$	$(p$	$\leftrightarrow$	$\sim$	$q)$
T	T	T	T	T	T	T	T	F	F	T
T	F	T	F	F	F	F	T	T	T	F
F	T	F	T	T	T	F	F	T	F	T
F	F	F	T	F	T	T	F	F	T	F
步骤		1	2	1	5	4	1	3	2	1

图 12-34

12.95 列出$(p\leftrightarrow\sim q)\leftrightarrow(q\rightarrow p)$的真值表.

解 ☞ 见图 12-35.

p	q	$\sim q$	$p\leftrightarrow\sim q$	$q\rightarrow p$	$(p\leftrightarrow\sim q)\leftrightarrow(q\rightarrow p)$
T	T	F	F	T	F
T	F	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	F	T	F

图 12-35

条件语句及其否定

这一小节考虑条件语句 $p\rightarrow q$ 和双条件语句 $p\leftrightarrow q$ 以及它们的否定.

12.96 设 p 表示"他富有"和 q 表示"他快乐".应用 p 和 q 将下列语句用符号形式表示.(注意,假定"他贫穷等价于$\sim p$.)

(a)他若富有,则不快乐;

(b)他既不富有又不快乐;

(c)要快乐,必然贫穷;

(d)贫穷就是不快乐.

解 ☞ 把"若 p 则 q"或其等价语句用 $p\rightarrow q$ 表示,以及"p 当且仅当 q"用 $p\leftrightarrow q$ 表示.于是

(a)$p\rightarrow\sim q$,(b)$\sim p\wedge\sim q$,(c)$q\rightarrow\sim p$,(d)$\sim p\leftrightarrow\sim q$.

12.97 就下列语句重复习题 12.96.

(a)富有是快乐的必要条件;

(b)一个人富有的时候是不快乐的;

(c)只有当他快乐时,他才贫穷;

(d)富有意味着和快乐一样.

解 ☞ (a)$q\rightarrow p$,(b)$p\rightarrow\sim q$,(c)$\sim p\rightarrow q$,(d)$p\leftrightarrow q$.

12.98 求下列语句的真假值:

(a)若 $7<2$,则 $-2<-7$;　　(b)$2+2=5$ 当且仅当 $4+4=10$;

(c)若 $1+1=2$,则 $2+3=6$;　　(d)$1+1=2$ 当且仅当 $4+4=10$.

解 ☞ (a)真.因两个语句都是假的.

(b)真.因两个语句都是假的.

(c)假.因"如果"语句是真的,但"那么"语句是假的.

(d)假.因两个语句有不同的真假值.

12.99 求下列语句的真假值:

(a)如果 $2+2=4$，那么 $3+3=5$ 且 $1+1=2$；

(b)如果 $2+2=4$，那么 $3+3=7$　当且仅当　$1+4=4$.

解 ☞ (a)假.因“如果”语句是真的，但“那么”语句是假的.

(b)真.因“如果”语句是真的，而且“那么”语句也是真的.

12.100 用真值表验证如下条件和双条件语句的否定：

(a) $\sim(p\to q)\equiv p\wedge\sim q$；(b) $\sim(p\leftrightarrow q)\equiv p\leftrightarrow\sim q\equiv\sim p\leftrightarrow q$.

解 ☞ 见图 12-36(a)和(b).

注 由于 $p\to q\equiv\sim p\vee q$，我们可用德·摩根律验证语句(a)如下：

$$\sim(p\to q)\equiv\sim(\sim p\vee q)\equiv\sim\sim p\wedge\sim q\equiv p\wedge\sim q.$$

(a)

p	q	$p\to q$	$\sim(p\to q)$	$\sim q$	$p\wedge\sim q$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	F
F	F	T	F	T	F

(b)

p	q	$p\leftrightarrow q$	$\sim(p\leftrightarrow q)$	$\sim p$	$\sim p\leftrightarrow q$	$\sim q$	$p\leftrightarrow\sim q$
T	T	T	F	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T	T
F	T	F	T	T	T	F	T
F	F	T	F	T	F	T	F

图 12-36

12.101 简化：(a) $\sim(p\leftrightarrow\sim q)$，(b) $\sim(\sim p\leftrightarrow q)$.

解 ☞ (a) $\sim(p\leftrightarrow\sim q)\equiv p\leftrightarrow\sim\sim q\equiv p\leftrightarrow q$.

(b) $\sim(\sim p\leftrightarrow q)\equiv\sim\sim p\leftrightarrow q\equiv p\leftrightarrow q$.

12.102 简化：(a) $\sim(p\to\sim q)$，(b) $\sim(\sim p\to\sim q)$.

解 ☞ (a) $\sim(p\to\sim q)\equiv p\wedge\sim\sim q\equiv p\wedge q$.

(b) $\sim(\sim p\to\sim q)\equiv\sim p\wedge\sim\sim q\equiv\sim p\wedge q$.

12.103 尽可能简单地写出下列语句的否定.

(a)他若学习则会通过考试；

(b)当且仅当水温暖时他游泳；

(c)如果下雪，他则不开车.

解 ☞ (a)注意到 $\sim(p\to q)\equiv p\wedge\sim q$，因此该语句的否定是：

他学习而不通过考试.

(b)由于 $\sim(p\leftrightarrow q)\equiv p\leftrightarrow\sim q\equiv\sim p\leftrightarrow q$，因此该语句的否定是下面两个语句的任何一个：

当且仅当水不温暖时他游泳.

当且仅当水温暖时他不游泳.

(c)由于 $\sim(p\to\sim q)\equiv p\wedge\sim\sim q\equiv p\wedge q$，因此该语句的否定是：

天下雪他还开车.

12.104 用尽可能简单的句子写下列语句的否定.

(a)如果天冷，他则穿外套但不穿衬衫；

(b)如果他学习，那么他将上学院或者上艺术学校.

解 ☞ (a)设 p 表示"天冷"，q 表示"他穿外套"，r 表示"他穿衬衫".于是所给语句可表示成 $p \to (p \wedge \sim r)$.现在

$$\sim [p \to (q \wedge \sim r)] \equiv p \wedge \sim (q \wedge \sim r) \equiv p \wedge (\sim q \vee r).$$

因此该语句的否定是：

天冷，他还是穿衬衫或者不穿外套.

(b)所给语句具有形式 $p \to (q \vee r)$.由于

$$\sim [p \to (q \vee r)] \equiv p \wedge \sim (q \vee r) \equiv p \wedge \sim p \wedge \sim r,$$

因此所给语句的否定是：

他学习并且他既不上学院也不上艺术学校.

12.10 论证

12.105 定义一个论证.什么时候论证成立?

解 ☞ 一个**论证**是一论断，它由一组给定的命题 $P_1, P_2, \cdots, P_n$，称为**前提**，引出另一个命题 Q，称为**结论**.这样的论证用

$$P_1, P_2, \cdots, P_n \vdash Q$$

表示.一个"逻辑论证"或"正确论证"的概念公式化如下：

[T] 如果每当所有前提 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 都为真时，Q 为真，那么我们说论证 $P_1, P_2, \cdots, P_n \vdash Q$ 是**成立**的.

一个不成立的论证称为**一个谬论**.

12.106 证明下面的论证成立：

$$p, p \to q \vdash q \qquad \text{(分离律)}.$$

证 ☞ 这个定律的证明从图 12-37 的真值表得到.由于 p 在第 1 和 2 行取真，并且 $p \to q$ 在第 1，3 和 4 行取真，因此 p 和 $p \to q$ 同时在第 1 行取真.在此情况下，q 取真，因此该论证成立.

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

图 12-37

12.107 证明下面的论证是一个谬论：$p \to q, q \vdash p$.

证 ☞ 所要求的结果从图 12-37 的真值表得到，这就说，在表中第三行 $p \to q$ 和 q 都是真的，但在此情况下结论 p 却是假的.

定理 12.7 论证 $P_1, P_2, \cdots, P_n \vdash Q$ 成立的充分必要条件是命题$(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n) \to Q$ 是一个重言式.

12.108 证明定理 12.7.

证 ☞ 命题 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 同时成立的充分必要条件为 $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n$ 是真的.因此论证 $P_1, P_2, \cdots, P_n \vdash Q$ 成立的充分必要条件是每当 $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots P_n$ 为真时 Q 为真，或等价地，命题 $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n) \to Q$ 是一个重言式.于是定理得证.

12.109 逻辑推理的一个基本原理是说："若 p 推得 q 且 q 推得 r，则 p 推得 r"，就是说，下面的论证成立：

$$p \to q, q \to r \vdash p \to r \qquad \text{(三段律)}.$$

证明这个原理是正确的.

证 ☞ 构造$[(p\to q)\wedge(q\to r)]\to(p\to r)$的真值表如图 12-38. 它是一个重言式(在第 4 步中只含 T), 因此原来的论证是成立的. 等价地, 由于仅在第 1,5,7 和 8 行前提 $p\to q$ 和 $q\to r$ 同时为真, 且在这些行结论 $p\to r$ 也是真的, 因此该论证是成立的. (我们注意到, 有 3 个变元 p,q 和 r, 因此真值表要求 $2^3=8$ 行.)

p	q	r	$[(p$	$\to$	$q)$	$\wedge$	$(q$	$\to$	$r)]$	$\to$	$(p$	$\to$	$r)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T	F	F	T	T	F	F
T	F	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F	F	T	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	F	T	T	F	T	F	F	T	F	T	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	T	T	F	T	T
F	F	F	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F
步骤			1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1

图 12-38

12.110 证明论证:

$$p\to q,\ \sim p\vdash\sim q$$

是一个谬论.

证 ☞ 构造$[(p\to q)\wedge\sim p]\to\sim q$的真值表如图 12-39. 由于命题$[(p\to q)\wedge\sim p]\to\sim q$不是一个重言式, 因此该论证是一个谬论. 等价地, 由于真值表的第 3 行 $p\to q$ 和 $\sim p$ 取真, 但 $\sim q$ 取假, 因此该论证是一个谬论.

p	q	$p\to q$	$\sim p$	$(p\to q)\wedge\sim p$	$\sim q$	$[(p\to q)\wedge\sim p]\to\sim q$
T	T	T	F	F	F	T
T	F	F	F	F	T	T
F	T	T	T	T	F	F
F	F	T	T	T	T	T

图 12-39

12.111 用先前的结果证明 $p\to\sim q,q\vdash\sim p$ 成立.

证 ☞

语句	理由
(1) q 是真的.	(1) 给定的
(2) $p\to\sim q$ 是真的.	(2) 给定的
(3) $q\to\sim p$ 是真的.	(3) (2)的逆否
(4) $\sim p$ 是真的.	(4)用(1)和(3), 分离律

12.112 证明论证:

$$p\leftrightarrow q,q\vdash p$$

成立.

证 ☞ **方法一** 构造真值表如图 12-40(a). 现在 $p\leftrightarrow q$ 在第 1 行和第 4 行取真, 以及 q 在第 1 行和第 3 行取真, 因而 $p\leftrightarrow q$ 和 q 仅仅同时在第一行取真, 在此 p 亦取真, 因此论证 $p\leftrightarrow q,q\vdash p$ 成立.

方法二 构造$[(p\leftrightarrow q)\wedge q]\to p$的真值表如图 12-40(b). 由于$[(p\leftrightarrow q)\wedge q]\to p$是一个重言式, 因此该论证成立.

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

(a)

p	q	$p \leftrightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \wedge q$	$[(p \leftrightarrow q) \wedge q] \to p$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T

(b)

图 12-40

12.113 判定论证 $p \to q, \sim q \vdash \sim p$ 的正确性.

解 ☞ 构造 $[(p \to q) \wedge \sim q] \to \sim p$ 的真值表如图 12-41. 由于命题 $[(p \to q) \wedge \sim q] \to \sim p$ 是一个重言式，因此所给论证成立.

p	q	$[(p$	$\to$	$q)$	$\wedge$	$\sim$	$q]$	$\to$	$\sim$	p
T	T	T	T	T	F	F	T	T	F	T
T	F	T	F	F	F	T	F	T	F	T
F	T	F	T	T	F	F	T	T	T	F
F	F	F	T	F	T	T	F	T	T	F
步骤		1	2	1	3	2	1	4	2	1

图 12-41

12.114 判定论证 $\sim p \to q, p \vdash \sim q$ 的正确性.

解 ☞ 构造 $[(\sim p \to q) \wedge p] \to \sim q$ 的真值表如图 12-42. 由于命题 $[(\sim p \to q) \wedge p] \to \sim q$ 不是一个重言式，因此该论证 $\sim p \to q, p \vdash \sim q$ 是一个谬论. 注意到 $\sim p \to q$ 和 p 在第 1 行同时取真，但此情形中，－q 取假.

p	q	$\sim p$	$\sim p \to q$	$(\sim p \to q) \wedge p$	$\sim q$	$[(\sim p \to q) \wedge p] \to \sim q$
T	T	F	T	T	F	F
T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	F	T
F	F	T	F	F	T	T

图 12-42

12.115 证明论证：

$$p \to \sim q, r \to q, r \vdash \sim p$$

成立成立.

证 ☞ 构造前提和结论的真值表如图 12-43. 现在 $p \to \sim q$, $r \to q$ 和 r 同时在第 5 行的情形取真，在此 $\sim p$ 亦是真的，因此所给的论证成立.

	p	q	r	$p \to \sim q$	$r \to q$	$\sim p$
1	T	T	T	F	T	F
2	T	T	F	F	T	F
3	T	F	T	T	F	F
4	T	F	F	T	T	F
5	F	T	T	T	T	T
6	F	T	F	T	T	T
7	F	F	T	T	F	T
8	F	F	F	T	T	T

图 12-43

12.116 用先前的结果重复习题 12.115.

证 ☞

语句	理由
(1) $p \to \sim q$ 是真的.	(1) 给定的
(2) $r \to q$ 是真的.	(2) 给定的
(3) $\sim q \to \sim r$ 是真的.	(3) (2)的逆否
(4) $p \to \sim r$ 是真的.	(4) 用(1)和(3),三段律
(5) $r \to \sim p$ 是真的.	(5) (4)的逆否
(6) r 是真的.	(6) 给定的
(7) $\sim p$ 是真的.	(7) 用(5)和(6),分离律

12.117 判定命题:

$$P(p,q,r) = [(p \to \sim q) \wedge (r \to q) \wedge r] \to \sim p$$

是否是一个重言式.

解 ☞ 根据习题 12.115(或习题 12.116),论证

$$p \to \sim q, r \to q, r \vdash \sim p$$

成立.因此所给命题 $P(p,q,r)$是一个重言式(定理 12.6).

论证和语句

这一小节将上述定理应用到涉及特殊语句的论证中,我们强调论证的正确性不依赖于出现在论证中的语句的真假值或内容,但依赖于论证的特有形式.

12.118 判定下面论证的正确性:

S_1:如果一个人是单身汉,他则不是快乐的.

S_2:如果一个人是不快乐的,他则死得年轻.

……………

S:单身汉死得年轻.

这里,在线以下的语句 S 表示该论证的结论,线以上的语句 S_1 和 S_2 表示前提.

解 ☞ 将论证 $S_1, S_2 \vdash S$ 转换成符号形式

$$p \to q, q \to r \vdash p \to r,$$

此处,p 表示"他是一个单身汉",q 表示"他不快乐",r 表示"他死得年轻".根据三段律(见习题 12.109),这个论证是成立的,因此所给论证正确.

12.119 判定下面论证的正确性:

S_1:如果一个三角形的两条边相等,则两边所对的角相等.

S_2:一个三角形的两边不相等.

……………

S:两条边所对的角不相等.

解 ☞ 首先将该证明转换成符号形式 $p \to q, \sim p \vdash \sim q$,此处 p 表示"一个三角形的两边相等",q 表示"两边所对的角相等".根据习题 12.114,这个论证是一个谬论.虽然结论 S 从 S_2 和欧几里得公理得到,但是由于上面的论证是一个谬论,因此该论证不构成一个证明.

12.120 判定下面论证的正确性:

S_1:若 7 小于 4,则 7 不是一个质数.

S_2:7 不小于 4.

……………

S:7 是一个质数.

解 ☞ 首先将该论证转换成符号形式.设 p 是"7 小于 4"和 q 是"7 是一个质数".于是该论证具有形式

$$p\to\sim q,\ \sim p\vdash q.$$

由于图 12-44 的真值表的第 4 行中前提 $p\to\sim q$ 和 $\sim p$ 是真的，但结论 q 是假的，因此该论证是一个谬论.

事实上该论证的结论碰巧是一个真语句与该论证是一个谬论不相干.

p	q	$\sim q$	$p\to\sim q$	$\sim p$
T	T	F	F	F
T	F	T	T	F
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T

图 12-44

12.121　检验下面论证的正确性：

S_1:若 5 是一个质数，则 5 不整除 15.

S_2:5 整除 15.

…………

S:5 不是一个质数.

解　☞ 首先将该论证转换成符号形式 $p\to\sim q, q\vdash\sim p$，此处 p 是"5 是一个质数"，q 是"5 整除 15". 根据习题 12.111，该论证成立.

虽然这里的结论是一个假的语句，但是所给的论证仍然是成立的. 我们会在逻辑上导出错误结论是因为前提 S_1 是错的.

12.122　检验下列论证的正确性：

(a)如果天下雨，埃里克将会生病.

天不下雨

…………

埃里克不生病

(b)如果天下雨，埃里克将会生病.

埃里克不生病

…………

天不下雨.

解　☞ 首先把论证转换成符号形式：

(a)$p\to q, \sim p\vdash\sim q$，(b)$p\to q, \sim q\vdash\sim p$，

此处 p 是"天下雨"，q 是"埃里克生病". 根据习题 12.110，论证(a)是谬论，但根据习题 12.113，论证(b)是成立的.

12.123　检验下面论证的正确性：

如果我喜欢数学，那么我将学习.

我或是学习或是不及格

…………

如果我不及格，那么我不喜欢数学.

解　☞ 首先将论证转换成符号形式. 设 p 是"我喜欢数学"，q 表示"我学习"，以及 r 是"我不及格". 那么所给的论证具有形式

$$p\to q, q\vee r\vdash r\to\sim p.$$

为了检验论证的正确性，我们构造命题 $p\to q$，$q\vee r$ 和 $r\to\sim p$ 的真值表如图 12-45.

回忆一下，若每当前提都是真时结论为真，则论证是正确的，现在，在真值表的第 1 行，前提 $p\to q$ 和 $q\vee r$ 都是真的，但结论 $r\to\sim p$ 是假的，因此该论证是一个谬论.

p	q	r	$p\to q$	$q\vee r$	$\sim p$	$r\to\sim p$
T	T	T	T	T	F	F
T	T	F	T	T	F	T
T	F	T	F	T	F	F
T	F	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T	T

图 12-45

12.124 检验下面论证的正确性：

如果我学习，那么我将不会数学不及格.

如果我不打篮球，那么我将学习.

但是我数学不及格.

…………

因此我打篮球.

解 ☞ 首先把论证转换成符号形式.设 p 是“我学习”，q 是“我数学不及格”，r 是“我打篮球”，于是所给论证如下：

$$p\to\sim q,\ \sim r\to p, q\vdash r.$$

为了检验论证的正确性，我们构造所给命题 $p\to\sim q$，$\sim r\to p$，q 和 r 的真值表如图 12-46.

现在，前提 $p\to\sim q$，$\sim r\to p$ 和 q 仅在第 5 行同时为真，并且在此情形结论 r 也为真，因此该论证是正确的.

p	q	r	$\sim q$	$p\to\sim q$	$\sim r$	$\sim r\to p$
T	T	T	F	F	F	T
T	T	F	F	F	T	T
T	F	T	T	T	F	T
T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	F	T
F	T	F	F	T	T	F
F	F	T	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	F

图 12-46

12.11 逻辑蕴涵

12.125 定义逻辑蕴涵关系.

解 ☞ 如果每当命题 $P(p,q,\cdots)$ 为真时命题 $Q(p,q,\cdots)$ 为真，那么称 $P(p,q,\cdots)$ **逻辑蕴涵** $Q(p,q,\cdots)$，记作

$$P(p,q,\cdots)\Rightarrow Q(p,q,\cdots).$$

12.126 证明 $p\leftrightarrow q$ 逻辑蕴涵 $p\to q$.

证 ☞ 考虑如图 12-47 中 $p\leftrightarrow q$ 和 $p\to q$ 的真值表. $p\leftrightarrow q$ 在第 1 和第 4 行取真，并且在此情况下 $p\to q$ 亦取真.因此 $p\leftrightarrow q$ 逻辑蕴涵 $p\leftrightarrow q$.

p	q	$p\leftrightarrow q$	$p\to q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	T
F	F	T	T

图 12-47

12.127　证明 p 逻辑蕴涵 $p\vee q$.

证　☞ 考察如图 12-48 中 p 和 $p\vee q$ 的真值表. p 在第 1 和 2 行取真,并且在此情况,命题 $p\vee q$ 亦取真. 因此 p 逻辑蕴涵 $p\vee q$.

p	q	$p\vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

图 12-48

12.128　证明 $p\wedge q$ 逻辑蕴涵 $p\leftrightarrow q$.

证　☞ 考虑如图 12-49 中 $p\wedge q$ 和 $p\leftrightarrow q$ 的真值表. 现在, $p\wedge q$ 仅在第 1 行取真且在此情况下命题 $p\leftrightarrow q$ 亦取真. 因此 $p\wedge q$ 逻辑蕴涵 $p\leftrightarrow q$.

p	q	$p\wedge q$	$p\leftrightarrow q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	F	T

图 12-49

12.129　求逻辑蕴涵命题 $p\leftrightarrow q$ 的非等价命题 $P(p,q)$ 的数目.

解　☞ 考虑图 12-50(a)中 $p\leftrightarrow q$ 的真值表. 如果每当 $P(p,q)$ 为真时 $p\leftrightarrow q$ 为真,那么 $P(p,q)$ 逻辑蕴涵 $p\leftrightarrow q$. 但是仅在第 1 行和第 4 行 $p\leftrightarrow q$ 为真,因此 $P(p,q)$ 在第 2 行和第 3 行不能为真. 有 4 个这样的命题,它们列在图 12-50(b)的真值表中.

p	q	$p\leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

(a)

P_1	P_2	P_3	P_4	$p\leftrightarrow q$
F	T	F	T	T
F	F	F	F	F
F	F	F	F	F
F	F	T	T	T

(b)

图 12-50

定理 12.8　对于任何命题 $P(p,q,\cdots)$ 和 $Q(p,q,\cdots)$,下列 3 个语句是等价的.

(i) $P(p,q,\cdots)$ 逻辑蕴涵 $Q(p,q,\cdots)$;

(ii)论证 $P(p,q,\cdots)\vdash Q(p,q,\cdots)$ 成立;

(iii)命题 $P(p,q,\cdots)\to Q(p,q,\cdots)$ 是一个重言式.

注　一些逻辑学家和许多教科书使用词条“蕴涵”和我们使用“逻辑蕴涵”的意义相同,而且他们在“蕴涵”和“如果…那么”之间有区别,当然,正如上面的定理所看到的,这两个性质不同的概念是有直接关系的.

12.130　证明定理 12.8.

证 ☞ 如果每当 $P(p,q,\cdots)$ 为真时 $Q(p,q,\cdots)$ 为真，那么论证

$$P(p,q,\cdots)\vdash Q(p,q,\cdots)$$

成立，并且反之亦然. 而且，论证 $P\vdash Q$ 成立当且仅当条件语句 $P\to Q$ 总是真的，即它是一个重言式. 这样，定理得证.

12.131 证明：设 $P(p,q,\cdots)$ 逻辑蕴涵 $Q(p,q,\cdots)$，则对任何命题 $P_1,P_2,\cdots$，命题 $P(P_1,P_2,\cdots)$ 逻辑蕴涵 $Q(P_1,P_2,\cdots)$.

证 ☞ 根据定理 12.8，若 $P(p,q,\cdots)\Rightarrow Q(p,q,\cdots)$，则 $P(p,q,\cdots)\to Q(p,q,\cdots)$ 是一个重言式. 根据替换原理（定理 12.2），命题 $P(P_1,P_2,\cdots)\to Q(P_1,P_2,\cdots)$ 亦是一个重言式. 因此 $P(P_1,P_2,\cdots)\Rightarrow Q(P_1,P_2,\cdots)$.

12.132 证明 $p\leftrightarrow\sim q$ 不逻辑蕴涵 $p\to q$.

证 ☞ **方法一** 构造 $p\leftrightarrow\sim q$ 和 $p\to q$ 的真值表如图 12-51. 如果每当 $p\leftrightarrow\sim q$ 为真时 $p\to q$ 为真，那么 $p\leftrightarrow\sim q$ 逻辑蕴涵 $p\to q$. 但是，$p\leftrightarrow\sim q$ 在表中第 2 行为真，而在此情况下 $p\to q$ 为假. 因此 $p\leftrightarrow\sim q$ 不逻辑蕴涵 $p\to q$.

方法二 构造命题 $(p\leftrightarrow\sim q)\to(p\to q)$ 的真值表. 它不是一个重言式，因此根据定理 12.8，$p\leftrightarrow\sim q$ 不逻辑蕴涵 $p\to q$.

p	q	$\sim q$	$p\leftrightarrow\sim q$	$p\to q$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	T	T
F	F	T	F	T

图 12-51

12.133 假设 $P(p,q,\cdots)\Rightarrow Q(p,q,\cdots)$ 并且 $Q(p,q,\cdots)\Rightarrow R(p,q,\cdots)$. 证明 $P(p,q,\cdots)\Rightarrow R(p,q,\cdots)$.

证 ☞ 由于 $P\Rightarrow Q$ 且 $Q\Rightarrow R$，因此每当 P 为真时 Q 为真，每当 Q 为真时 R 为真，于是，每当 P 为真时 R 为真，即 $P\Rightarrow R$，这正是所要证明的.

12.134 假设 $P(p,Q,\cdots)\Rightarrow Q(p,q,\cdots)$ 并且 $Q(p,q,\cdots)\Rightarrow P(p,q,\cdots)$. 证明 $P(p,q,\cdots)\equiv Q(p,q,\cdots)$.

证 ☞ 由于 $P\Rightarrow Q$ 且 $Q\Rightarrow P$，因而每当 P 为真时 Q 为真且每当 Q 为真时 P 为真. 这样，P 和 Q 对于变元的相同值是真的，即 $P\equiv Q$.

12.12 量词

这一节我们将始终用到下面的包含全称量词 $\forall$ 和存在量词 $\exists$ 的记号和定理：

$(\forall x\in A)p(x)$ 或 $\forall x,p(x)$：对于每一 $x\in A$，$p(x)$ 为真.

$(\exists x\in A)p(x)$ 或 $\exists x,p(x)$：存在 $x\in A$ 使得 $p(x)$ 为真.

这里，$p(x)$ 是 A 上的一个命题函数（或开句或条件），就是说，对于 A 的一个 a，$p(a)$ 取真或取假.

定理 12.9（德·摩根） 设 $p(x)$ 是 A 上的一个命题函数，则

(i) $\sim(\forall x\in A)p(x)\equiv(\exists x\in A)\sim p(x)$；

(ii) $\sim(\exists x\in A)p(x)\equiv(\forall x\in A)\sim p(x)$.

注 定理 12.9 用语言来说，下面两个语句是等价的：

(i) 对于每一个 $a\in A$，$p(a)$ 为真，这不是真的；

(ii) 存在一个 $a\in A$ 使得 $p(a)$ 是假的.

以及，同理，下面两个语句是等价的：

(i)存在一个 $a\in A$ 使得 $p(a)$ 为真,这不是真的.

(ii)对于所有的 $a\in A$, $p(a)$ 为假.

12.135 设 $p(x)$ 表示句子"$x+2>5$".叙述在下列集合上 $p(x)$ 是否是一个命题函数:(a)正整数集 **N**;(b) $M=\{-1,-2,-3,\cdots\}$;(c)复数集 **C**.

解 ☞ (a)是.

(b)虽然对 M 的每一个元素 $p(x)$ 为假, $p(x)$ 仍是 M 上的一个命题函数.

(c)否,注意到 $2i+2>5$ 没有任何意义.换句话说对于复数,不等式没有定义.

12.136 确定下列语句的真假值.(这 **R** 是全集)

(a) $\forall x, |x|=x$;　(b) $\exists x, x^2=x$;　(c) $\forall x, x+1>x$;　(d) $\exists x, x+2=x$.

解 ☞ (a)假.若 $x_0=-3$,则 $|x_0|\neq x_0$.

(b)真.若 $x_0=1$,则 $x_0^2=x_0$.

(c)真.任一实数是 $x+1>x$ 的一个解.

(d)假. $x+2=x$ 没有解.

12.137 否定习题 12.136 的各个语句.

解 ☞ (a) $\sim\forall x, |x|=x\equiv\exists x\sim(|x|=x)\equiv\exists x, |x|\neq x$.

(b) $\sim\exists x, x^2=x\equiv\forall x\sim(x^2=x)\equiv\forall x, x^2\neq x$.

(c) $\sim\forall x, x+1>x\equiv\exists x\sim(x+1>x)\equiv\exists x, x+1\leqslant x$.

(d) $\sim\exists x, x+2=x\equiv\forall x\sim(x+2=x)\equiv\forall x, x+2\neq x$.

12.138 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$.确定下列语句的真假值.

(a) $(\exists x\in A)(x+3=10)$;　(b) $(\forall x\in A)(x+3<10)$;

(c) $(\exists x\in A)(x+3<5)$;　(d) $(\forall x\in A)(x+3\leqslant 7)$.

解 ☞ (a)假.在 A 中没有数是 $x+3=10$ 的解.

(b)真. A 的每个数都满足 $x+3<10$.

(c)真.若 $x_0=1$,则 $x_0+3<5$,即 1 是一个解.

(d)假.若 $x_0=5$,则 $x_0+3\not\leqslant 7$.换句话说,5 不是所给条件的一个解.

12.139 否定习题 12.138 的各个语句.

解 ☞ (a) $\sim(\exists x\in A)(x+3=10)\equiv(\forall x\in A)\sim(x+3=10)\equiv(\forall x\in A)(x+3\neq 10)$.

(b) $\sim(\forall x\in A)(x+3<10)\equiv(\exists x\in A)\sim(x+3<10)\equiv(\exists x\in A)(x+3\geqslant 10)$.

(c) $\sim(\exists x\in A)(x+3<5)\equiv(\forall x\in A)\sim(x+3<5)\equiv(\forall x\in A)(x+3\geqslant 5)$.

(d) $\sim(\forall x\in A)(x+3\leqslant 7)\equiv(\exists x\in A)\sim(x+3\leqslant 7)\equiv(\exists x\in A)(x+3>7)$.

12.140 确定下列各语句的真假值(此处 **R** 是全集):

(a) $\forall x, x^2=x$;　(b) $\exists x, 2x=x$;

(b) $\forall x, x-3<x$;　(d) $\exists x, x^2-2x+5=0$.

解 ☞ (a)假.因 $x=2$ 不满足 $x^2=x$.

(b)真.因 $x=0$ 满足 $2x=x$.

(c)真.因每一个实数满足 $x-3<x$.

(d)假.因 $x^2-2x+5=0$ 没有实根.

12.141 设 $A=\{1,2,3,4\}$ 是全集.确定下列语句的真假值:

(a) $\forall x, x+3<6$;(b) $\exists x, x+3<6$;(c) $\exists x, 2x^2+x=15$.

解 ☞ (a)假.因 $x=4$ 不满足 $x+3<6$.

(b)真.因 $x=1$ 满足 $x+3<6$.

(c)假.因 A 中没有数满足 $2x^2+x=15$.

12.142 否定下列各语句:(a)所有的学生住在集体宿舍;(b)所有主修数学的是男生;(c)一些学生是 25 岁或大于 25 岁.

解 ☞ 应用定理 12.9 否定量词.

(a)有些学生不住在集体宿舍.

(b)有些主修数学的是女生.

(c)没有学生是 25 岁或大于 25 岁,或换句话说,所有学生在 25 岁以下.

12.143 否定下列各语句:(a) $\forall xp(x) \wedge \exists yq(y)$;(b) $\exists xp(x) \vee \forall yq(y)$.

解 ☞ (a)注意到 $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$,因此

$$\begin{aligned}\sim(\forall xp(x) \wedge \exists yq(y)) &\equiv \sim \forall xp(x) \vee \sim \exists yq(y)\\ &\equiv \exists x \sim p(x) \vee \forall y \sim q(y).\end{aligned}$$

(b)注意到 $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$,因此

$$\begin{aligned}\sim(\exists xp(x) \vee \forall yq(y)) &\equiv \sim \exists xp(x) \wedge \sim \forall yg(y)\\ &\equiv \forall x \sim p(x) \wedge \exists y \sim q(y).\end{aligned}$$

12.144 否定下列各语句:(a)如果有一场暴乱,那么某人被杀害;(b)天亮并且所有人都起来了.

解 ☞ (a)注意到 $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$,因此

"如果有一场暴乱,那么某人被杀害,这句话是假的"

≡"有一场暴乱并且某人被杀害是假的"

≡"有一场暴乱并且每个人都活着".

(b)注意到 $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$,因此

"天亮并且所有人都起来,这是假的"

≡"天没亮,或者所有人都起来是假的"

≡"夜里,或者某些人没有起来".

12.145 否定下列各语句:

(a)如果老师缺席,那么有些学生没有完成他们的家庭作业;

(b)所有学生完成他们的家庭作业并且老师出席;

(c)一些学生没有完成他们的家庭作业或者老师缺席.

解 ☞ (a)老师缺席并且所有学生都完成他们的家庭作业.

(b)一些学生没有完成他们的家庭作业或者老师缺席.

(c)所有学生都完成他们的家庭作业并且老师出席.

12.146 求下列各语句的一个反例,此处 $B = \{2, 3, \cdots, 8, 9\}$.

(a) $\forall x \in B, x + 5 < 12$;　　(b) $\forall x \in B$, x 是质数;

(c) $\forall x \in B, x^2 > 1$;　　(d) $\forall x \in B$, x 是偶数.

解 ☞ (a)若 $x = 7, 8$ 或 9,则 $x + 5 < 12$ 不是真的,因此 7,8 或 9 是反例.

(b)4 不是质数,因此 4 是一个反例(6,8,9 也是反例).

(c)该语句是真的,因此没有反例.

(d)3 是奇数,因此 3 是一个反例.(5,7,9 也是反例).

12.147 求下列各语句的一个反例,此处 $\{3, 5, 7, 9\}$ 是全集:

(a) $\forall x, x + 3 \leqslant 7$;　　(b) $\forall x$, x 是奇数;

(c) $\forall x$, x 是质数;　　(d) $\forall x, |x| = x$.

解 ☞ (a)这里 5,7 和 9 都是反例.

(b)该语句是真的,因此没有反例.

(c)这里只有 9 是反例.

(d)该语句是真的,因此没有反例.

有多变元的命题函数

这一小节考虑有多于一个变元的命题函数 $p(x, y, \cdots)$.如果一个表达式是对每一个变元

由一个量词引导，例如，

$$\forall x \exists y p(x,y) \quad 或 \quad \forall x \forall z \forall y p(x,y,z),$$

那么这个量词表达式是一个语句并且有真假值；否则它是一个开句(在变元中没有量词)和有一个真值集.

12.148　确定下列各语句的真假值，其中{1,2,3}是全集：

(a) $\exists x \forall y, x^2 < y+1$；(b) $\forall x \exists y, x^2+y^2<12$；(c) $\forall x \forall y, x^2+y^2<12$.

解 ☞ (a)真. 若 $x=1$，则 $1<y+1$ 对于每个数 1,2,3 都有解.

(b)真. 对于每个 x_0，设 $y=1$，则 $x_0^2+1<12$ 是一个真语句.

(c)假. 若 $x_0=2$ 且 $y_0=3$，则 $x_0^2+y_0^2<12$ 不是一个真语句.

12.149　就(a) $\exists x \forall y \exists z, x^2+y^2<2z^2$；(b) $\exists x \exists y \forall z, x^2+y^2<2z^2$，重复习题 12.148.

解 ☞ (a)真. 若 $x_0=1$ 且 $z_0=3$，则 $x_0^2+y^2<2z_0^2$，即 $1+y^2<18$ 的真值集是全集 1,2,3.

(b)假. 若 $z_0=1$，则 $x^2+y^2<2z_0^2$ 没有解.

12.150　设 $A=\{1,2,\cdots,9,10\}$. 考虑下列各句子. 若它是一个语句，则求它的真假值. 若它是一个命题函数，则求它的真值集.

(a) $(\forall x\in A)(\exists y\in A)(x+y<14)$；　(b) $(\forall y\in A)(x+y<14)$；

(c) $(\forall x\in A)(\forall y\in A)(x+y<14)$；　(d) $(\exists y\in A)(x+y<14)$.

解 ☞ (a)该两个变元的开句由两个量词引导，因此它是一个语句，而且该语句是真语句.

(b)该开句由一个量词引导的，因此它是另一个变元的命题函数. 注意到，对于每一个 $y\in A$，$x_0+y<14$ 当且仅当 $x_0=1,2$，或 3，因此真值集是{1,2,3}.

(c)它是一个语句并且它是假的. 若 $x_0=8$ 和 $y_0=9$，则 $x_0+y_0<14$ 不是真的.

(d)它是关于 x 的开句. 真值集是 A 本身.

12.151　否定下列各语句：(a) $\exists x \exists y, p(x,y)$；(b) $\forall x \forall y, p(x,y)$；(c) $\exists y \exists x \forall z, p(x,y,z)$.

解 ☞ (a) $\sim(\exists x \forall y, p(x,y)) \equiv \forall x \exists y \sim p(x,y)$.

(b) $\sim(\forall x \forall y, p(x,y)) \equiv \exists x \exists y \sim p(x,y)$.

(c) $\sim(\exists y \exists x \forall z, p(x,y,z)) \equiv \forall y \forall x \exists z \sim p(x,y,z)$.

12.152　否定 $\forall x \exists y(p(x)\vee q(y))$.

解 ☞

$$\begin{aligned}\sim[(\forall x \exists y(p(x)\vee q(y))] &\equiv \exists x \forall y \sim(p(x)\vee q(y))\\ &\equiv \exists x \forall y(\sim p(x)\wedge \sim q(y)).\end{aligned}$$

12.153　否定 $\exists x \forall y(p(x,y)\rightarrow q(x,y))$.

解 ☞

$$\begin{aligned}\sim[\exists x \forall y(p(x,y)\rightarrow q(x,y))] &\equiv \forall x \exists y \sim(p(x,y)\rightarrow q(x,y))\\ &\equiv \forall x \exists y(p(x,y)\wedge \sim q(x,y)).\end{aligned}$$

12.154　否定 $\exists y \exists x(p(x)\wedge \sim q(y))$.

解 ☞

$$\begin{aligned}\sim[\exists y \exists x(p(x)\wedge \sim q(y))] &\equiv \forall y \forall x \sim(p(x)\wedge \sim q(y))\\ &\equiv \forall y \forall x(\sim p(x)\vee q(y)).\end{aligned}$$

第十三章　布尔代数和逻辑门

13.1　基本定义和定理

集合(第一章)和命题(第十二章)有相似的性质,比较表 1-1 和表 12-1 可以看到这一点.这些性质用来定义一个数学结构,在布尔(Boole,1813～1864)以后称之为布尔代数.

13.1　定义一个布尔代数.

解　☞ 设 B 是一个集合,在 B 上定义了两个二元运算 + 和 * 以及一个一元运算,用"′"表示.设 0 和 1 表示 B 的两个不同的元素.如果对于集合的任何元素 a,b,c,下列公理成立:

[B_1]　交换律:

(1a)$a+b=b+a$,　　　　(1b)$a*b=b*a$;

[B_2]　分配律:

(2a)$a+(b*c)=(a+b)*(a+c)$,(2b)$a*(b+c)=(a*b)+(a*c)$;

[B_3]　同一律:

(3a)$a+0=a$,　　　　(3b)$a*1=a$;

[B_4]　补余律:

(4a)$a+a'=1$,　　　　(4b)$a*a'=0$.

那么六维组

$$\langle B, +, *, ', 0, 1\rangle$$

称为一个**布尔代数**.

上面的布尔代数当运算明确时通常用 B 表示.

元素 0 称为**零**元素,元素 1 称为**单位**元素,a'称为 a 的**补**.运算 + 和 * 的结果分别称为**和**和**积**.我们常常略去符号 * 且用毗连代替.于是(2b)和(2a)写成

$$(2b)\ a(b+c)=ab+ac, (2a)\ a+bc=(a+b)(a+c).$$

第一个式子为人们熟知的等式,但第二个在通常代数中不是一个等式.

我们采取通常的约定,除非我们用括号引导,′优先于 *,以及 * 优先于 +.例如,

$$a+b*c \text{ 意味着 } a+(b*c) \text{ 而不是 } (a+b)*c,$$

$$a*b' \text{ 意味着 } a*(b') \text{ 而不是 } (a*b)'.$$

当然,当 $a+b*c$ 写成 $a+bc$ 时,其含意是清楚的.

13.2　描述具有两个元素 0 和 1 的(称为 bit(二进制数)的)布尔代数 B.

解　☞ 设 + 和 * 是 B 中的运算,定义在图 13-1 中.假定补定义为 $1'=0$ 和 $0'=1$,那么 B 是一个布尔代数.

+	1	0
1	1	1
0	1	0

(a)

*	1	0
1	1	0
0	0	0

(b)

图 13-1

13.3　设 B_n 表示 n - bit 序列的集合,说明如何将 B_n 作成一个布尔代数.

解　☞ 设 a 和 b 是 B_n 的 n - bit 序列.如同习题 13.2,逐位定义这些序列的和、积和补.这就是说,在一个给定的位置中,若 a 或 b 含 1 则 $a+b$ 含 1;若 a 且 b 含 1,则 $a*b$ 含 1;若 a 不含 1,即 a 含 0,则 a'含 1.那么,B_n 是一个布尔代数.

13.4　设 $a=1101010$,$b=1011011$ 在 B_7 中(习题 13.3).求 $a+b$,$a*b$ 以及 a'.

解　☞ 应用图 13-1 逐次计算,以及 $1'=0$,$0'=1$ 得到

$$a+b=1111011, a*b=1001010, a'=0010101.$$

13.5 描述集的布尔代数.

解 ☞ $\mathscr{C}$是集合的集合,它关于并、交和补运算是封闭的.那么$\mathscr{C}$是一个布尔代数,空集$\varnothing$作为零元素并且全集**U**作为单位元素.

13.6 设Π是命题集合.解释Π怎么是一个布尔代数.

解 ☞ Π关于运算$\vee$和$\wedge$,以及否定~是补运算是一个布尔代数.(在Π中,我们认为逻辑等价的,即有相同真值表的命题是相等的.)

13.7 在习题13.6中,命题的布尔代数的零元素和单位元素是什么?

解 ☞ 从表12-1看到,一个矛盾f是零元素,以及一个重言式是单位元素.

13.8 设$D_{70}=\{1,2,5,7,10,14,35,70\}$,它是70的因子的集合.说明$D_{70}$怎样作成一个布尔代数.

解 ☞ 设D_{70}上的+,*和′定义如下:

$$a+b=\text{l.c.m.}(a,b)=a\text{ 和 }b\text{ 的最小公倍数};$$
$$a*b=\text{g.c.d.}(a,b)=a\text{ 和 }b\text{ 的最大公因子};$$
$$a'=70/a.$$

那么D_{70}是一个布尔代数,1作为零元素,70作为单位元素.

13.9 考虑习题13.8中布尔代数D_{70},求$10+14, 10*14$和$10'$.

解 ☞ 应用+,*和′的定义得到

$$10+14=\text{l.c.m.}(10,14)=70,$$
$$10*14=\text{g.c.d.}(10,14)=2,$$
$$10'=70/10=7.$$

13.10 考虑习题13.8中布尔代数D_{70}.求:

(a)$x=35*(2+7')$;(b)$y=(35*10)+14'$;(c)$z=(2+7)*(14*10)'$.

解 ☞ 应用$a+b, a*b$和a'的定义,逐步计算每个表达式.

(a)$7'=10, 2+10=10$,因此$x=35*10=5$.

(b)$35*10=5, 14'=5$,因此$y=5+5=5$.

(c)$2+7=14, 14*10=2, 2'=35$,因此,$z=14*35=7$.

13.11 定义一个子代数.

解 ☞ 设C是布尔代数B的一个非空子集.若C自身是一个布尔代数(关于B的运算),则C是B的一个**子代数**.我们注意,C是B的一个子代数当且仅当C关于B的三个运算+,*和′是封闭的.

13.12 判定下列各集合是否是D_{70}的一个子代数:

(a)$X=\{1,5,10,70\}$;(b)$Y=\{1,2,35,70\}$.

解 ☞ (a)否.虽然X关于+和*是封闭的,但$5'=14$不属于X.

(b)是.因Y关于+,*和′是封闭的.

13.13 定义同构的布尔代数.

解 ☞ 两个布尔代数B和$\overline{B}'$如果有一个一一对应关系$f:B\to\overline{B}'$,它保持3个运算,即使得对B的任何元素a,b有

$$f(a+b)=f(a)+f(b),\quad f(a*b)=f(a)*f(b),\quad f(a')=f(a)',$$

那么称B和$\overline{B}'$**是同构的**.

对偶性和定理

13.14 定义布尔代数B中任一陈述S的对偶.

解 ☞ S 的对偶是将原来陈述 S 中的运算 + 和 * 对调，并且交换相应的单位元素 0 和 1 得到的陈述.

13.15 写出每个布尔方程：(a)$(a*1)*(0+a')=0$ 和(b)$a+a'b=a+b$ 的对偶.

解 ☞ (a)为了得到对偶方程，我们交换 + 和 *，以及交换 0 和 1. 于是得到

$$(a+0)+(1*a')=1.$$

(b)首先用 * 写出方程：$a+(a'*b)=a+b$，于是它的对偶是 $a*(a'+b)=a*b$. 它可以写成

$$a(a'+b)=ab.$$

13.16 写出各个布尔方程：(a)$a(a'+b)=ab$；(b)$(a+1)(a+0)=a$；(c)$(a+b)(b+c)=ac+b$ 的对偶.

解 ☞ 先用 * 写出每个方程，然后交换 + 和 *，以及交换 0 和 1. 这就得到

(a)$a+a'b=a+b$，(b)$a*0+a*1=a$，(c)$ab+bc=(a+c)b$.

定理 13.1(对偶原理) 布尔代数 B 中任一定理的对偶仍是一个定理.

13.17 证明定理 13.1.

证 ☞ 布尔代数 B 的公理集合的对偶与原公理集合相同，因此，如果任一陈述是布尔代数公理的一个结果，那么，由于对偶陈述可用原陈述的证明中每一步的对偶证得，因此对偶也是那些公理的一个结论.

定理 13.2 设 a,b,c 是布尔代数 B 的任意三个元素，则有

(i) 幂等律：

(5a)$a+a=a$，　　(5b)$a*a=a$；

(ii) 有界性定律：

(6a)$a+1=1$，　　(6b)$a*0=0$；

(iii) 吸收律：

(7a)$a+(a*b)=a$，　　(7b)$a*(a+b)=a$；

(iv) 结合律：

(8a)$(a+b)+c=a+(b+c)$，　　(8b)$(a*b)*c=a*(b*c)$

成立.

13.18 证明定理 13.2(i).

证 ☞ (5b) $a=a*1=a*(a+a')=(a*a)+(a*a')=(a*a)+0=a*a$.

(5a) 从(5b)和对偶性得到.

13.19 证明定理 13.2(ii).

证 ☞ (6b) $a*0=(a*0)+0=(a*0)+(a*a')=a*(0+a')$

$$=a*(a'+0)=a*a'=0.$$

(6a) 从(6b)和对偶性得到.

13.20 证明定理 13.2(iii).

证 ☞ (7b) $a*(a+b)=(a+0)*(a+b)=a+(0*b)=a+(b*0)$

$$=a+0=a,$$

此处有界性定律用在倒数第二步.

(7a) 从(7b)和对偶性得到.

13.21 证明定理 13.2(iv).

证 ☞ (8b) 设 $L=(a*b)*c$ 和 $R=a*(b*c)$. 我们要证明 $L=R$. 我们首先证明 $a+L=a+R$. 在最后两步应用吸收律，

$$a+L=a+((a*b)*c)=(a+(a*b))*(a+c)$$
$$=a*(a+c)=a.$$

而且,在最后一步应用吸收律和在倒数第二步用幂等律,

$$a + R = a + (a * (b * c)) = (a + a) * (a + (b * c))$$
$$= a * (a + (b * c)) = a.$$

因此 $a + L = a + R$.其次,我们证明 $a' + L = a' + R$.我们有

$$a' + L = a' + ((a * b) * c) = (a' + (a * b)) * (a' + c)$$
$$= ((a' + a) * (a' + b)) * (a' + c) = (1 * (a' + b)) * (a' + c)$$
$$= (a' + b) * (a' + c) = a' + (b * c).$$

而且

$$a' + R = a' + (a * (b * c)) = (a' + a) * (a' + (b * c))$$
$$= 1 * (a' + (b * c)) = a' + (b * c).$$

因此 $a' + L = a' + R$.故

$$L = L + 0 = L + (a * a') = (L + a) * (L + a')$$
$$= (a + L) * (a' + L) = (a + R) * (a' + R) = R.$$

(8a)从(8b)和对偶性得到.

定理 13.3　设 b 是布尔代数 B 的任一元素,则有

(i)(补的惟一性)　若 $a + x = 1$ 且 $a * x = 0$,则 $x = a'$;

(ii)(对合律)　$(a')' = a$;

(iii)(9a)　$0' = 1$,　(9b) $1' = 0$.

13.22　证明定理 13.3(i).

证 ☞ 我们有

$$a' = a' + 0 = a' + (a * x) = (a' + a) * (a' + x)$$
$$= 1 * (a' + x) = a' + x.$$

而且

$$x = x + 0 = x + (a * a') = (x + a) * (x + a')$$
$$= 1 * (x + a') = x + a'.$$

因此 $x = x + a' = a' + x = a'$.

13.23　证明定理 13.3(ii).

证 ☞ 根据补的定义,$a + a' = 1$ 且 $a * a' = 0$.由交换律,$a' + a = 1$ 且 $a' * a = 0$.由补的惟一性,a 是 a'的补,即 $a = (a')'$.

13.24　证明定理 13.3(iii).

证 ☞ 根据有界性定律(6a),$0 + 1 = 1$,并且由同一律(3b),$0 * 1 = 0$.由补的惟一性,1 是 0 的补,即 $1 = 0'$.根据对偶性,$0 = 1'$.

定理 13.4(德·摩根定律)　(10a)　$(a + b)' = a' * b'$,(10b)　$(a * b)' = a' + b'$.

13.25　证明定理 13.4.

证 ☞ (10a)　我们要证明$(a + b) + (a' * b') = 1$ 和$(a + b) * (a' * b') = 0$.由补的惟一性就有 $a' * b' = (a + b)'$.我们有

$$(a + b) + (a' * b') = b + a + (a' * b') = b + (a + a') * (a + b')$$
$$= b + 1 * (a + b') = b + a + b'$$
$$= b + b' + a = 1 + a = 1.$$

而且

$$(a + b) * (a' * b') = ((a + b) * a') * b' = ((a * a') + (b * a')) * b'$$
$$= (0 + (b * a')) * b' = (b * a') * b'$$
$$= (b * b') * a' = 0 * a' = 0.$$

因此 $a' * b' = (a + b)'$.

(10b)　从(10a)和对偶性得到.

定理 13.5　在布尔代数中,下列式子是等价的:

(1)$a+b=b$, (2)$a*b=a$, (3)$a'+b=1$, (4)$a*b'=0$.

13.26 证明定理 13.5 中(1)和(2)等价.

证 ☞ 设 $a*b=a$.在第一步应用吸收律,我们有

$$b=b+(b*a)=b+(a*b)=b+a=a+b.$$

反之,设 $a+b=b$.再在第一步中应用吸收律,我们有

$$a=a*(a+b)=a*b.$$

于是,$a*b=a$ 当且仅当 $a+b=b$,即(1)和(2)是等价的.

13.27 证明定理 13.5 中(1)和(3)等价.

证 ☞ 设(1)成立,那么

$$a'+b=a'+(a+b)=(a'+a)+b=1+b=1.$$

现在设(3)成立.那么

$$a+b=1*(a+b)=(a'+b)*(a+b)=(a'*a)+b=0+b=b.$$

因此(1)和(3)是等价的.

13.28 证明定理 13.5 中(3)和(4)等价.

证 ☞ 设(3)成立.根据德·摩根定律和对合律,

$$0=1'=(a'+b)'=a''*b'=a*b'.$$

反之,若(4)成立,则

$$1=0'=(a*b')'=a'+b''=a'+b.$$

于是(3)和(4)是等价的.故所有 4 个式子都等价.

这个证明与习题 13.26 和习题 13.27 的证明一起,完成定理 13.5 的证明.

13.2 次序和布尔代数

为方便起见,下面的定义和记号是与第十一章重复的.集合 S 上的一个关系≾如果有下列三个性质:

(1)对于 S 的每一个 a,$a\precsim a$;

(2)若 $a\precsim b$ 且 $b\precsim a$,则 $a=b$;

(3)若 $a\precsim b$ 且 $b\precsim c$,则 $a\precsim c$,

那么称≾是 S 上的一个**偏序**.一个集合 S 和偏序一起称为一个**偏序集**.在此情况下,$a\precsim b$ 读作"a 前于 b"("a 在 b 之前").我们还有

$a\prec b$(读作"a 严格前于 b"):若 $a\precsim b$ 但 $a\neq b$.

$a\succsim b$(读作"a 后于 b"("a 在 b 之后"):若 $b\precsim a$.

$a\succ b$(读作"a 严格后于 b"):若 $b\prec a$.

若 S 的元素 a 和 b 既不是 $a\precsim b$ 又不是 $b\precsim a$,它们是**不可比较的**.如果 S 的元素 a 严格在 b 之前,即 $a\prec b$,并且不存在 S 的元素 x 使得 $a\prec x\prec b$,那么我们说 a 是 b 的一个**直接前元**,记作 $a\ll b$.

一个有限偏序集 S 可以用类似于习题 11.34 的图来解释.这样,在 S 的图中,元素是由向上斜的线来连接,每当 $a\ll b$ 时,每条线从一元素 a 到一元素 b.

偏序集的概念出现在布尔代数的上下文之中是因为有下面的定理.

定理 13.6 设 B 是一个布尔代数.那么 B 是一个偏序集,此处 $a\precsim b$ 定义为 $a+b=b$.

13.29 描述集合的布尔代数 $\mathscr{C}$(习题 13.5)中的次序关系.

解 ☞ 若 A 是 B 的一个子集,则集合 A 前于集合 B.这是因为 $A\cup B=B$ 当且仅当 $A\subseteq B$.

13.30 描述命题的布尔代数 Π(习题 13.6)中的次序关系.

解 ☞ 若命题 $P(p,q,\cdots)$逻辑蕴涵命题 $Q(p,q,\cdots)$,则 P 在 Q 之前.

13.31 证明,对于布尔代数 B 的任一元素 a,有 $0\precsim a\precsim 1$.(这样,0 是 B 的下界以及 1 是 B

的上界,并且在 B 的一个图 D 中,0 在 D 的底下以及 1 在 D 的顶上.)

证 ☞ 从 $0+a=a$ 和 $1+a=1$ 这一事实得到证明.

13.32 定义布尔代数 B 的一个原子.

解 ☞ 若 B 的元素 a 是 0 的一个直接后元,则 a 是一个原子.

13.33 考虑习题 13.8 中布尔代数 D_{70}(70 的全体因子). D_{70}的元素是如何排序的呢? 画出 D_{70}的图.

解 ☞ $a+b=\text{l.c.m.}(a,b)=b$ 当且仅当 b 为 a 的一个倍数.换句话说,D_{70}是用整除排序的.图 13-2 是 D_{70}的图.我们看到"零"元素 1 在图的底下,以及"单位"元素 70 在图的顶上.

13.34 求 D_{70}的原子.

解 ☞ D_{70}的原子是 1 的直接后元,它们是 2,5 和 7(D_{70}中的质数.)

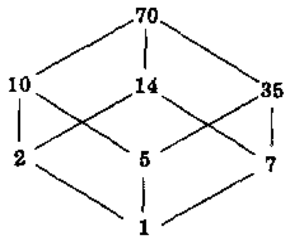


图 13-2

13.35 设 $P(A)$是 $A=\{a,b,c\}$的所有子集的布尔代数.注意到

$$P(A)=[A,\{a,b,\},\{a,c\},\{b,c\},\{a\},\{b\},\{c\},\varnothing].$$

画出 $P(A)$的一个图.

解 ☞ 这里,若 $X\subseteq Y$,则集合 X 在集合 Y 之前. $P(A)$的图如图 13-3 所示.我们看到$\varnothing$在图的底下以及 A 在图的顶上.

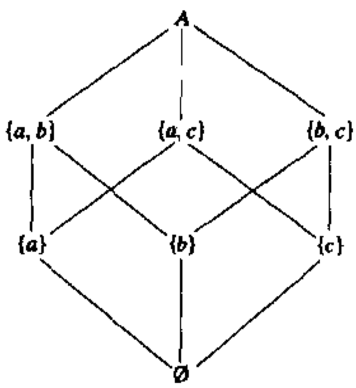


图 13-3

13.36 求习题 13.35 中布尔代数 $P(A)$的原子.

解 ☞ 原子是$\varnothing$的直接后元,如图 13-3 所表示的,它们是三个单个元素集合$\{a\}$,$\{b\}$和$\{c\}$.

定理 13.7 设 B 是一个有限布尔代数,它有 n 个原子.那么 B 有 2^n 个元素,并且 B 的每一个非零元素是惟一的一组原子的和.

13.37 设 B 是一个布尔代数,它有少于 100 个元素. B 能有多少个元素?

解 ☞ 根据定理 13.7. B 有 n 个原子时,它有 2^n 个元素.于是 B 可能有 2,4,8,16,32 或 64 个元素.

13.38 考虑布尔代数 D_{210},它由 210 的因子组成.作出 D_{210}的图.

解 ☞ 210 的因子是 1,2,3,5,6,7,10,14,15,21,30,35,42,70,105 和 210. D_{210}的图在图 13-4 中给出.

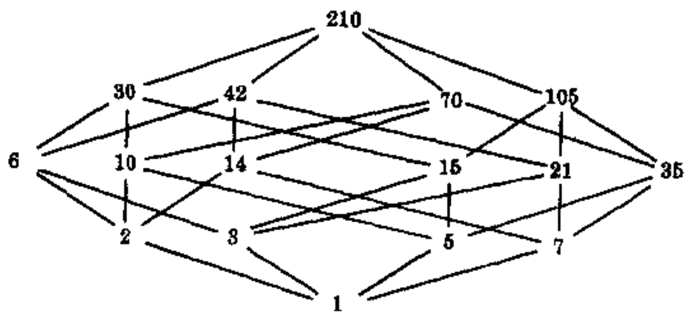


图 13-4

13.39 求 D_{210}的原子集合 A.

解 ☞ $A=\{2,3,5,7\}$是 210 的质数因子的集合.

13.40 求 D_{210}的有 8 个元素的 2 个子代数.

解 ☞ $B=\{1,2,3,35,6,70,105,210\}$和 $C=\{1,5,6,7,30,35,42,210\}$是 D_{210}的子代数.

13.41 求 D_{210}的子代数的数目.

解 ☞ D_{210}的一个子代数必须含有 2,4,8 或 16 个元素.

(i)可能仅有两个元素的子代数,它由上界和下界组成,即$\{1,210\}$.

(ii)由于 D_{210}有 16 个元素.因此 16 个元素的子代数是 D_{210}本身.

(iii)任一4 元素的子代数具有形式$\{1,x,x',210\}$,即由上界和下界以及一个非界元素及其补组成.在 D_{210}中有 14 个非界元素,因此有 14/2=7 对$\{x,x'\}$.于是 D_{210}有 7 个 4 元素子代数.

(iv)任一 8 元素的子代数 S 本身含三个原子S_1,S_2,S_3.我们可选取 D_{210}的 4 个原子中任两个 S_1 和 S_2,因而 S_3 必是其他两个原子的积,例如我们可设 $S_1=2$, $S_2=3$, $S_3=5\cdot7=35$(这就确定习题 13.40 的子代数 B);或者,我们可设 $S_1=5$, $S_2=7$, $S_3=2\cdot3=6$(这就确定习题 13.40 的子代数 C).从 D_{210}的 4 个原子中有$\binom{4}{2}=6$ 种方法选择 S_1 和 S_2,因此 D_{210}有 6 个 8 元素的子代数.因此 D_{210}有 $1+1+7+6=15$ 个子代数.

13.42 证明,在布尔代数 B 中,$a\lesssim b$ 当且仅当$b'\lesssim a'$.

证 ☞ 假设 $a\lesssim b$,即 $a+b=b$.那么,应用德·摩根定律,

$$b'=(a+b)'=a'*b'=b'*a'.$$

根据定理 13.5,$b'+a'=a'$.因此 $b'\lesssim a'$.相反地,假设 $b'\lesssim a'$,则$(a')'\lesssim(b')'$,因而 $a\lesssim b$.

13.43 如果布尔代数 B 的元素M 是单位元素 1 的一个直接前元,那么称 M 是一个**极大项**.证明原子的补是极大项,反之亦然.

证 ☞ 根据习题 13.42,$0\lesssim x\lesssim a$ 当且仅当 $a'\lesssim x'\lesssim 1$.于是 a 是 0 的一个直接后元当且仅当 a'是 1 的一个直接前元.或者换句话说 a 是一个原子当且仅当a'是一个极大项.

13.44 求布尔代数 D_{210}的极大项.

解 ☞ 由图 13-4,210 的直接前元是 30,42,70 和 105,因此它们是 D_{210}的极大项.

13.45 求 $A=\{a,b,c\}$的子集组成的布尔代数 $P(A)$的极大项.

解 ☞ 据图 13-3,A 的直接前元是集合$\{a,b\}$,$\{a,c\}$和$\{b,c\}$,因此它们是 $P(A)$的极大项.

注 一个布尔代数 B 是用和、积以及补运算来定义的(习题 13.1),然后在 B 中引进一个次序关系.另一方面,我们可以用次序关系(第十一章)如下定义一个布尔代数:

定义 一个布尔代数 B 是一个有界的有补分配格.

13.3 布尔表达式以及积和形式

13.46 定义一个布尔表达式并给出例子.

解 ☞ 考虑变元(或字母或符号),例如 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的集合.关于这些变元的**布尔表达式**,有时记作 $E(x_1,\cdots,x_n)$指的是任一变元或者是从一些变元用布尔运算 $+$, $*$ 和$'$建立起来的任一表达式.例如,

$$E=(x+y'z')'+(xyz'+x'y)'$$

和

$$F=((xy'z'+y)'+x'z)'$$

都是 x,y,z 的布尔表达式.

13.47 定义一个文字和一个基本积,并给出例子.

解 ☞ 一个**文字**是一个变元或者补(变)元,例如,x,x',y,y'.一个**基本积**指的是一个文字或者是两个或更多个文字的积,但积中没有两个文字包含相同的变元.例如,xz', $xy'z$, x, y', yz', $x'yz$ 都是基本积.但是 $xyx'z$ 和 $xyzy$ 都不是基本积,因第一个积含有 x 和 x',而第二个积中两处含

有 y.

13.48 把下列布尔积简化成 0 或者一个基本积：

(a) $xyx'z$ 和 $xyzy$； (b) $xyz'xyx$ 和 $xyz'xy'z'$.

解 ☞ (a)应用交换律，补余律 $x * x' = 0$ 以及幂等律 $y * y = y$ 得到

$$xyx'z = xx'yz = 0yz = 0$$

和

$$xyzy = xyyz = xyz.$$

(b)我们有

$$xyz'xyx = xxxyyz' = xyz'$$

和

$$xyz'xy'z' = yy'xxz'z' = 0xxz'z' = 0.$$

13.49 证明任一布尔积 P 都可简化成或是 0 或是一个基本积.

证 ☞ 设 P 含有一个变元及其补，比方说 $P = P_1xP_2x'P_3$，那么 $P = xx'P_1P_2P_3 = 0P_1P_2P_3 = 0$. 假设 P 在两处含有同一文字，比方说 $P = P_1xP_2xP_3$，那么 $P = xxP_1P_2P_3 = xP_1P_2P_3 = P'$，此处 P' 是 P 的较短的记号. 继续进行这个过程，P 便可简化成或是 0 或是一个基本积.

13.50 设 P_1 和 P_2 是两个基本积. 我们说 P_1 包含在 P_2 中是什么意思？举一个例子.

解 ☞ 若 P_1 的文字亦是 P_2 的文字，则说 P_1 包含在或含于 P_2 中. 例如，$x'z$ 含于 $x'yz$ 中，这是因为 x' 和 z 是 $x'yz$ 中的文字. 然而，$x'z$ 不含于 $xy'z$，因 x' 不是 $xy'z$ 中的一个文字.

13.51 设 P_1 和 P_2 是两个基本积，P_1 含于 P_2 中. 证明 $P_1 + P_2 = P_1$ 并且举一个例子.

证 ☞ 由于 P_1 含于 P_2 中. 我们有 $P_2 = P_1 * Q$. 于是，由吸收律

$$P_1 + P_2 = P_1 + P_1 * Q = P_1.$$

例如，$x'z + x'yz = x'z$.

13.52 定义一个布尔表达式的积和形式，并举出例子.

解 ☞ 如果 E 是一个基本积或是两个或更多个但没有一个包含在另一个中的基本积的和，那么我们说 E 是一个**积和形式**或**极小项形式**. 例如，考虑表达式

$$E_1 = xz' + y'z + xyz'$$

和

$$E_2 = xz' + x'yz' + xy'z.$$

虽然第一个表达式是积的和，但由于 xz' 含于 xyz' 中，因此它不是一个积和形式. 然而，由吸收律 E_1 可表示成

$$E_1 = xz' + y'z + xyz' = xz' + xyz' + y'z = xz' + y'z,$$

这是一个积和形式. 第二个表达式 E_2 已经是一个积和形式.

13.53 给出一个算法，把一非零布尔表达式 E 转换成一个积和形式.

解 ☞ **算法 13.53** 输入一个布尔表达式 E.

第 1 步 应用德·摩根定律和对合律，把补运算移到任一括号内直到最后仅用变元，于是 E 将由文字的和与积组成.

第 2 步 应用分配律再次将 E 转换成一个积和.

第 3 步 应用交换律、幂等律和补余律把 E 中的每一个积转换成 0 或一个基本积. 最后，应用吸收律使 E 成为一个积和形式.

13.54 将 $E = ((ab)'c)'((a' + c)(b' + c'))'$ 变换成一个积和形式.

解 ☞ 应用算法 13.53 如下：

第 1 步 $E = ((ab)'' + c')((a' + c)' + (b' + c')') = (ab + c')(ac' + bc)$.

第 2 步 $E = abac' + abbc + ac'c' + bcc'$.

第 3 步 $E = abc' + abc + ac' + 0 = ac' + abc$.

13.55 定义布尔表达式的一个完全积和形式.

解 ☞ 设 $E(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是一个(非零)布尔表达式.如果 E 是一个积和形式并且每个积包含所有的变元(注意,最多有 2^n 个这样的积),那么称 E 是一个**完全积和形式**.

定理 13.8 每个非零布尔表达式 $E(x_1,x_2,\cdots,x_n)$都能变换成完全积和形式,并且这样的表达式是惟一的.

13.56 给出一个算法,把一个布尔表达式的积和形式变换成一个完全积和形式.

解 ☞ (**算法 13.56** 输入布尔表达式 $E(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的积和形式.)

第 1 步 找 E 的一个不含 x_i 的基本积 P,然后用 x_i+x_i' 乘 P(因 $x_i+x_i'=1$,这是可能的).

第 2 步 重复第 1 步直到所有的积包含所有变元.

13.57 将 $E(x,y,z)=x(y'z)'$表示成完全积和形式.

解 ☞ 首先应用算法 13.53 然后用算法 13.56.首先我们有

$$E=x(y'z)'=x(y+z')=xy+xz',$$

并且 E 是一个积和形式.其次,我们有

$$\begin{aligned}E&=xy+xz'=xy(z+z')+x(y+y')z'\\&=xyz+xyz'+xyz'+xy'z'=xyz+xyz'+xy'z',\end{aligned}$$

这是完全积和形式.

13.58 将 $E=z(x'+y)+y'$表示成完全积和形式.

解 ☞ 首先我们有

$$E=z(x'+y)+y'=x'z+yz+y'.$$

于是

$$\begin{aligned}E&=x'z+yz+y'=x'z(y+y')+yz(x+x')+y'(x+x')(z+z')\\&=x'yz+x'y'z+xyz+x'yz+xy'z+xy'z'+x'y'z+x'y'z'\\&=xyz+xy'z+xy'z'+x'yz+x'y'z+x'y'z'.\end{aligned}$$

13.59 将 $E(x,y,z)=(x'+y)'+x'y$ 表示成完全积和形式.

解 ☞ 我们有

$$E=(x'+y)'+x'y=xy'+x'y.$$

如果 E 是 x,y 的一个布尔表达式,那么这就是 E 的完全积和形式.但是,E 明确是 3 个变元 x,y 和 z 的布尔表达式.因此

$$\begin{aligned}E&=xy'+x'y=xy'(z+z')+x'y(z+z')\\&=xy'z+xy'z'+x'yz+x'yz'\end{aligned}$$

是 E 的完全积和形式.

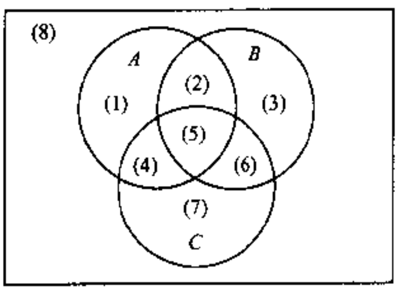


图 13-5

13.60 考虑图 13-5 给出的集合 A,B 和 C 的文图.我们看到全集 U(长方形)划分成 $2^3=8$ 个标上(1)到(8)的集.

(a)用 A,B 和 C 表示每个集合.

(b)设 $E(A,B,C)$是含集合 A,B 和 C 的任一布尔表达式.给出 E 的完全积和形式的几何解释.

解 ☞ (a)对于 $A\cap B$ 使用布尔记号 AB,对 A^c 使用 A',8 个集合的每一个都是包含 A,B 和 C 的基本积:

$$(1)=AB'C',\quad(2)=ABC',\quad(3)=A'BC',\quad(4)=AB'C,$$
$$(5)=ABC,\quad(6)=A'BC,\quad(7)=A'B'C,\quad(8)=A'B'C'.$$

(b)布尔表达式 E 表示成图 13-5 中(1)到(8)的一个或更多个区域的并.这个并(和)是惟一的,并且得到 E 的完全积和形式.

13.61 首先将下列各布尔表达式表示成积和形式,然后表示成完全积和形式.

(a)$E=x(xy'+x'y+y'z)$;　(b)$E=(x+y)'(xy')'$.

解 ☞ (a)首先,我们有

$$E = xxy' + xx'y + xy'z = xy' + xy'z.$$

于是

$$E = xy'(z + z') + xy'z = xy'z + xy'z' + xy'z = xy'z + xy'z'.$$

(b)首先，我们有

$$E = x'y'(x' + y) = x'y'x' + x'y'y = x'y'.$$

于是

$$E = x'y'(z + z') = x'y'z + x'y'z'.$$

13.62 就下列布尔表达式重复习题 13.61：

(a)$E = y(x + yz)'$；(b)$E = x(xy + y' + x'y)$.

解 ☞ (a)$E = y(x'(yz)') = yx'(y' + z') = yx'y' + x'yz' = x'yz'$，它已是完全积和形式.

(b)首先，我们有 $E = xxy + xy' + xx'y = xy + xy'$. 于是

$$E = xy(z + z') + xy'(z + z') = xyz + xyz' + xy'z + xy'z'.$$

13.63 将含集合 A, B 和 C 的每个集合表达式 $E(A, B, C)$ 表示成交的并：

(a)$E = (A \cup B)^c \cap (C^c \cup B)$；　(b)$E = (B \cap C)^c \cap (A^c \cup C)^c$.

解 ☞ 应用布尔记号(如同习题 13.46)并且将 E 写成积的和.

(a)　$E = (A + B)'(C' + B) = A'B'(C' + B) = A'B'C' + A'B'B = A'B'C'$，或

$E = A^c \cap B^c \cap C^c$.

(b)　$E = (BC)'(A' + C)' = (B' + C')(AC') = AB'C' + AC'$，或

$E = (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A \cap C^c)$.

13.64 设 $E = xy' + xyz' + x'yz'$. 证明：(a)$xz' + E = E$；(b)$x + E \neq E$；(c)$z' + E \neq E$.

证 ☞ 由于完全积和形式是惟一的，因此当 $A \neq 0$ 时，$A + E = E$ 的充分必要条件是在 A 的完全积和形式中的被加项在 E 的完全积和形式的被加项之中. 因此，首先求 E 的完全积和形式：

$$\begin{aligned} E &= xy'(z + z') + xyz' + x'yz' \\ &= xy'z + xy'z' + xyz' + x'yz'. \end{aligned}$$

(a)将 xz' 表示成完全积和形式

$$xz' = xz'(y + y') = xyz' + xy'z'.$$

由于 xz' 的被加项在 E 的被加项之中，因此我们有 $xz' + E = E$.

(b)将 x 表示成完全积和形式：

$$x = x(y + y')(z + z') = xyz + xyz' + xy'z + xy'z'.$$

x 的被加项 xyz 不是 E 的一个被加项，因此 $x + E \neq E$.

(c)将 z' 表示成完全积和形式：

$$z' = z'(x + x')(y + y') = xyz' + xy'z' + x'yz' + x'y'z'.$$

z' 的被加项 $x'y'z'$ 不是 E 的一个被加项，因此 $z' - E \neq E$.

13.4 逻辑门

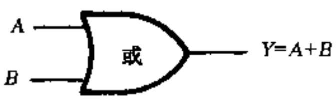
逻辑电路是由某些基本电路，称为**逻辑门**组成的结构，一些逻辑门将在下面给予定义. 这些电路可以认为是包含一个或更多个输入装置以及恰好一个输出装置的机器. 输入装置被赋予 n - bit 序列，通过电路处理一次一个 bit 以产生一个输出 n-bit 序列.

或门

13.65 描述具有两个输入装置的或门的运算，并给它的等价电路.

解 ☞ 图 13-6(a)表明一个有输入 A 和 B 以及输出 Y 的或门. 这样的一个或门的输出用 $Y = A + B$ 表示，此处"加法"是由图 13-1(a)来定义的，或者等价地，由图 13-6(b)的真值表定义的. 这就是说，若 $A = 1$ 或 $B = 1$，则 $Y = 1$，以及仅当 $A = 0$ 且 $B = 0$ 时，$Y = 0$. 图 13-6(c)表明一个电路除了含有能源(例如，电池组)和一个输出装置(例如，一个灯)外，还有两个并联的开关 A 和 B. 显然，只有当开关 A 闭合或 B 闭合或两个开关同时闭合时，灯才亮. 这恰是或门的真值表所描述的特性，此处

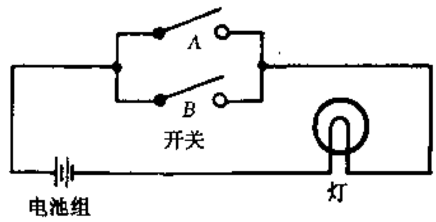
1 表示一个开关打开(闭合)或者灯亮,以及 0 表示开关关着(断开)或灯不亮.(注:图 13-6 中(a)或门,(c)并联电路.



(a) 或门

A	B	A+B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

(b)



(c) 并联电路

图 13-6

13.66 确定或门如何处理下列二进制数序列对.

(a) 110001　　(b) 10001111　　(c) 101100111000
　　101101　　　　00111100　　　　000111001101

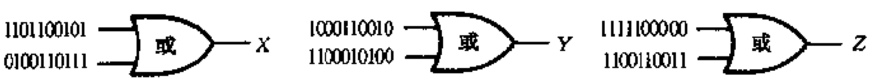
解 ☞ 只有当两个输入都是 0 时,或门输出才出现 0.在(a)中,这仅仅出现在第五个位置中;在(b)中,仅在第二个位置;在(c)中仅在第二和第十一个位置.因此输出是

(a)111101,　(b)10111111,　(c)101111111101.

13.67 确定图 13-7 各或门的输出.

解 ☞ 一个或门仅当输入同时为 0 时才能得到一个 0,于是

$X = 1101110111,\quad Y = 1100110110,\quad Z = 1111110011.$



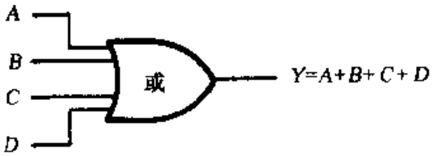
(a)　　(b)　　(c)

图 13-7

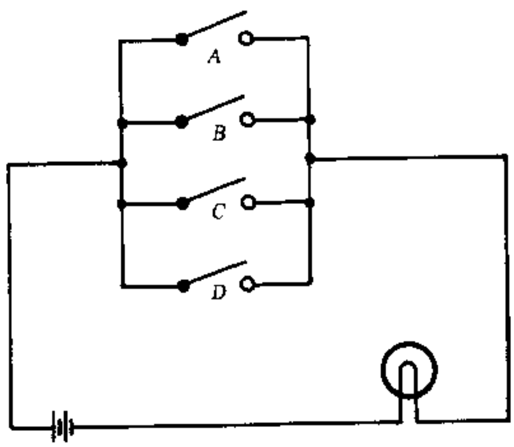
13.68 (a)当 $A = 11000110, B = 10010101$,(b)$A = 00001100, B = 11000000$ 时,求 $Y = A + B$.

解 ☞ 只有当输入同时为 0 时,相加得到一个 0.因此(a) $Y = 11010111$,(b) $Y = 11001100$.

13.69 描述具有多于两个,例如四个输入装置的或门,并给出它的等价电路.



(a)



(b)

图 13-8

解 图 13-8(a)表明有 4 个输入 A, B, C 和 D，以及输出 $Y = A + B - C + D$ 的或门．当且仅当所有的输入都是 0 时，输出是 0．模拟开关电路在图 13-8(b)中，它由 4 个开关并联组成．显然，只有当所有 4 个开关关着(断开)时，灯才不亮．

13.70 求图 13-8(a)的或门的输出 Y，设输入数据是

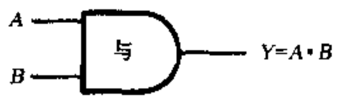
$$A = 10000101,\quad B = 10100001,\quad C = 00100100,\quad D = 10010101.$$

解 一个或门仅当所有输入是 0 时输出是一个 0．这仅仅出现在第 2，5 和 7 个位置，因此 $Y =$ 10110101．

与门

13.71 描述有两个输入装置的一个与门的运算，并给出其等价的电路．

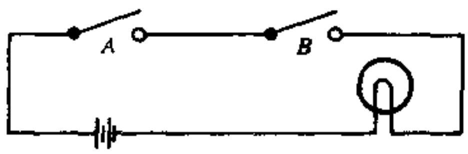
解 图 13-9(a)表明一个有输入 A 和 B 以及输出 Y 的与门．这样的一个与门的输出表示输入的积 $Y = A \cdot B$，或简单地，$Y = AB$，此处"乘法"是用图 13-1(b)定义的，或等价地，用图 13-9(b)的真值表定义的．这就是说，当 $A = 1$ 且 $B = 1$ 时，$Y = 1$；否则，$Y = 0$．图 13-9(c)是一个开关电路．它表明两个开关 A 和 B 是串联的．我们看到只有当 A 和 B 同时闭合时，灯才亮．如果我们再假设 1 表示电路元素是开且 0 表示它是关，那么这正是与门的真值表所描述的特性．(图 13-9 中，(a)与门，(c)串联电路．)



(a) 与门

A	B	$A \cdot B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

(b)



(c) 串联电路

图 13-9

13.72 确定与门如何处理下列二进制数序列对：

(a) 110001　　(b) 10001111　　(c) 101100111000
　　101101　　　　00111100　　　　000111001101

解 只有当两个输入都是 1 时，与门的输出才是 1．这在(a)中仅仅出现在第一和最后一个位置；在(b)中仅仅出现在第 5 和第 6 个位置；在(c)中仅出现在第 4 和第 9 个位置．因此输出是

(a)100001，　(b)00001100，　(c)000100001000．

13.73 设图 13-7 的或门改为与门．各个门的输出是什么？

解 一个与门仅当输入都是 1 时，才得到 1．因此

$$X = 0100100101,\quad Y = 1000010000,\quad Z = 1100100000.$$

13.74 当(a) $A = 11100011$，$B = 10101010$，以及(b) $A = 11011011$，$B = 11100111$ 时，求 $Y = A \cdot B$．

解 只有当两个输入同时为 1 时，它们相乘才得到 1，因此

(a) $Y = 10100010$，　(b) $Y = 11000011$．

13.75 描述有多于两个，例如有 4 个输入装置的一个与门的运算，并给出它的等价电路．

解 图 13-10(a)表明有 4 个输入 A, B, C 和 D，以及输出 $Y = A \cdot B \cdot C \cdot D$ 或 $Y = ABCD$ 的与门．当且仅当所有输入是 1 时输出是 1．模拟的开关电路在图 13-10(b)中，它由 4 个开关串联组成的．显然，只有所有开关打开时，灯才亮．

13.76 求图 13-10(a)中与门的输出，设输入数据是

$$A = 11100111,\quad B = 01111011,\quad C = 01110011,\quad D = 11101110.$$

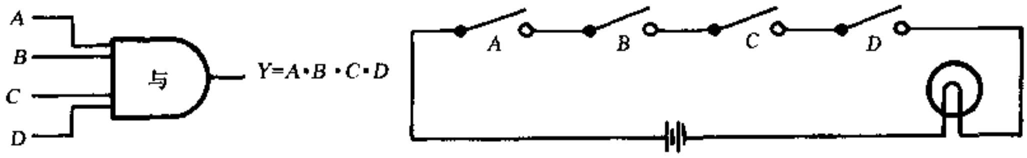


图 13-10

解 ☞ 一个与门只有当所有输入都是 1 时才得到 1. 这仅仅出现在第 2, 第 3 和第 7 个位置上, 因此

$$Y = 01100010.$$

非门

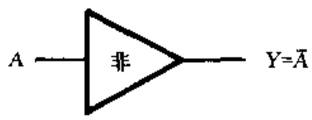
13.77 描述一个非门的运算, 并描述其等价的电路.

解 ☞ 图 13-11(a)表明一个非门, 也称**反相器**, 它输入 A 和输出 Y. 非门只能有一个输入, 并且它的输出由输入上添加一杠表示, 即

$$Y = \overline{A}.$$

输出 Y 的值与输入 A 的值相反, 即当 $A=0$ 时, $Y=1$, 并且当 $A=1$ 时, $Y=0$. 非门真值表在图 13-11(b)中.

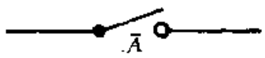
开关电路也含非门的模拟. 具体地说, 与任一开关 A 一起, 我们可以包括一个开关 $\overline{A}$, 当 A 闭合时, $\overline{A}$ 断开; 并且当 A 断开时, $\overline{A}$ 闭合. 这个开关 $\overline{A}$ 画在图 11-11(c)中, 称它为开关 A 的**补码**. (我们还可把 $\overline{A}$ 理解为与 A 并联的灯, 与一电池组串联组合. 该开关闭合时, 灯将不亮, 该开关断开时, 灯才亮). (图 13-11(a)(非门), (c)补码开关).



(a) 非门

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

(b)



(c) 补码开关

图 13-11

13.78 一个非门如何处理下列序列?

(a)110001;　(b)10001111;　(c)101100111000.

解 ☞ 一个非门把 0 变成 1, 以及把 1 变成 0. 因此输出是

(a)001110,　(b)01110000,　(c)010011000111.

13.79 当(a)$A=10101010$, (b)$A=11100111$, (c)$A=00111100$ 时, 求 $Y=\overline{A}$.

解 ☞ 将 1 变成 0 以及 0 变成 1 得到:

(a) $Y=01010101$,　(b) $Y=00011000$,　(c) $Y=11000011$.

13.5 逻辑电路

这一节的主要内容是下面的定理.

定理 13.9 逻辑电路形成一个布尔代数.

13.80 证明定理 13.9.

证 ☞ 或门, 与门和非门的真值表分别与第十二章出现的命题的 $p \vee q$(析取, "p 或者 q"), $p \wedge q$(合取, "p 并且 q"和 $\sim p$(否定, "非 p")相同. 仅有的差别是这里用 1 和 0 替代 T 和 F. 这样, 以这些门为电路元素的逻辑电路与命题满足相同的定律, 因此它们形成一个布尔代数.

13.81 描述一个与或电路并举一个例子.

解 ☞ 一个对于布尔积和表达式的与或电路有若干输入,其中有些输入或它们的补码输到各个与门.所有与门的输出输到单个或门,或门给出电路输出.图13-12是一个类型的与或电路,它有3个输入 A,B 和 C.(为了节约空间,我们常常略去门记号内部的文字.)

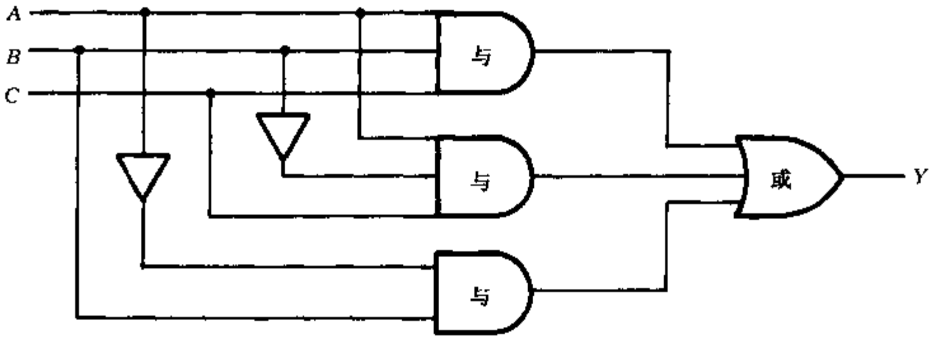


图 13-12

13.82 考虑图13-12中逻辑电路.将输出 Y 表示成关于输入 A,B 和 C 的布尔表达式.

解 ☞ 第一个与门标注输入 A,B 和 C 以及输出 $A\cdot B\cdot C$;第二个与门标注输入 $A,\overline{B}$ 和 C 以及输出 $A\cdot\overline{B}\cdot C$;第三个与门标注输入 $\overline{A}$ 和 B 以及输出 $\overline{A}\cdot B$,见图13-13.于是或门的输出就是电路的输出,它是布尔表达式

$$Y = A\cdot B\cdot C + A\cdot\overline{B}\cdot C + \overline{A}\cdot B.$$

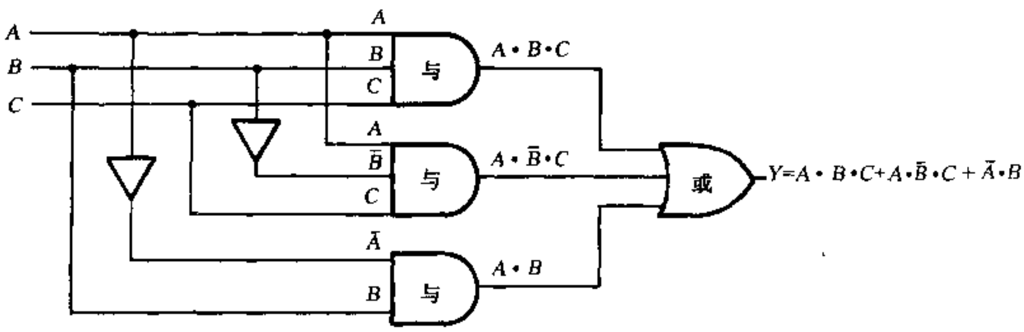


图 13-13

13.83 设 $A = 1100110110$, $B = 1110000111$, $C = 1010010110$. 求(a) $A + B + C$;(b) $A\cdot B\cdot C$.

解 ☞ (a)仅当所有的输入都是0时,在表示一个或门的和中才出现一个0.注意到这样的3个0只在第四和第七个位置上,因此

$$A + B + C = 1110110111.$$

(b)只有所有输入都是1时,在表示与门的积中才出现一个1.这仅仅产生在第1,第八和第九个位置中.因此

$$A\cdot B\cdot C = 1000000110.$$

13.84 已知习题13.83的序列 A,B 和 C,求(a) $C(\overline{A}+B)$; (b) $A\overline{(B+C)}$.

解 ☞ (a) 逐步计算:

$$\overline{A} = 0011001001, \overline{A} + B = 1111001111, C(\overline{A} + B) = 1010000110.$$

(b) 逐步计算:

$$B + C = 1110010111,\quad \overline{B + C} = 0001101000,\quad A(\overline{B + C}) = 0000100000.$$

13.85 定义逻辑电路 L 的真值表.

解 ☞ L 的真值表由对应于输入二进制数的所有可能组合的一个输出序列组成.导出所有这样的输入二进制数的组合的那些输入序列称为具体序列.例如,如果 L 有三个输入装置,那么

$$A = 00001111,\quad B = 00110011,\quad C = 01010101$$

形成可能的一组具体序列.一般地,若有 n 个输入装置,则具体序列将有 2^n 个二进制数.

13.86 求图 13-13 中逻辑电路或等价的布尔表达式 $Y = A\cdot B\cdot C + A\cdot \overline{B}\cdot C + \overline{A}\cdot B$ 的真值表 T.

解 ☞ 在布尔表达式中代入习题 13.85 的三个具体序列 $A = 00001111$, $B = 00110011$, $C = 01010101$.在 $A\cdot B\cdot C$ 中一个给定(数)位是 1 当且仅当 A, B 和 C 在该位置上为 1.于是

$$A\cdot B\cdot C = 00000001.$$

同理,$A\cdot\overline{B}\cdot C = 00000100$ 和 $\overline{A}\cdot B = 00110000$,因此 $Y = 00110101$ 是输出.真值表由输入序列和输出序列一起组成的,即

$$T = [A = 00001111,\quad B = 00110011,\quad C = 01010101,\quad Y = 00110101].$$

13.87 已知 5 个输入 A, B, C, D 和 E.求给出所有不同的可能的输入二进制数的组合的具体序列.

解 ☞ 每个序列将含有 $2^5 = 32$ 个二进制数.一种赋值方案如下:

(i)设赋予 A $2^4 = 16$ 个二进制数 0,随之是 $2^4 = 16$ 个二进制数 1.
(ii)设赋予 B $2^3 = 8$ 个二进制数 0,随后是 $2^3 = 8$ 个二进制数 1,然后重复 1 次.
(iii)设赋予 C $2^2 = 4$ 个二进制数 0,随后是 $2^2 = 4$ 个二进制数 1,然后重复 3 次.
(iv)设赋予 D $2^1 = 2$ 个二进制数 0,随后是 $2^1 = 2$ 个二进制数 1,然后重复 7 次.
(v)设赋予 E $2^0 = 1$ 个二进制数 0,随后是 $2^0 = 1$ 个二进制数 1,然后重复 15 次.

于是得到具体序列是

$$\begin{aligned}
A &= 00000000000000001111111111111111,\\
B &= 00000000111111110000000011111111,\\
C &= 00001111000011110000111100001111,\\
D &= 00110011001100110011001100110011,\\
E &= 01010101010101010101010101010101.
\end{aligned}$$

(注意到上述数组的列,从左到右,第一个 32 个二进制数是依增加顺序的,我们有另外的或许更简单的赋值方案.)

13.88 给定 4 个输入 A, B, C 和 D.求给出所有不同的可能输入组合的具体序列.

解 ☞ 每个序列含有 $2^4 = 16$ 个二进制数.依习题 13.87 的划分得到

$$\begin{aligned}
A &= 0000000011111111,\\
B &= 0000111100001111,\\
C &= 0011001100110011,\\
D &= 0101010101010101.
\end{aligned}$$

13.89 给定 3 个输入 A, B 和 C.(a)求 8 个基本积:

$$A\cdot B\cdot C,\quad A\cdot B\cdot\overline{C},\quad A\cdot\overline{B}\cdot C,\quad A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C},\quad \overline{A}\cdot B\cdot C,$$
$$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C},\quad \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C,\quad \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}.$$

(b)应用(a)求 $Y = AB\overline{C} + \overline{A}BC$ 的真值表 T.

解 ☞ 首先注意到 A, B 和 C 的具体序列中每一个含 $2^3 = 8$ 个二进制数.我们有

$$\begin{aligned}
A &= 00001111,\\
B &= 00110011,\\
C &= 01010101.
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
\overline{A} &= 11110000,\\
\overline{B} &= 11001100,\\
\overline{C} &= 10101010.
\end{aligned}$$

以及

$$A\cdot B\cdot C = 00000001,$$
$$A\cdot B\cdot \overline{C} = 00000010,$$
$$A\cdot \overline{B}\cdot C = 00000100,$$
$$A\cdot \overline{B}\cdot \overline{C} = 00001000,$$
$$\overline{A}\cdot B\cdot C = 00010000,$$
$$\overline{A}\cdot B\cdot \overline{C} = 00100000,$$
$$\overline{A}\cdot \overline{B}\cdot C = 01000000,$$
$$\overline{A}\cdot \overline{B}\cdot \overline{C} = 10000000.$$

我们看到,对于每一个输入组合,8 个基本积恰好一处接受值 1.这样,对于 $A=0,B=1,C=1$(即 $\overline{A}=B=C=1$),只有积 $\overline{A}\cdot B\cdot C$ 等于 1.而且,一个导出的积对于输入组合恰好一处具有值 1,这就是说,它的真值表恰好在一个位置有 1 而在别处为 0.

(b)这里,当 $AB\overline{C}=1$ 或 $\overline{A}BC=1$ 时,即当 $A=1,B=1,C=0$ 或 $A=0,B=1,C=1$ 时,$Y=1$;否则 $Y=0$.于是真值表 T 如下:

$$T = [A = 10\cdots, B = 11\cdots, C = 01\cdots, Y = 11000000].$$

(这里"…"表示 A,B 和 C 的其他可能组合,在那里 $Y=0$.)

13.90 求图 13-14(a)逻辑电路的一个布尔表达式.

解 这是一个与或电路.输入到第一个与门的是 A,B 和 $\overline{C}$;输入到第二个与门的是 B 和 $\overline{C}$;输入到第三个与门的是 $\overline{A}$ 和 B.于是,如图 13-14(b)所示,

$$Y = AB\overline{C} + B\overline{C} + \overline{A}B.$$

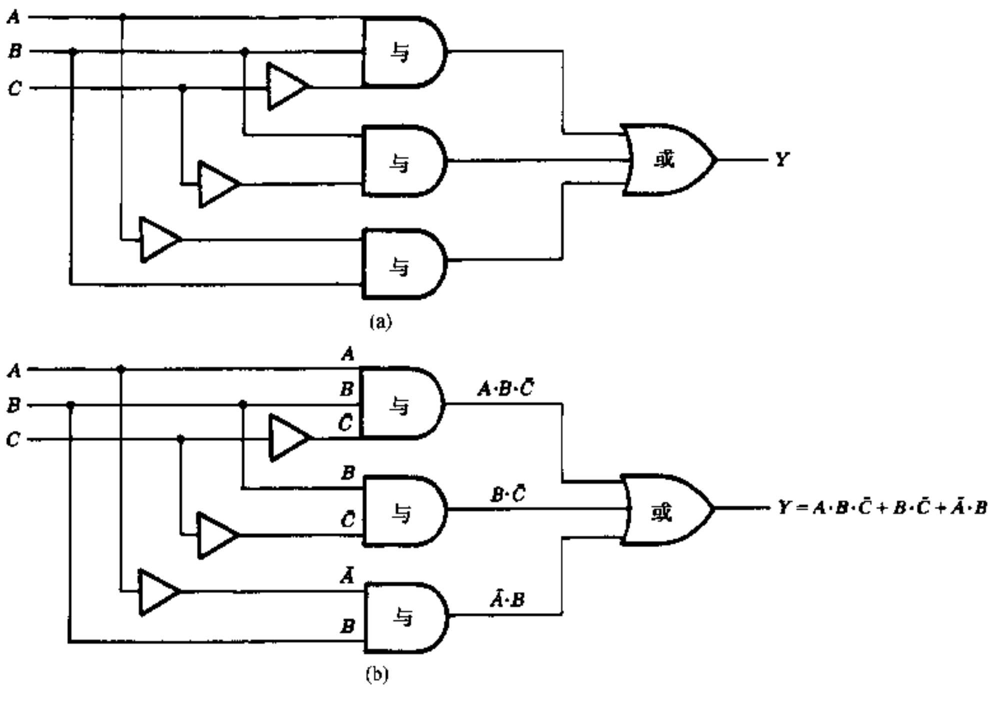


图 13-14

13.91 求图 13-14(a)的逻辑电路或等价的布尔表达式 $Y=AB\overline{C}+B\overline{C}+\overline{A}B$ 的真值表 T.

解 因有 3 个输入,因此真值表将由 8-bit 序列组成.我们计算如下:

$$A = 00001111,\quad B = 00110011,\quad C = 01010101,$$
$$\overline{A} = 11110000,\quad \overline{C} = 10101010,\quad B\overline{C} = 00100010,$$
$$AB\overline{C} = 00000010,\quad \overline{A}B = 00110000.$$

于是 $Y=00110010$.故所要求的真值表是

$$T = [A = 00001111, B = 00110011, C = 01010101, Y = 00110010].$$

13.92 考虑表示图 13-14 的逻辑电路的布尔表达式 $Y = AB\overline{C} + B\overline{C} + \overline{A}B$.(a)求 Y 的完全积和形式.(b)利用这个积和形式去得电路的真值表 T.

解 ☞ (a) $Y = AB\overline{C} + B\overline{C}(A + \overline{A}) + \overline{A}B(C + \overline{C})$

$= AB\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC.$

(b) 检查 Y 的完全积和形式我们看到,当

(i) $A = 1, B = 1, C = 0$; (ii) $A = 0, B = 1, C = 0$; (iii) $A = 0, B = 1, C = 1$

时, $Y = 1$. 因此

$$T = [A = 100\cdots, B = 111\cdots, C = 001\cdots, Y = 11100000].$$

除顺序外,这和习题 13.91 中的真值表相同.

13.93 对于(a)图 13-15(a)和(b)图 13-15(b)的逻辑电路,将输出 Y 表示成输入 A, B 和 C 的布尔表达式.

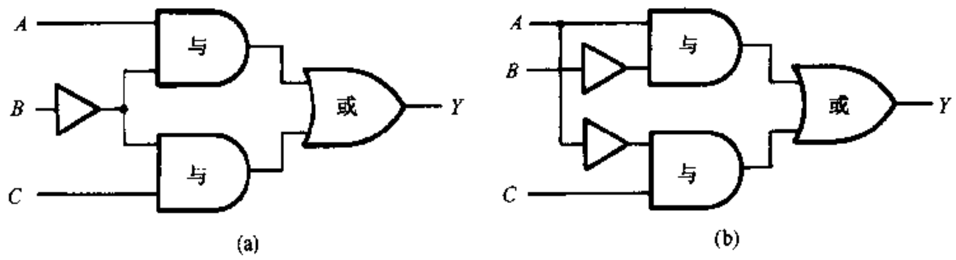


图 13-15

解 ☞ (a) 输入到第一个与门的是 A 和 $\overline{B}$,以及到第二个与门的是 $\overline{B}$ 和 C.因此

$$Y = A\overline{B} + \overline{B}C.$$

(b) 输入到第一个与门的是 A 和 $\overline{B}$,以及到第二个与门的是 $\overline{A}$ 和 C.这样

$$Y = A\overline{B} + \overline{A}C.$$

13.94 求(a)图 13-15(a),(b)图 13-15(b)中逻辑电路的真值表 T.

解 ☞ (a) 首先将 $Y = A\overline{B} + \overline{B}C$ 表示成完全积和形式:

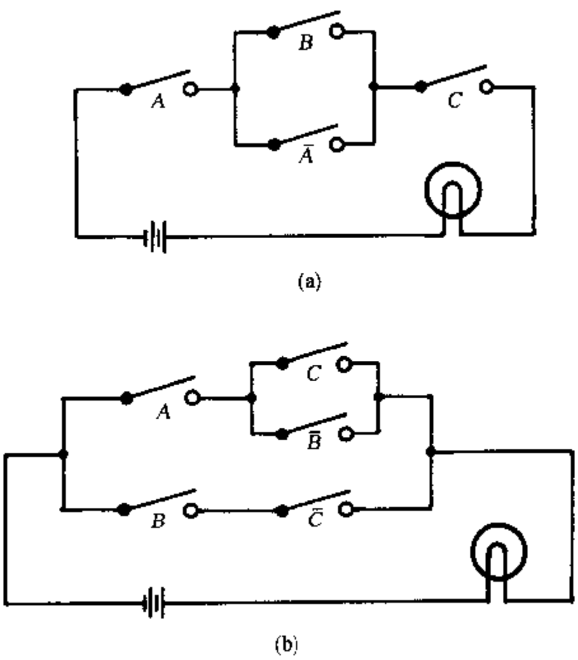


图 13-16

$$Y = A\bar{B}(C+\bar{C}) + (A+\bar{A})\bar{B}C = A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}C.$$

根据检验，

$$T = [A = 1110\cdots, B = 0000\cdots, C = 1011\cdots, Y = 11110000].$$

(b) 首先将 $Y = A\bar{B} + \bar{A}C$ 表示成完全积和形式：

$$Y = A\bar{B}(C+\bar{C}) + \bar{A}(B+\bar{B})C = A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C.$$

根据检验，

$$T = [A = 1100\cdots, B = 0010\cdots, C = 1011\cdots, Y = 11110000].$$

13.95 求图 13-16 中各个开关电路的布尔表达式.

解 ☞ 我们应用并联电路的和以及串联电路的积，得到

(a) $A\cdot(B+\bar{A})\cdot C$, (b) $A\cdot(C+\bar{B})+B\cdot\bar{C}$.

13.96 求对应于图 13-17 的各开关电路的布尔表达式.

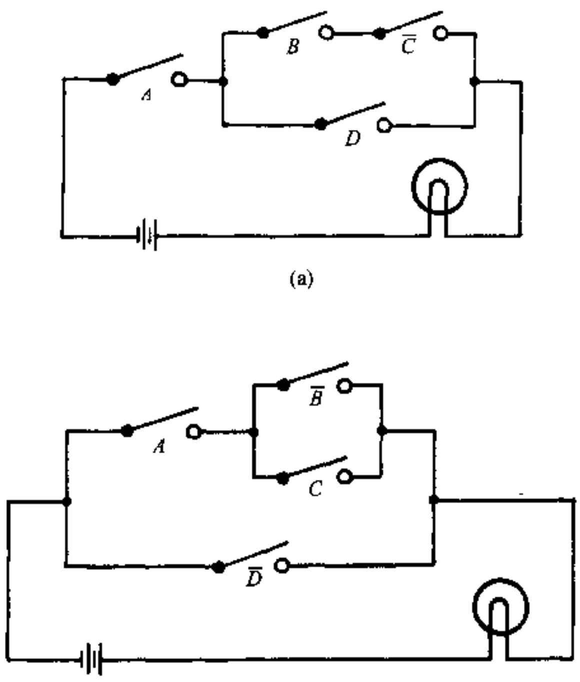


图 13-17

解 ☞ 应用并联电路的和以及串联电路的积，得到

(a) $A(D+B\bar{C})$, (b) $A(\bar{B}+C)+\bar{D}$.

13.97 一个如图 13-18(a)所表示的有两个输入的与非门是等价于一个与门其后跟一个非门，如图 13-18(b)所示. 求两个输入 A 和 B 的与非门的真值表 T.

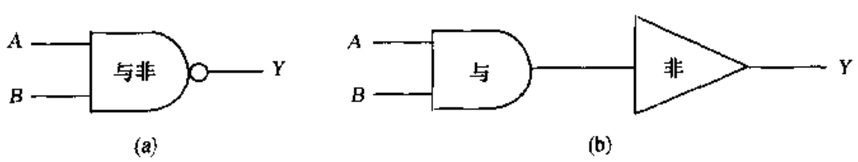


图 13-18

解 ☞ 与非门的输出是 $Y=\overline{A\cdot B}$. 计算真值表如下：

$$A = 0011, B = 0101, A\cdot B = 0001, Y = \overline{A\cdot B} = 1110.$$

这就是说，

$$T = [A = 0011, B = 0101, Y = 1110].$$

13.98 一个如图 13-19(a)所表示的有两个输入的或非门等价于一个或门随后跟一个非门，如图 13-19(b)所示. 求有两个输入 A 和 B 的或非门的真值表 T.

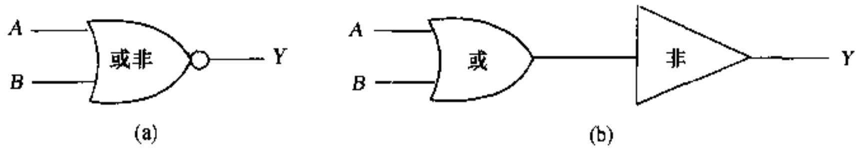


图 13-19

解 ☞ 或非门的输出是 $Y = \overline{A + B}$. 计算它的真值表如下：

$$A = 0011, B = 0101, A + B = 0111, Y = \overline{A + B} = 1000.$$

这就是说，

$$T = [A = 0011, B = 0101, Y = 1000].$$

13.99 画一个对应布尔表达式 $Y = \overline{A + BC} + B$ 的逻辑电路.

解 ☞ 这里 A 和 BC 是输入到一个或非门以产生图 13-20 的电路.

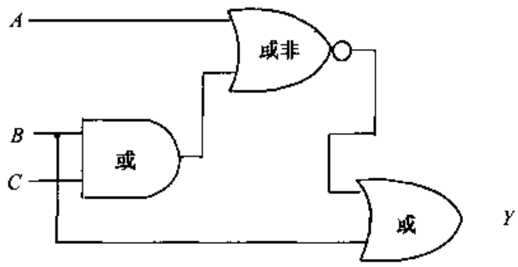


图 13-20

13.100 画一个对应布尔表达式 $Y = \overline{\bar{A}B} + \overline{A + C}$ 的逻辑电路.

解 ☞ 这里 $\bar{A}$ 和 B 是输到一个与非门以及 A 和 C 是输入到一个或非门以产生图 13-21 的电路.

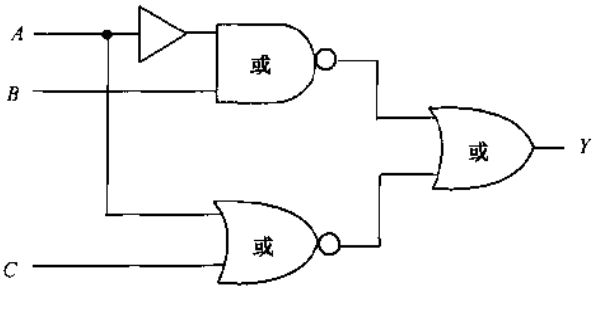


图 13-21

13.6 极小布尔表达式和素蕴涵

这一节定义并且研究布尔表达式 E 的极小积和形式，以及应用没有给予证明的如下定理：

定理 13.10 如果一个布尔表达式 E 是一个极小积和形式，那么 E 的每一被加项是 E 的一个素蕴涵.

13.101　对于积和布尔表达式 E，设 E_L 表示 E 中的文字数目(按重次计算)，E_S 表示 E 中被加项数．求下列 E 的 E_L 和 E_S：

(a)$E=xy'z+x'z'+yz'+x$；　(b)$E=x'y'z+xyz+y+yz'+x'z$；

(c)$E=xyt'+x'y'zt+xz't$；　(d)$E=(xy'+z)'+xy'$．

解　☞ 只要把各表达式的文字数目相加和计算被加项数目：

(a)　$E_L=3+2+2+1=8$，　$E_S=4$．

(b)　$E_L=3+3+1+2+2=11$，　$E_S=5$．

(c)　$E_L=3+4+3=10$，　$E_S=3$．

(d)　由于 E 没有按积和形式写出，因此 E_L 和 E_S 没有定义．

13.102　假设 E 和 F 都是积和形式并且与一布尔表达式等价．定义：(a)E 较 F 简单，(b)E 是极小的．

解　☞ (a)若 $E_L<F_L$ 且 $E_S\leqslant F_S$，或者若 $E_L\leqslant F_L$ 且 $E_S<F_S$，则 E 较 F 简单．

(b)如果不存在等价的积和表达式较 E 简单，那么 E 是**极小的**．

13.103　定义基本积的合意．

解　☞ 设 P_1 和 P_2 是两个基本积．如果恰好存在一个变元，比方说 x_k，补元(为 x'_k)出现在 P_1 和 P_2 的一个之中，而其非补元(如 x_k)则在另一个之中，那么 P_1 和 P_2 的**合意**是 P_1 和 P_2 删除 x_k 及 x'_k 后的文字(没有重复文字)的积．(我们没有定义 $P_1=x$ 和 $P_2=x'$的一个合意．)

13.104　求 P_1 和 P_2 的合意 Q，此处：

(a)　$P_1=xyz's$ 和 $P_2=xy't$；

(b)　$P_1=xy'$和 $P_2=y$；

(c)　$P_1=x'yz$ 和 $P_2=x'yt$；

(d)　$P_1=x'yz$ 和 $P_2=xyz'$．

解　☞ (a)　删除 y 和 y'，然后 P_1 和 P_2 的文字相乘(无重复文字)得 $Q=xz'st$．

(b)　删除 y'和 y 得 $Q=x$．

(c)　由于 P_1 和 P_2 不含互补变元，因此它们没合意．

(d)　由于 P_1 和 P_2 分别含有互补变元 x'和 x 以及 z 和 z'，因此它们没有合意．

13.105　设 Q 是 P_1 和 P_2 的合意．证明 $P_1+P_2+Q=P_1+P_2$．

证　☞ 由于文字可交换，不失一般性，我们可设

$$P_1=a_1a_2\cdots a_rt,\quad P_2=b_1b_2\cdots b_st',$$
$$Q=a_1a_2\cdots a_rb_1b_2\cdots b_s.$$

现在 $Q=Q(t+t')=Qt+Qt'$．因 Qt 含 P_1，$P_1+Qt=P_1$，又因 Qt'含 P_2，$P_2+Qt'=P_2$，因此

$$\begin{aligned}P_1+P_2+Q&=P_1+P_2+Qt+Qt'=(P_1+Qt)+(P_2+Qt')\\&=P_1+P_2.\end{aligned}$$

13.106　定义一个布尔表达式的素蕴涵．

解　☞ 设 P 是一个基本积．若

$$P+E=E,$$

且没有其他的含于 P 的基本积具有这样的特性，则称 P 是 E 的**素蕴涵**．(注意，在命题布尔代数中，条件 $P+E=E$ 转换为“P 逻辑蕴涵 E”，因而有此术语“蕴涵”．)

13.107　$P=xz'$是 $E=xy'+xyz'+x'yz'$的素蕴涵吗？

解　☞ 从习题 13.64，我们有 $P+E=E$，但 $x+E\neq E$ 且 $z'+E\neq E$．因此 P 是 E 的一个素蕴涵．

13.108　叙述合意法算法．(注：布尔代数中一个基本定理叙述合意法用于任一布尔积和 E 将最终停止使得 E 是其所有素蕴涵的和．)

解　**算法 13.108(合意法)**　输入一个布尔表达式 $E=P_1+P_2+\cdots+P_n$，此处诸 P_i 是基本积．

第 1 步　删除包含任一其他基本积 P_j 的任一基本积 P_i.(根据吸收律,这是容许的.)

第 2 步　若 P_i 和 P_j 的合意 Q 不含诸 P 中任何一个,则加上 Q.(根据习题 13.105,这是容许的.)

第 3 步　重复第 1 步和(或)第 2 步直到这两步都不能被应用为止.

13.109　求 $E = xyz + x'z' + xyz' + x'y'z + x'yz'$ 的素蕴涵.

解　☞ 应用合意法(习题 13.108)到 E:

$$\begin{aligned} E &= xyz + x'z' + xyz' + x'y'z && (x'yz' \text{包含 } x'z') \\ &= xyz + x'z' + xyz' + x'y'z + xy && (xyz \text{ 和 } xyz' \text{的合意}) \\ &= x'z' + x'y'z + xy && (xyz \text{ 和 } xyz' \text{包含 } xy) \\ &= x'z' + x'y'z + xy + x'y' && (x'z' \text{和 } x'y'z \text{ 的合意}) \\ &= x'z' + xy + x'y' && (x'y'z \text{ 包含 } x'y') \\ &= x'z' + xy + x'y' + yz'. && (x'z' \text{和 } xy \text{ 的合意}) \end{aligned}$$

现在,合意法中两步都用不上了.(前两个积的合意实际上等于最后一个积,最后两个积等于第一个积.)因此现在 E 表示成它的所有素蕴涵 $x'z'$, xy, $x'y'$ 和 yz' 的和.

13.110　设 E 表示成所有它的素蕴涵的和.叙述求 E 的一个极小形式算法.

解　**算法 13.110**　输入一个布尔表达式 $E = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$,此处诸 P_i 都是 E 的素蕴涵.

第 1 步　将每个素蕴涵表示完全积和形式.

第 2 步　逐次删除那些被加项出现在剩下的素蕴涵的被加项之中的素蕴涵.

13.111　$E = x'z' + xy + x'y' + yz'$ 已表示成所有它的素蕴涵的和(习题 13.109).求 E 的一个极小和.

解　☞ 应用习题 13.4 算法,我们有

$$\begin{aligned} x'z' &= x'z'(y + y') = x'yz' + x'y'z', \\ xy &= xy(z + z') = xyz + xyz', \\ x'y' &= x'y'(z + z') = x'y'z + x'y'z', \\ yz' &= yz'(x + x') = xyz' + x'yz'. \end{aligned}$$

由于 $x'z'$ 的被加项 $x'yz'$ 和 $x'y'z'$ 出现在其他素蕴涵的被加项中,因此可将 $x'z'$ 删除.于是

$$E = xy + x'y' + yz'.$$

现在没有素蕴涵是多余的,即没有素蕴涵可删除,因此这就是 E 的极小和形式.我们看到,还可以不删除 $x'z'$ 而消去 yz'.这表明布尔表达式的极小和无须是惟一的.

13.112　设 $E = xy' + xyz' + x'yz'$.求(a)E 的素蕴涵;(b)E 的一个极小和.

解　☞ (a)　应用习题 13.108 算法(合意法)到 E 如下:

$$\begin{aligned} E &= xy' + xyz' + x'yz + xz' && (xy' \text{ 和 } xyz' \text{ 的合意}) \\ &= xy' + x'yz' + xz' && (xyz' \text{ 包含 } xz') \\ &= xy' + x'yz' + xz' + yz' && (x'yz' \text{ 和 } xz' \text{ 的合意}) \\ &= xy' + xz' + yz'. && (x'yz' \text{ 包含 } yz') \end{aligned}$$

现在合意法中两步都应用不上了,因此 xy', xz' 和 yz' 都是 E 的素蕴涵.

(b)　应用习题 13.110 算法,将素蕴涵表示成完全积和形式得到

$$\begin{aligned} xy' &= xy'(z + z') = xy'z + xy'z', \\ xz' &= xz'(y + y') = xyz' + xy'z', \\ yz' &= yz'(x + x') = xyz' + x'yz'. \end{aligned}$$

只有 xz' 的被加项 xyz' 和 $xy'z'$ 出现其他素蕴含的被加项之中,因此可将 xz' 作为多余的删去.这样,$E = xy' + yz'$ 是 E 的一个极小和.

13.113　就 $E = xy + y't + x'yz' + xy'zt'$ 重复习题 13.112.

解　☞ (a)应用习题 13.108 算法(合意法)到 E 得到

$$\begin{aligned}
E &= xy + y't + x'yz' + xy'zt' + xzt' && (xy \text{ 和 } xy'zt' \text{ 的合意})\\
&= xy + y't + x'yz' + xzt' && (xy'zt' \text{ 包含 } xzt')\\
&= xy + y't + x'yz' + xzt' + yz' && (xy \text{ 和 } x'yz' \text{ 的合意})\\
&= xy + y't + xzt' + yz' && (x'yz' \text{ 包含 } yz')\\
&= xy + y't + xzt' + yz' + xt && (xy \text{ 和 } y't \text{ 的合意})\\
&= xy + y't + xzt' + yz' + xt + xz && (xzt' \text{ 和 } xt \text{ 的合意})\\
&= xy + y't + yz' + xt + xz && (xzt' \text{ 包含 } xz)\\
&= xy + y't + yz' + xt + xz + z't. && (y't \text{ 和 } yz' \text{ 的合意})
\end{aligned}$$

现在合意法两步都应用不上了.因此 E 的素蕴涵是 $xy, y't, yz', xt, xz$ 和 $z't$.

(b)应用习题 13.110 算法,就是将每个素蕴涵表示成积和形式,然后逐次消去多余的被加项.最后得到 $E = y't + xz + yz'$ 是 E 的一个极小和.

13.7 卡诺(Karnaugh)图

卡诺(Karnaugh)图是求至多含有 6 个变元的布尔表达式的素蕴涵和极小形式的图表法,其中相同变元的基本积用方格表示,我们将仅仅处理 2,3 和 4 个变元的情形.在卡诺图的前后论述中,我们将交替使用术语"方格"和"基本积".

13.114 定义邻接基本积.

解 ☞ 设 P_1 和 P_2 是两个基本积,如果 P_1 和 P_2 有相同的变元并且它们恰好有一个文字不同,其不同之处必须是一个补元在一个积中而非补元则在另一个积中.那么称 P_1 和 P_2 是**邻接的**.

13.115 证明两个邻接积(方格)P_1 和 P_2 之和是少掉一个文字的基本积.

证 ☞ 设 $P_1 = a_1\cdots a_r t b_1\cdots b_s$ 和 $P_2 = a_1\cdots a_r t' b_1\cdots b_s$,其中诸 a_i 和 b_j 是文字,而 t 是一个变元.那么

$$\begin{aligned}
P_1 + P_2 &= a_1\cdots a_r(t + t')b_1\cdots b_s\\
&= a_1\cdots a_r(1)b_1\cdots b_s\\
&= a_1\cdots a_r b_1\cdots b_s.
\end{aligned}$$

它较 P_1 和 P_2 少掉一个文字.

13.116 求邻接积 P_1 和 P_2 之和,其中

(a)$P_1 = xyz'$ 和 $P_2 = xy'z'$;

(b)$P_1 = x'yzt$ 和 $P_2 = x'yz't$;

(c)$P_1 = x'yzt$ 和 $P_2 = xyz't$;

(d)$P_1 = xyz'$ 和 $P_2 = xyzt$.

解 ☞ (a)$P_1 + P_2 = xyz' + xy'z' = xz'(y + y') = xz'(1) = xz'$.

(b)$P_1 + P_2 = x'yzt + x'yz't = x'yt(z + z') = x'yt(1) = x'yt$

(c)P_1 和 P_2 不是邻接的.具体地说,

$$\begin{aligned}
P_1 + P_2 &= x'yzt + xyz't = (x' + x)y(z + z')t = (1)y(1)t\\
&= yt
\end{aligned}$$

它较 P_1 和 P_2 少掉两个文字.

(d)因 P_1 和 P_2 有不同的变元,因此它们不是邻接的.具体地说,在同一卡诺图中,它们将不作为方格出现.

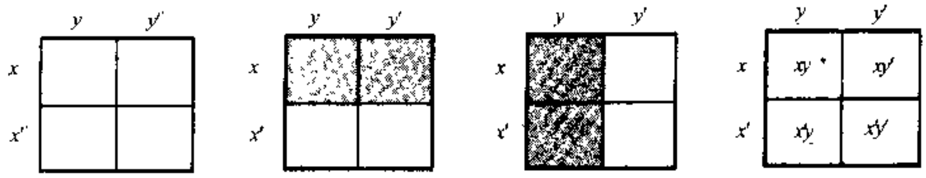
两个变元的情形

13.117 描述两个变元的卡诺图.

解 ☞ 对应于布尔表达式 $E(x, y)$ 的卡诺图为图 13-22(a)所表示的.卡诺图可以视为文图,此处 x 表示图的上半部的点,图 13-22(b)的阴影部分;y 表示左半部的点,图 13-22(c)的阴影部分.因此,x' 表示图的下半部的点;y' 表示图的右半部的点.于是,具有两个文字的四个可能的基本积

$$xy, xy', x'y, x'y'$$

用图的四个方格来表示，如图 13-22(d)所标注的．注意，两个这样的方格按上述定义是邻接的当且仅当几何上是邻接的(有一个公共边)．



(a)　(b) x 为阴影　(c) y 为阴影　(d)

图 13-22

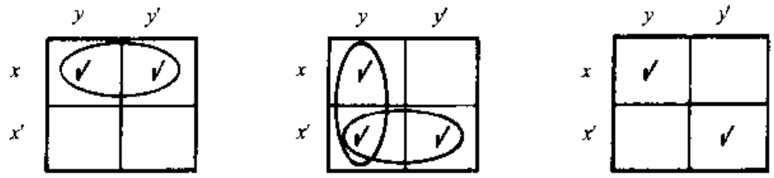
13.118　从几何上描述有两个变元的卡诺图的素蕴涵．

解　任一完全积和布尔表达式 $E(x, y)$ 在一个卡诺图中用恰当的方格作核对标记来表示．$E(x, y)$ 的一个素蕴涵或是一对邻接方格或是一个孤立方格，即它不与 $E(x, y)$ 的其他任何方格邻接．

13.119　用卡诺图求下列完全积和布尔表达式：

(a) $E_1 = xy + xy'$，　(b) $E_2 = xy + x'y + x'y'$，　(c) $E_3 = xy + x'y'$ 的素蕴涵和极小形式．

解　(a)对应于 xy 和 xy' 的方格作核对记号，如图 13-23(a)．注意 E_1 由一素蕴涵组成，两个邻接方格由图 13-23(a)中的圈来标明．这一对邻接方格表示变元 x，因此 x 是 E_1 的(惟一)素蕴涵．于是 $E_1 = x$ 是极小和．



(a) E_1　(b) E_2　(c) E_3

图 13-23

(b)对应于 $xy, x'y$ 和 $x'y'$ 的方格作核对记号，如图 13-23(b)．注意 E_2 含有两对邻接方格(用两个圈标明)．这里包含 E_2 的所有方格．竖直对表示 y 和水平对表示 x'，因而 y 和 x' 是 E_2 的素蕴涵．于是 $E_2 = x' + y$ 是极小和．

(c)对应于 xy 和 $x'y'$ 的方格作核对记号，如图 13-23(c)．注意 E_3 由两个表示 xy 和 $x'y'$ 的孤立方格组成，因此 xy 和 $x'y'$ 是 E_3 的素蕴涵，并且 $E_3 = xy + x'y'$ 是极小和．

三个变元的情形

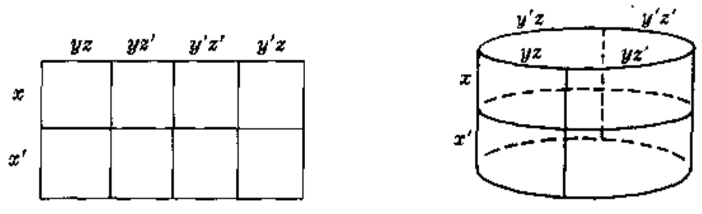
13.120　描述三变元的卡诺图．

解　对应于布尔表达式 $E(x, y, z)$ 的卡诺图为图 13-24(a)所表示的．注意，恰有 8 个具有 3 个文字的基本积：

$$xyz, xyz', xy'z, xy'z', x'yz, x'yz', x'y'z, x'y'z',$$

并且，显见，这 8 个基本积对应于卡诺图的 8 个方格．而且，为了使图 13-23(a)的每对邻接积是几何邻接的，图的左边和右边必须是相同的．这等价于沿着相同的边切割、弯曲和胶合该图得到图 13-24(b)所画的柱体．此处邻接积现在用具有一条公共边的方格来表示．

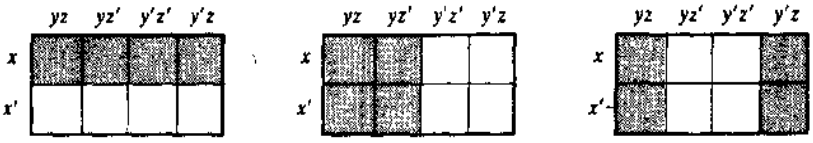
13.121　将图 13-24(a)具有三个变元的卡诺图视为一个文图．确定由变元 x，y 和 z 表示的区域．



(a) (b)

图 13-24

解 ☞ 变元 x 仍然用图的上半部的点来表示，如图 13-25(a)的阴影部分，变元 y 仍用图的左半部的点来表示，如图 13-25(b)的阴影部分．现在变元 z 用图的左和右的四分之一部分的点表示，如图 13-25(c)的阴影部分．这样，x'用图的下半部点表示，y'用图的右半部点表示，z'用中间两个四分之一部分点表示．



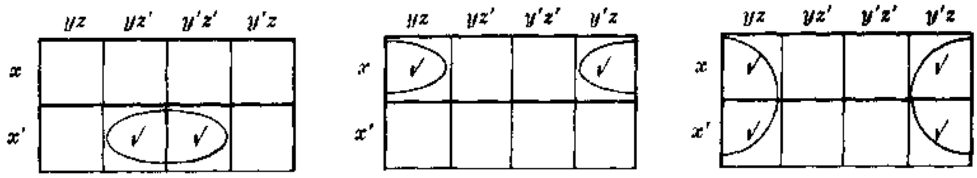
(a) x 为阴影 (b) y 为阴影 (c) z 为阴影

图 13-25

13.122 定义三变元卡诺图中的基本矩形．

解 ☞ 关于有 3 个变元的卡诺图的一个**基本矩形**，我们指的是一个方格，两个邻接方格，或者是四方格，它们形成长一宽四或长二宽二的矩形，这些基本矩形分别对应于 3 个文字，2 个文字或者 1 个文字的基本积．此外，用基本矩形表示的基本积正好是出现在矩形的每一方格中的那些文字的积．

13.123 求由图 13-26 所表示的卡诺图中每个基本矩形表示的基本积 P．



(a) (b) (c)

图 13-26

解 ☞ 在每种情形中，求出现在基本矩形的所有方格中的那些文字，P 便是这样的文字的积．

(a) x'和 z'同时出现在两个方格中，因此 $P = x'z'$．

(b) x 和 z 同时出现在两个方格中，因此 $P = xz$．

(c) 只有 z 出现在所有四个方格中，因此 $P = z$．

13.124 假设一个布尔表达式 $E(x, y, z)$表示在一卡诺图中，比方说，在恰当方格标上核对记号来表示它．如何求 E 的素蕴涵和 E 的一个极小和呢？

解 ☞ E 的一个素蕴涵是 E 的一个**极大基本矩形**，即不含任何更大的基本矩形的基本矩形．E 的一个极小和是由 E 的一个**极小覆盖**，即最少个极大基本矩形（它们包含 E 的所有方格）组成的．

13.125 应用卡诺图求下列完全积和布尔表达式的素蕴涵和极小形式：

(a) $E_1 = xyz + xyz' + x'yz' + x'y'z$；

(b) $E_2 = xyz + xyz' + xy'z + x'yz + x'y'z$；

(c) $E_3 = xyz + xyz' + x'yz' + x'y'z' + x'y'z$.

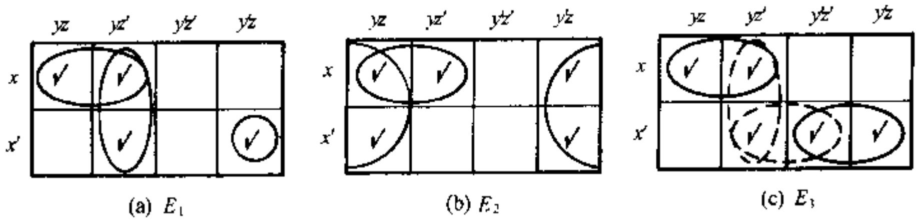


图 13-27

解 ☞ (a)对应 4 个被加项的方格作核对记号,如图 13-27(a).我们看到 E_1 有 3 个环绕的素蕴涵(极大基本矩形),这些是 xy, yz' 和 $x'y'z$.为覆盖 E_1,所有这 3 个积是必须的,因此 E_1 的极小和是

$$E_1 = xy + yz' + x'y'z.$$

(b)对应 5 个被加项的方格作核对记号,如图 13-27(b).注意 E_2 有两个环绕的素蕴涵.一个是表示 xy 的两个邻接方格,另一个是二长二宽方格(跨越相同的边),它表示 z.为覆盖 E_2,这两个积都是必须的,因此 E_2 的极小和是

$$E_2 = xy + z.$$

(c)对应于 5 个被加项的方格作核对记号,如图 13-27(c).如这些圈表明的,E_3 有 4 个素蕴涵 xy, yz', $x'z'$ 和 $x'y'$.然而,在 E_3 的极小覆盖中,两个虚圈中只有一个,即 yz' 或 $x'z'$ 是需要的.因此 E_3 有两个极小和:

$$E_3 = xy + yz' + x'y'$$
$$= xy + x'z' + x'y'.$$

四个变元的情形

13.126 描述四变元卡诺图.

解 ☞ 对应于布尔表达式 $E(x, y, z, t)$ 的卡诺图为图 13-28 所表示的.图中 16 个方格的每一方格对应于下列 16 个如用方格的行和列的标记所表明乘积:

$$xyzt,\quad xyzt',\quad xyz't',\quad xyz't,\quad xy'zt, \cdots, x'yz't$$

之一.我们看到线上和左边的标注使得邻接积恰好一个文字不同,再者,我们必须识别左边和右边(因我们有 3 个变元)而且我们还必须识别顶边和底边.(这些识别引出一个称为环面的果核状面,并且我们可把我们的图视为实际上是一个环面.)

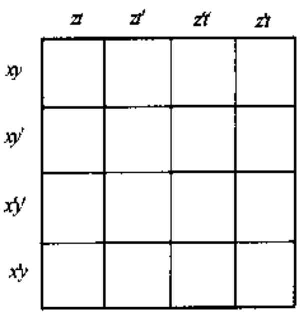


图 13-28

13.127 定义四变元卡诺图的一个基本矩形.基本矩形与布尔表达的素蕴涵和一个极小形式有何关系?

解 ☞ 一个基本矩形是 1 个方格,2 个邻接方格,长一宽四或长二宽二矩形形成的 4 个方格,或者长二宽四矩形形成的 8 个方格.这些矩形分别对应于四,三,二和一个文字的基本积.极大基本矩形是素蕴涵.布尔表达式 $E(x, y, z, t)$ 的极小化技巧和前面的相同.

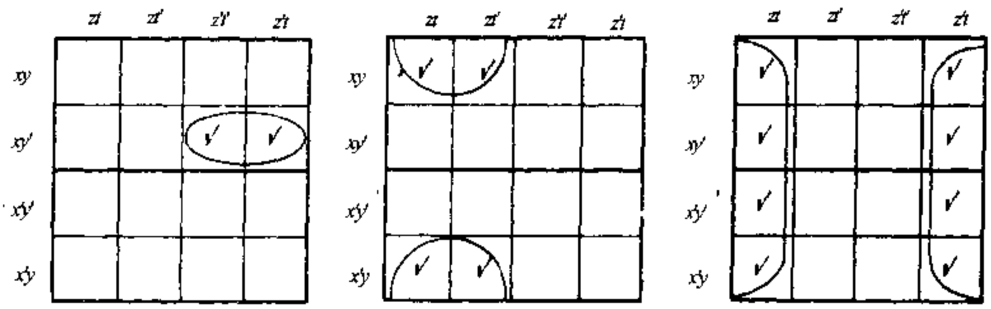
13.128 求图 13-29 所表示的卡诺图中每个基本矩形表示的基本积 P.

解 ☞ 在每一情形中,求出现在基本矩形中的所有方格的那些文字.P 是这样一些的文字的积.

(a) x, y' 和 z' 同时出现在 2 个方格,因此 $P = xy'z'$.

(b)只有 y 和 z 出现在所有 4 个方格,因此 $P = yz$.

(c)只有 t 出现在所有 8 个方格,因此 $P = t$.



(a)　　(b)　　(c)

图 13-29

13.129 设 E 表示图 13-30 卡诺图给出的布尔表达式.(a)将 E 表示成完全积和形式;(b)求 E 的一个极小形式.

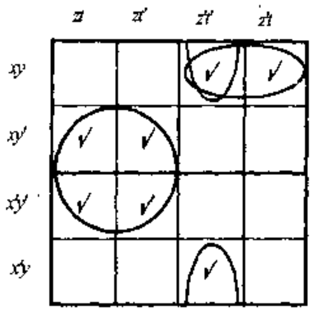


图 13-30

解 ☞ (a)列出 7 个作核对记号的基本积得

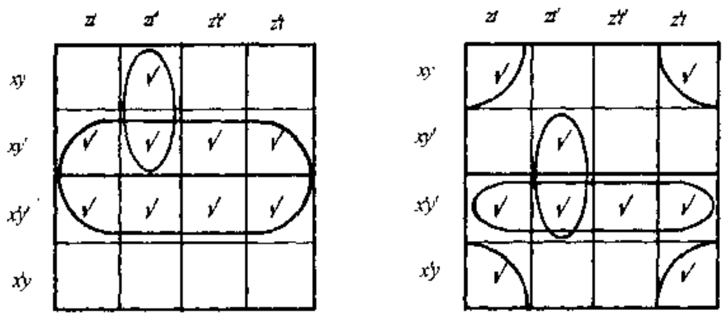
$$E = xyz't' + xyz't + xy'zt + x'y'zt + x'y'zt + x'y'zt' + x'yz't'.$$

(b)长二宽二极大基本矩形表示 $y'z$,这是因为只有 y' 和 z 出现在所有四个方格中.邻接方格的水平对表示 xyz',以及搭接顶和底边的方格表示$yz't'$.对于一个极小覆盖,所有这三个矩形是必须的,因此

$$E = y'z + xyz' + yz't'$$

是 E 的极小和.

13.130 求图 13-31 卡诺图给出的变元 x, y, z, t 的布尔表达式 E_1 和 E_2 的极小和.



(a) E_1　　(b) E_2

图 13-31

解 ☞ 在图 13-31(a)中只有 y'出现在长二宽四的极大基本矩形的所有 8 个方格中,以及所标明的邻接方格对表示 xzt'.两个矩形对于极小覆盖是必须的,因此

$$E_1 = y' + xzt'.$$

是 E_1 的极小和.

在图 13-31(b)中,4 个拐角的方格形成一个长二宽二的极大基本矩形.由于只有 y 和 t 出现在所有 4 个方格中,因此它表示 yt.长四宽一的极大基本矩形表示 $x'y'$,以及两个邻接方格表示 $y'zt'$.对于一个极小覆盖,所有三个矩形是必须的,因此

$$E_2 = yt + x'y' + y'zt'$$

是 E_2 的极小和.

13.131 应用卡诺图求

$$E = xy' + xyz + x'y'z' + x'yzt'$$

的一个极小和.

解 ☞ 我们将表示各个基本积的所有方格作核对记号.这就是说,我们把表示 xy' 的所有 4 个方格,表示 xyz 的 2 个方格,表示 $x'y'z'$ 的 2 个方格,以及表示 $x'yzt'$ 的一个方格都作核对记号,如图 13-32.图的一个极小覆盖由 3 个标明极大基本矩形组成,因此

$$E = xz + y'z' + yzt'$$

是 E 的一个极小和.

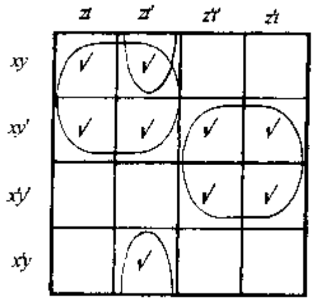


图 13-32

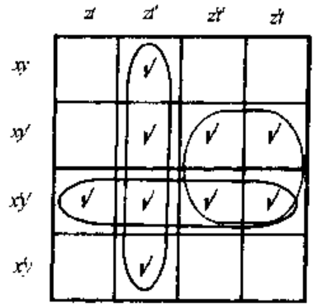


图 13-33

13.132 应用卡诺图求

$$E = y't' + y'z' + yzt' + x'y'zt$$

的极小和.

解 ☞ 我们将对应于基本积 $y't'$ 的 4 个方格,对应于 $y'z'$ 的 4 个方格,对应于 yzt' 的 2 个方格,以及对应于 $x'y'zt$ 的一个方格都作核对记号.这就给出图 13-33 的卡诺图.一个极小覆盖由这 3 个标明极大基本矩形组成.这样

$$E = zt' + y'z' + x'y'$$

是 E 的极小和.

13.133 求图 13-34 卡诺图表示的表达式 E 的一个极小和.

解 ☞ 有 5 个用 4 个圈和 1 个虚环标明的素蕴涵.然而,对于覆盖所有方格,虚环是不需要的,而 4 个圈是要的.这样,这 4 个圈便给出 E 的极小和,即

$$E = xzt' + xy'z' + x'y'z + x'z't'.$$

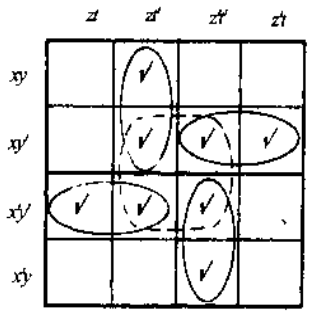


图 13-34

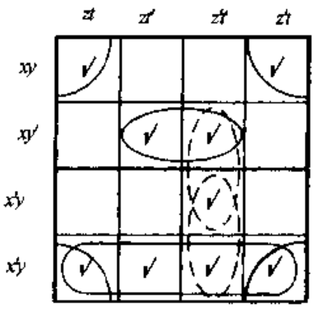


图 13-35

13.134 求图 13-35 卡诺图表示的表达式 E 的一个极小和.

解 ☞ 有 5 个素蕴涵,用 5 个圈,其中 2 个是虚圈标明它们,为覆盖 $x'y'z't'$ 方格,仅仅 2 个虚圈之一是必须的.这样

$$E = x'y + yt + xy't' + y'z't' = x'y + yt + xy't' + x'z't'$$

是 E 的 2 个极小和.

13.8 极小与或电路

13.135 什么是极小与或电路?

解 ☞ 如果一个与或电路对应的布尔表达式是一个极小和,则称这个与或电路是**极小的**.

13.136 设计一个三输入极小与或电路 L，使之得到下面的真值表：

$$T = [A = 00001111, B = 00110011, C = 01010101, L = 11001101].$$

解 ☞ 我们可以从该真值表读出 L 的完全积和形式：

$$L = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot C.$$

结合图 13-36(a)所示卡诺图，我们看到 L 在其极小覆盖中有两个素蕴涵 $\overline{B}$ 和 AC，因而 $L = \overline{B} + AC$ 是 L 的极小和。图 13-36(b)给出 L 的相应极小与或电路。

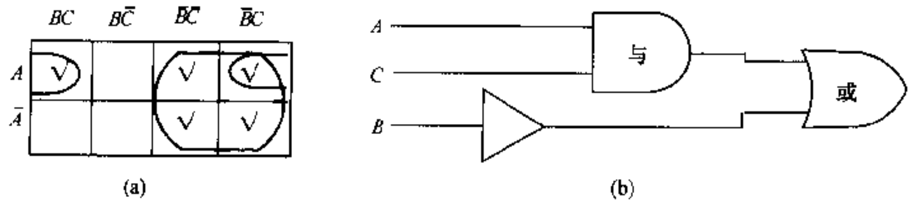


图 13-36

13.137 设计一个极小与或电路，使之得到下面的真值表：

$$T = [A = 00001111, B = 00110011, C = 01010101, L = 10101001].$$

解 ☞ 从真值表我们有完全积和表达式

$$L = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C.$$

L 的卡诺图为图 13-37(a)所示。有三个用三个圈指明的素蕴涵。因此 $L = ABC + \overline{A}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{C}$ 是 L 的一个极小和，相应的极小与或电路为图 13-37(b)所表示的

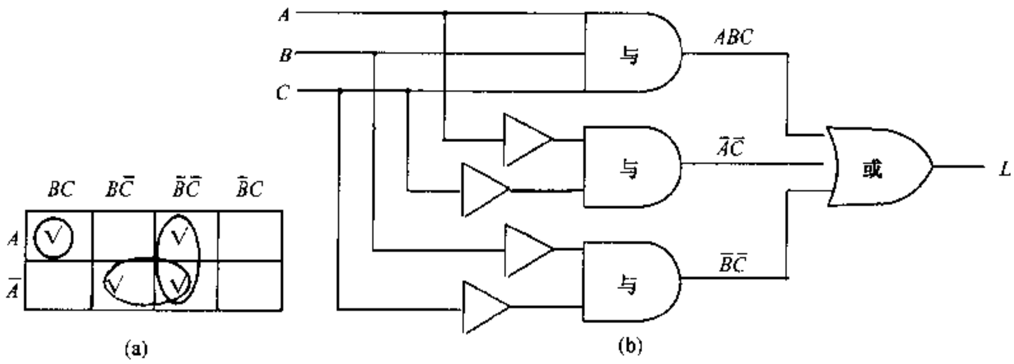


图 13-37

13.138 重新设计图 13-38(a)中电路 L 使之成为一个极小与或电路。

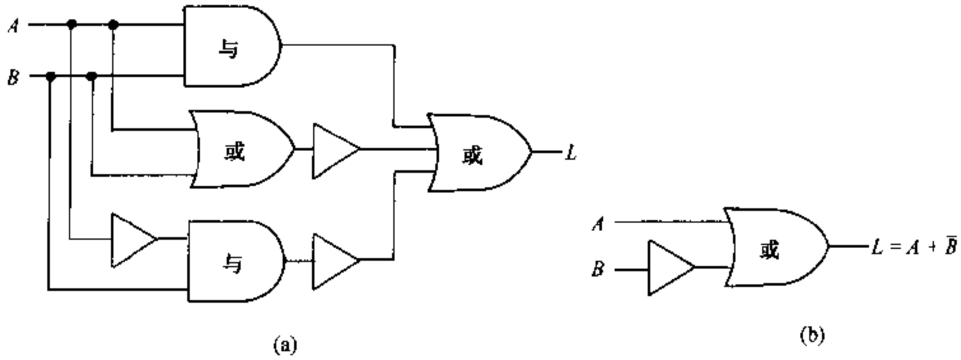


图 13-38

解 ☞ 首先逐次标出每个门的输入和输出，求电路的输出直至达到输出 $L = AB + (\overline{A+B}) +$

$\overline{A}\overline{B}$.应用德·摩根定律和吸收律得到

$$L = AB + AB + A + \overline{B} = A + \overline{B}.$$

最后的表达式显然是 L 的一个极小和,图 13-38(b)表明相应的极小与或电路.

13.139　重新设计图 13-39(a)中电路 L 使之成为一个极小与或电路.

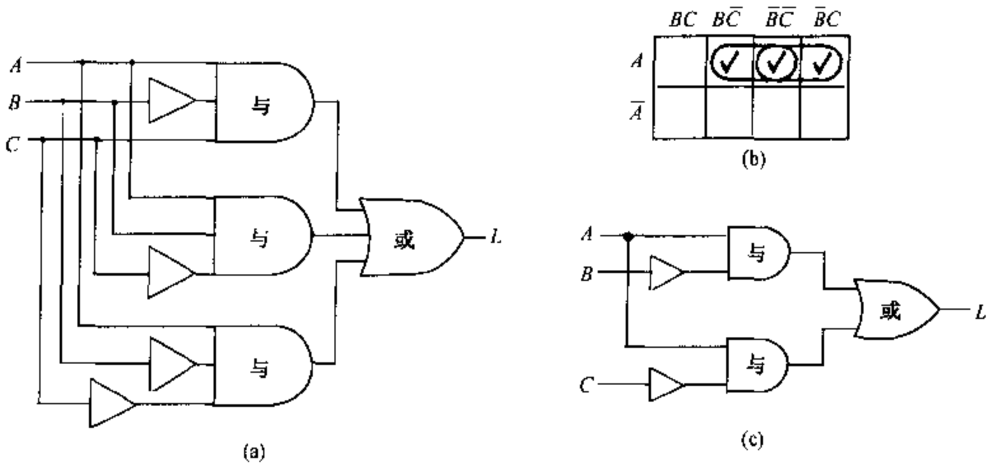


图 13-39

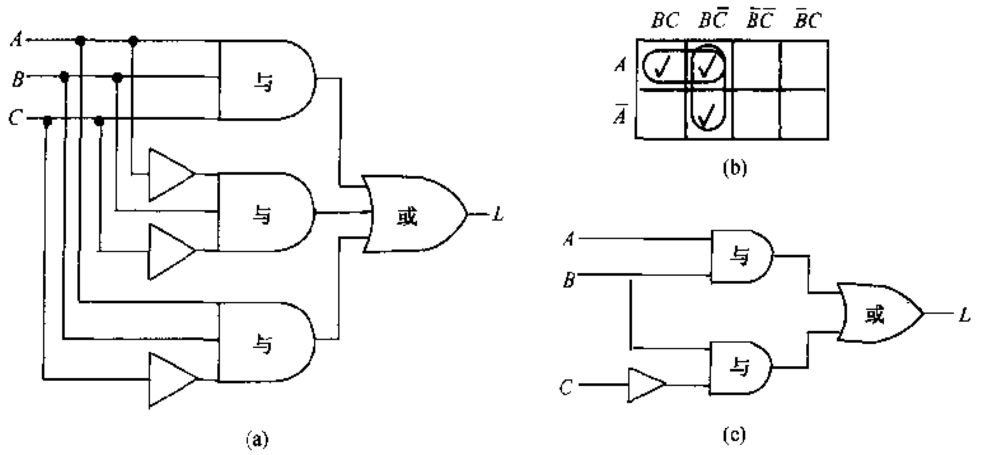


图 13-40

解　☞ 该输出是 $L = A\overline{B}C + AB\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C}$. L 的卡诺图在图 13-39(b)中.它表明 $L = A\overline{B} + A\overline{C}$ 是一个极小和,其相应的极小与或电路为图 13-39(c)所表示的.

13.140　重新设计图 13-40(a)的电路 L 使之成为一个极小与或电路.

解　☞ 该输出是 $L = ABC + \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C}$. L 的卡诺图在图 13-40(b)中.它表明 $L = AB + B\overline{C}$ 是一个极小和,其相应的极小与或电路为图 13-40(c)所示.

13.141　设计一个极小与或电路 L,借此 3 个开关 A,B 和 C 可控制相同的大厅灯光.

解　☞ 一个给定的开关可以是开(闭合)或关(断开)分别用 1 和 0 表示.不管 3 个开关是怎样的状态,任一单个开关的改变将改变 1 的奇偶性.如果电路与灯处于“开”(用 1 表示)的奇性和灯处于“关”(用 0 表示)的偶性,那么该电路因此获得所要求的功能.这些条件得到下面的真值表:

$$T = [A = 00001111, B = 00110011, C = 01010101, L = 01101001].$$

从真值表我们看到

$$L = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + ABC,$$

并且这是 L 的一个极小和.可用图 13-41(a)卡诺图验证它是正确的.L 的相应极小与或电路为图

13-41(b)所表明的.

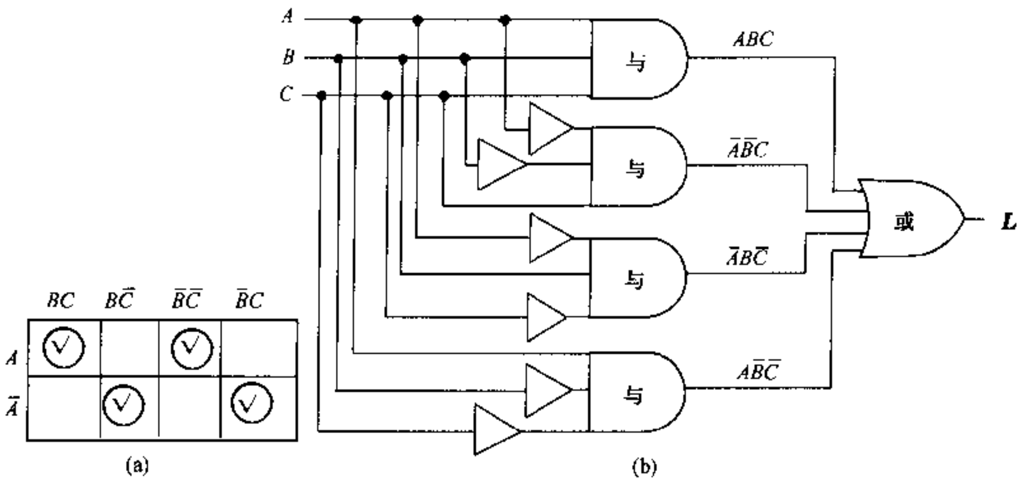


图 13-41

13-41(b)所表明的.

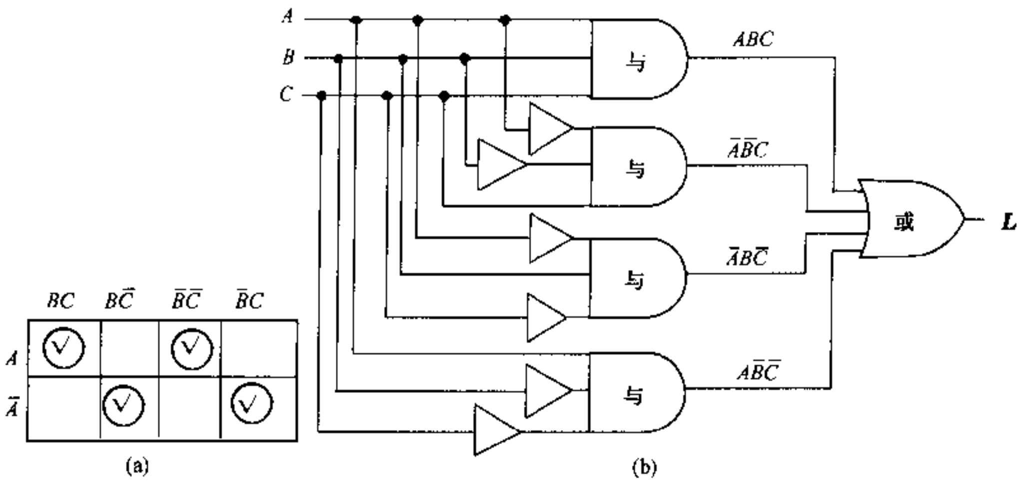


图 13-41